ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

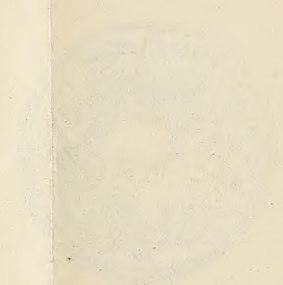
1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 gennaio 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Protuberanze solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano negli anni 1891-92-93-94.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Le osservazioni furono eseguite collo stesso metodo usato negli anni precedenti, e il numero dei giorni di osservazione fu di 251 nel 1891, di 257 nel 1892, di 280 nel 1893 e di 246 nel 1894. Le osservazioni furono fatte da me in 746 giornate, in 177 dal prof. Polazzo e in 11 dal prof. Millosevich; tutte le riduzioni sono state fatte da me ed i dati ottenuti ho riunito nelle seguenti tabelle:

1891

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Massima altezza osservata
Gennaio . .	13	4,62	36″,9	1°,3	60″
Febbraio. .	22	7,55	44,1	1,8	114
Marzo . . .	17	6,12	40,1	1,5	130
Aprile . . .	18	7,55	42,3	1,5	110
Maggio. . .	21	4,62	37,3	1,4	60
Giugno. . .	19	5,63	39,4	1,8	68
Luglio . . .	30	8,37	40,2	1,4	111
Agosto . . .	30	6,77	41,0	1,9	142
Settembre .	23	9,26	41,4	2,2	80
Ottobre . .	22	9,82	43,6	1,7	110
Novembre .	15	5,73	35,4	1,6	68
Dicembre .	21	6,48	40,2	2,2	100

1892

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Massima altezza osservata
Gennaio . .	13	6,39	39″,6	1°,6	90″
Febbraio . .	13	7,00	36,0	1,6	100
Marzo . . .	14	8,14	36,4	2,3	75
Aprile . . .	19	7,84	38,7	2,0	64
Maggio . . .	27	7,70	38,2	1,9	90
Giugno . . .	30	10,63	37,5	1,7	86
Luglio . . .	30	10,27	39,2	1,8	141
Agosto . . .	29	9,76	41,6	2,0	364
Settembre .	26	11,08	41,8	2,0	121
Ottobre . .	20	9,02	36,8	1,6	260
Novembre .	21	9,29	45,5	2,2	534
Dicembre . .	15	9,47	45,7	2,0	152

1893

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Massima altezza osservata
Gennaio . .	17	8,12	41″,5	2°,1	106″
Febbraio . .	22	9,00	37,5	1,9	75
Marzo . . .	29	9,10	38,0	1,9	142
Aprile . . .	26	11,58	39,3	1,8	187
Maggio . . .	21	6,52	40,1	1,9	127
Giugno . . .	26	5,81	38,8	1,9	90
Luglio . . .	26	6,23	37,4	1,7	75
Agosto . . .	29	8,73	36,3	1,8	121
Settembre .	26	6,77	36,5	1,7	100
Ottobre . .	22	5,82	36,2	1,9	74
Novembre .	13	5,00	34,7	1,8	62
Dicembre .	23	6,48	35,5	1,9	141

1894

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Massima altezza osservata
Gennaio . .	14	6,00	37″,1	1°,6	91″
Febbraio. .	18	7,17	37,4	2,6	96
Marzo . . .	18	8,11	37,5	2,2	106
Aprile . . .	18	5,00	38,5	2,3	70
Maggio. . .	17	5,94	35,7	1,7	100
Giugno. . .	26	6,38	32,5	1,7	62
Luglio . . .	31	4,71	36,8	1,8	90
Agosto . . .	30	5,20	36,3	1,8	75
Settembre .	19	5,53	38,5	2,2	100
Ottobre . .	16	4,56	32,0	1,8	50
Novembre .	22	4,64	38,8	1,7	80
Dicembre .	17	3,41	35,3	1,8	290

« Il fenomeno delle protuberanze presenta un periodo di maggiore attività a partire dal Giugno 1892 a tutto Aprile dell'anno successivo; e tenuto conto anche delle maggiori protuberanze osservate, il massimo sembra doversi ritenere avvenuto verso il finire del 1892. La frequenza media diurna delle protuberanze fu di 7,06 nel 1891, di 9,19 nel 1892, di 7,50 nel 1893 e di 5,51 nel 1894. L'andamento dei fenomeni cromosferici poco si accorda con quello delle macchie, le quali hanno presentato dei massimi secondarî rilevanti anche nell'ultimo anno, mentre nella cromosfera può dirsi, che dominò sempre uno stato di calma relativa. Considerando poi che i fenomeni aurorali terrestri furono scarsi e deboli, mi confermo nell'opinione mia, che detti fenomeni siano più in relazione colle protuberanze, che colle macchie, come altre volte ho cercato di dimostrare. La massima altezza notata per il Dicembre 1894 riguarda una protuberanza di carattere non eruttivo, ma piuttosto nebuloso, osservata dal prof. Polazzo nel giorno 24 di quel mese; questa protuberanza trovavasi nell'emisfero sud del sole alla latitudine di 29°,5 ed alle $11^h.26^m$ aveva un'altezza di 212″, che si aumentò fino a 290″ alle $11^h.51^m$: dopo discese e alle $12^h.36^m$ non era alta che poco più di un minuto ed erasi molto spostata verso sud; e da ritenersi che fosse tutta sospesa nell'atmosfera solare e non innalzatasi dal posto al bordo determinato nella prima osservazione ».

Astronomia. — *Macchie e facole solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano negli anni 1891-92-93-94.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Il numero dei giorni di osservazione in questi quattro anni furono rispettivamente di 304, 297, 317 e 283 abbastanza bene distribuiti nel corso di ciascuna annata. Le osservazioni furono eseguite da me in 823 giornate, in 233 dal sig. Vezzani e in 145 dal prof. Polazzo; lo spoglio poi delle osservazioni e calcoli sono stati fatti da me, e i dati ottenuti ho raccolto nelle seguenti tabelle.

1891

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Gennaio . .	16	1,56	2,13	3,69	0,38	0,00	1,38	18,5	16,9
Febbraio. .	26	2,31	8,12	10,43	0,15	0,08	2,38	24,0	89,6
Marzo . . .	22	1,27	1,91	3,18	0,14	0,00	1,45	11,9	41,8
Aprile . . .	25	3,00	6,24	9,24	0,00	0,04	2,36	24,6	55,6
Maggio. . .	23	5,91	8,44	14,35	0,00	0,00	4,09	48,1	51,0
Giugno. . .	25	4,48	12,40	16,88	0,00	0,00	3,80	47,0	89,4
Luglio . . .	31	7,84	10,81	15,65	0,00	0,00	4,03	76,3	82,0
Agosto . . .	31	3,55	5,29	8,84	0,06	0,06	2,94	40,1	70,8
Settembre .	29	6,66	10,86	17,52	0,00	0,00	4,10	114,2	61,1
Ottobre . .	26	4,89	10,65	15,54	0,00	0,00	4,96	54,7	85,8
Novembre .	22	5,32	7,18	12,50	0,00	0,00	3,41	61,4	51,5
Dicembre .	28	3,93	4,64	8,57	0,00	0,00	2,68	42,2	35,4

1892

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi	Media estensione delle macchie	Media estensione dello facole
Gennaio . .	19	9,10	10,53	19,63	0,00	0,00	5,90	79,8	56,6
Febbraio . .	19	11,26	12,05	23,31	0,00	0,00	5,16	153,6	60,3
Marzo . . .	18	6,67	6,45	13,12	0,00	0,00	4,28	61,7	86,4
Aprile . . .	21	10,76	13,91	24,67	0,00	0,00	5,57	70,8	51,2
Maggio . . .	31	11,10	13,17	24,27	0,00	0,00	5,74	119,5	62,5
Giugno . . .	30	13,47	11,53	25,00	0,00	0,00	6,20	111,2	106,8
Luglio . . .	31	11,71	12,61	24,32	0,00	0,00	4,77	153,2	80,3
Agosto . . .	30	11,50	9,70	21,20	0,00	0,00	6,50	123,8	57,2
Settembre .	27	7,04	12,18	19,22	0,00	0,00	5,37	72,9	86,4
Ottobre . .	25	9,84	13,92	23,76	0,00	0,00	4,95	79,0	89,6
Novembre .	25	11,32	11,84	23,16	0,00	0,00	4,16	74,3	46,7
Dicembre .	21	12,00	10,90	22,90	0,00	0,00	6,57	63,3	66,3

1893

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza F+M	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Gennaio . .	20	13,20	9,90	23,10	0,00	0,00	5,01	98,4	43,5
Febbraio . .	22	12,96	10,64	23,60	0,00	0,00	4,64	100,7	53,2
Marzo . . .	30	11,93	7,57	19,50	0,00	0,00	4,90	81,3	66,3
Aprile . . .	28	14,75	14,36	29,11	0,00	0,00	7,25	110,5	99,6
Maggio . . .	25	14,60	8,56	23,16	0,00	0,00	7,00	95,2	89,8
Giugno . . .	27	17,15	11,59	28,74	0,00	0,00	6,85	101,3	63,9
Luglio . . .	30	13,07	13,23	26,30	0,00	0,00	7,30	138,1	94,2
Agosto . . .	31	14,42	30,42	44,84	0,00	0,00	10,16	227,5	111,0
Settembre .	30	11,17	19,60	30,77	0,00	0,00	6,70	141,1	134,0
Ottobre . .	27	11,89	14,96	26,85	0,00	0,00	7,37	112,7	89,2
Novembre .	20	11,10	12,05	23,15	0,00	0,00	5,35	96,4	84,0
Dicembre .	27	19,15	14,74	33,89	0,00	0,00	7,96	166,4	86,0

1894

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Gennaio . .	19	10,79	13,58	24,37	0,00	0,00	7,16	106,1	74,2
Febbraio. .	20	10,55	8,80	19,35	0,00	0,00	6,25	136,3	65,8
Marzo . . .	20	7,01	10,50	17,51	0,00	0,00	4,80	48,1	57,5
Aprile . . .	20	11,90	10,30	22,20	0,00	0,00	5,55	114,8	63,5
Maggio. . .	21	11,91	20,38	32,29	0,00	0,00	6,14	114,6	80,0
Giugno. . .	28	11,89	19,04	30,93	0,00	0,00	7,14	138,2	86,1
Luglio . . .	31	14,90	13,68	28,58	0,00	0,00	7,06	125,6	63,9
Agosto . . .	31	7,74	16,65	24,39	0,00	0,00	5,74	93,6	121,5
Settembre .	27	7,85	17,89	25,74	0,00	0,00	6,44	35,9	108,5
Ottobre . .	20	10,45	11,10	21,55	0,00	0,00	4,50	95,3	69,3
Novembre .	25	6,96	10,16	17,12	0,00	0,00	4,60	39,7	82,8
Dicembre .	21	8,62	10,24	18,86	0,00	0,00	4,48	61,9	82,2

« Dal Settembre 1891 la frequenza dei giorni senza macchie e senza fori si mantenne a zero fino alla fine del 1894, e di là incominciò il periodo di grande attività nella fotosfera, che si estese fino al Luglio dell'anno ultimo e si può ritenere che il massimo sia avvenuto intorno alla metà del 1893. Il fatto singolare avvertito in quest'ultimi anni, fu la mancanza di fenomeni straordinarî nella cromosfera al posto delle macchie, quando venivano osservate al loro nascere o tramontare ».

Matematica. — *Il metodo di Riemann esteso alla integrazione della equazione*: $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \mathrm{M}u$. Nota del Socio Luigi Bianchi.

« Il metodo tanto notevole di Riemann per la integrazione della equazione lineare a derivate parziali del 2° ordine del tipo iperbolico:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

è stato ripreso e sviluppato da Du Bois Reymond (1) e da Darboux (2).

(1) Cf. specialmente l'ultima Memoria : *Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Crelle's Journal Bd. 104.

(2) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. T. II, Chap. IV.

Un importante complemento ha poi ricevuto questo metodo dalle recenti e fondamentali ricerche di Picard sul processo delle approssimazioni successive [1]. Potendosi infatti così dimostrare a priori l'esistenza di una soluzione che soddisfà alle date condizioni ai limiti, in particolare di quella che chiamerò con Du-Bois Reymond la *soluzione principale* (Hauptintegral) della equazione aggiunta, ne risulta *l'unicità* della soluzione *regolare* cercata.

« Il metodo stesso si può, almeno in certi casi, estendere ad un numero maggiore di variabili e ad equazioni di ordine superiore. Un primo tentativo in questa via è stato fatto ultimamente da Volterra per certe equazioni del 2° ordine a tre variabili [2]. Nella presente Nota io estendo il metodo di Riemann alla equazione dell'n^{mo} ordine a n variabili:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_n} = \mathrm{M}u\,, \tag{1}$$

dove **M** denota una funzione *data* delle n variabili indipendenti x_1, $x_2 \dots x_n$. A problema fondamentale si può qui porre quello di determinare una soluzione della (1) che soddisfi alle condizioni iniziali:

$$\begin{array}{ll} u = f_1(x_2\,, x_3\,, \dots x_n) & \text{per } x_1 = a_1 \\ u = f_2(x_1\,, x_3\,, \dots x_n) & \quad\text{"}\quad x_2 = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ u = f_n(x_1\,, x_2\,, \dots x_{n-1}) & \quad\text{"}\quad x_n = a_n\,, \end{array}$$

denotando f_i una funzione arbitraria delle n—1 variabili $x_1\, x_2 \dots x_{i-1}\, x_{i+1} \dots x_n$ ed essendo a_1, $a_2 \dots a_n$, n costanti. Dimostrata dapprima, col metodo delle approssimazioni successive, l'esistenza della soluzione cercata, applico poi il metodo di Riemann, mediante il quale il valore di u in un punto qualunque $(b_1\, b_2 \dots b_n)$ si può calcolare quando della equazione aggiunta

$$\frac{\partial^n v}{\partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_n} = (-1)^n\, \mathrm{M}v$$

sia trovata la *soluzione principale* relativa al detto punto. Similmente, nota la detta soluzione principale, si potrà calcolare il valore di u in $(b_1\, b_2 \dots b_n)$, quando lungo un' ipersuperficie

$$\varphi\,(x_1\, x_2 \dots x_n) = 0$$

siano dati i valori di u ed, in modo compatibile, quelli delle successive derivate fino alle $(n-1)^{me}$. Per tal modo viene anche dimostrata l'unicità della soluzione, che soddisfa alle date condizioni ai limiti.

(1) *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*. Journal de Mathém. 1890.

(2) *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*. Acta Mathematica. Bd. 18, pag. 161.

« Un caso particolare notevole, in cui la soluzione principale si può subito determinare è quello in cui $M = 1$. Allora, posto

$$\tau = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \dots (x_n - a_n),$$

nella trascendente intera

$$J(\tau) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\tau^r}{2^n . 3^n \dots r^n}$$

si ha appunto la soluzione principale relativa al punto $(a_1\, a_2 \dots a_n)$.

§ 1.

« Per semplicità delle formole, ci limiteremo a sviluppare i calcoli nel caso $n = 3$, scrivendo l'equazione fondamentale:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = Mu. \tag{2}$$

« Interpretando x, y, z come coordinate Cartesiane ortogonali, supponiamo che entro il parallelepipedo limitato dai sei piani

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c,$$

la funzione M di x, y, z sia finita e continua e si abbia costantemente

$$|M| < K,$$

essendo K un numero positivo fisso. Si cerca una soluzione *regolare* [1] u della (2) che soddisfi alle condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u &= f_1(y, z) \text{ per } x = 0 \\ u &= f_2(x, z) \quad \text{»} \quad y = 0 \\ u &= f_3(x, y) \quad \text{»} \quad z = 0. \end{aligned}$$

« Le tre funzioni arbitrarie f_1, f_2, f_3 si suppongono soltanto finite e continue, entro il parallelepipedo indicato insieme colle derivate parziali prime e la derivata seconda mista. Inoltre si deve supporre naturalmente

$$f_1(0, z) = f_2(0, z), \quad f_2(x, 0) = f_3(x, 0), \quad f_3(0, y) = f_1(y, 0)$$

e però

$$f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = f_3(0, 0).$$

« Col metodo delle approssimazioni successive, costruiamo dapprima la soluzione u_0 della equazione

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0,$$

[1] Per soluzione regolare intendiamo qui una soluzione che nel campo considerato sia finita e continua insieme alle derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$$

che soddisfi alle condizioni iniziali imposte alla u; essa è data da:

(3) $$u_0 = f_1(y,z) + f_2(x,z) + f_3(x,y) - f_1(y,0) - f_2(0,z) - f_3(x,0) + f_1(0,0).$$

« Indi determiniamo la soluzione u_1 della equazione

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \mathrm{M}u_0,$$

che si annulli sui piani coordinati, dovremo prendere per ciò:

$$u_1 = \int_0^x \int_0^y \int_0^z \mathrm{M}u_0\,dx\,dy\,dz.$$

Similmente procedendo, poniamo,

$$u_2 = \int_0^x \int_0^y \int_0^z \mathrm{M}u_1\,dx\,dy\,dz,$$

$$u_3 = \int_0^x \int_0^y \int^z \mathrm{M}u_2\,dx\,dy\,dz,$$

e in generale

$$u_n = \int_0^x \int_0^y \int_0^z \mathrm{M}u_{n-1}\,dx\,dy\,dz.$$

Asseriamo che: *la serie*

(4) $$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

converge in egual grado entro il parallelepipedo considerato e rappresenta la soluzione cercata.

« Basterà rapidamente accennare la dimostrazione di un tipo ben noto. Indicando con L il massimo di u_0 entro il parallelepipedo, risulta

$$|u_1| < \mathrm{KL}\,|xyz|$$

e però

$$|u_2| < \mathrm{K}^2\,\mathrm{L}\int_0^{|x|} \int_0^{|y|} \int_0^{|z|} xyz\,dx\,dy\,dz,$$

cioè

$$|u_2| < \mathrm{K}^2\mathrm{L}\,\frac{|xyz|^2}{2^3}.$$

Similmente

$$|u_3| < \mathrm{K}^3\mathrm{L}\,\frac{|xyz|^3}{2^3.\,3^8}$$

e in generale

$$|u_n| < \mathrm{K}^n\mathrm{L}\,\frac{|xyz|^n}{2^3.\,3^3 \ldots n^3}.$$

Se si pone adunque

$$K|xyz| = \xi ,$$

paragonando la serie (4) colla serie assolutamente convergente

$$\xi + \frac{\xi^2}{2^3} + \frac{\xi^3}{2^3 . 3^3} + \cdots + \frac{\xi^n}{2^3 . 3^3 \ldots n^3} + \cdots ,$$

risulta la verità della nostra asserzione.

§ 2.

« Un altro caso importante, ove si può dimostrare l'esistenza della soluzione, è quello in cui le condizioni ai limiti siano invece le seguenti. Sopra un pezzo di superficie Σ, la cui proiezione sopra ciascuno dei piani coordinati ricuopre una sola volta l'area corrispondente, siano dati i valori di u ed *in modo compatibile* quelli delle derivate prime e seconde. Per ciò basterà dare sopra Σ i valori di

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$$

p. e. in funzione di x, y e le altre derivate prime e seconde ne risulteranno determinate. Se ci limitiamo a considerare una regione dello spazio, per la quale ogni parallela ad uno degli assi che la attraversi incontri effettivamente Σ in un punto, per un punto qualunque $P \equiv (x, y, z)$ di questa regione conducendo i tre piani paralleli ai piani coordinati formeremo un tetraedro T a base curva limitato dai tre piani condotti e da Σ.

« Adoperiamo nuovamente il metodo delle approssimazioni successive, prendendo per u_0 quella soluzione della equazione

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z} = 0$$

che soddisfa alle condizioni iniziali assegnate. Se costruiamo la serie di funzioni

$$u_1 = \iiint_T M u_0 \, dx \, dy \, dz$$

$$u_2 = \iiint_T M u_1 \, dx \, dy \, dz$$

. . . .

$$u_n = \iiint_T M u_{n-1} \, dx \, dy \, dz$$

. . . . ,

gli integrali tripli essendo estesi al tetraedro T sopra definito, ciascuna funzione u_n si annullerà sopra Σ insieme colle derivate

$$\frac{\partial u_n}{\partial x},\ \frac{\partial u_n}{\partial y},\ \frac{\partial u_n}{\partial z},\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial z},\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial y\,\partial z}$$

e soddisferà alla equazione

$$\frac{\partial^3 u_n}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \mathrm{M} u_{n-1}\,.$$

« Dopo ciò si vedrà che: *la serie*

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

converge in egual grado entro la regione considerata e rappresenta la soluzione cercata.

« In analogia col caso delle due variabili (Picard, l. c., pag. 26) osserviamo che la soluzione così costruita esiste dalle due parti di Σ e resta continua, insieme colle derivate parziali prime e seconde, attraversando Σ.

§ 3.

« Veniamo ora alla estensione del metodo di Riemann. Essendo v una soluzione della equazione aggiunta

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \mathrm{M}v = 0\,,$$

avremo identicamente per qualsiasi funzione u:

$$3v\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - \mathrm{M}u\right) = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\,, \tag{5}$$

dove X, Y, Z sono espressioni lineari omogenee in u, v e nelle loro derivate della forma seguente:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= v\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}\\
\mathrm{Y} &= v\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}\\
\mathrm{Z} &= v\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\,.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

« Ora se S è una regione finita qualunque di spazio ove u, v sono finite e continue insieme colle derivate prime e seconde (miste) e Σ è la superficie contorno, si ha la nota formola:

$$\text{(A)}\quad \iiint_{\mathrm{S}} \left\{\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\right\} dx\,dy\,dz = -\iint_{\Sigma} \left\{\mathrm{X}\cos\widehat{nx} + \mathrm{Y}\cos\widehat{ny} + \mathrm{Z}\cos\widehat{nz}\right\},$$

dove $\widehat{nx}$, $\widehat{ny}$, $\widehat{nz}$ indicano gli angoli che la direzione della normale a Σ verso l' interno di S forma colle direzioni positive degli assi coordinati.

« Applichiamo la (A) al problema del n. 1, ove si tratta di calcolare il valore di una soluzione regolare u della (2) in un punto qualsiasi

$$P \equiv (x_0\, y_0\, z_0)$$

mediante i valori

$$f_1(y, z)\,,\quad f_2(x, z)\,,\quad f_3(x, y)\,,$$

che la funzione u assume sui piani coordinati. Conducendo per P i piani paralleli ai piani coordinati formiamo il parallelepipedo racchiuso dai piani

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

ed applichiamo a questo spazio S la formola (A). Il primo membro della (A) si annulla, perchè $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$ a causa della (5), e separando gli integrali doppî del secondo membro in due terne estesi rispettivamente alle tre faccie, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e alle loro parallele $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, avremo:

$$(6) \qquad \iint\limits_{(x=x_0)} X\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=y_0)} Y\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=z_0)} Z\,dx\,dy = \iint\limits_{(x=0)} X\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=0)} Y\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=0)} Z\,dx\,dy.$$ [1]

« Il secondo membro, una volta fissato il moltiplicatore v, è evidentemente calcolabile pei valori dati di u sui piani coordinati. Ora prendiamo il moltiplicatore v in guisa che si riduca eguale all'unità sulle tre faccie $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Una tale soluzione v della equazione aggiunta, la cui esistenza segue dal risultato generale del N. 1, si dirà: *la soluzione principale della equazione aggiunta relativa al punto* $P \equiv (x_0\, y_0\, z_0)$. Il primo membro della (b) diventa allora:

$$\iint\limits_{(x=x_0)} X\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=y_0)} Y\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=z_0)} Z\,dx\,dy$$

e il suo valore calcolato è quindi:

$$3u(x_0\,, y_0\,, z_0) + u(x_0\,, 0, 0) + u(0, y_0\,, 0) + u(0, 0, z_0)$$
$$- 2 \left\{ u(x_0\,, y_0\,, 0) + u(x_0\,, 0, z_0) + u(0, y_0\,, z_0) \right\}.$$

(1) Colla notazione $\iint\limits_{(x=x_0)}$ ecc. indichiamo che l'integrale doppio è esteso alla faccia $x = x_0$ del parallelepipedo ecc.

« Così abbiamo già la formola domandata; ma si può ulteriormente semplificare il secondo membro, scrivendo:

$$X = \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y\, \partial z} - \frac{3}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{3}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}$$

e analogamente per Y, Z. Allora se si osserva che si ha:

$$\iint\limits_{(x=0)} \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz = (uv)_0 {}^{(1)} + u(0, y_0, z_0) - u(0, y_0, 0) - u(0, 0, z_0)$$

e analogamente per gli altri due integrali, ne risulterà la formola definitiva:

$$\text{(B)} \quad u(x_0, y_0, z_0) = (uv)_0 + \Big\{ u(x_0, y_0, 0) + u(x_0, 0, z_0) + u(0, y_0, z_0) \Big\} -$$
$$- \Big\{ u(x_0, 0, 0) + u(0, y_0, 0) + u(0, 0, z_0) \Big\} -$$
$$- \frac{1}{2} \iint\limits_{(x=0)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dy\, dz - \frac{1}{2} \iint\limits_{(y=0)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx\, dz$$
$$- \frac{1}{2} \iint\limits_{(z=0)} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx\, dy.$$

« Questa formola (B) ci dà appunto il valore di u in $P \equiv (x_0\, y_0\, z_0)$ per mezzo dei valori dati di f_1, f_2, f_3.

« Una conseguenza immediata ed importante della (B) è la seguente. Se la soluzione regolare u si annulla sui piani coordinati è nulla dovunque, perchè il 2° membro della (B) è allora nullo. Ne segue l'importante teorema di unicità:

« *Una soluzione regolare* u *della equazione*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = Mu$$

è perfettamente individuata dai valori che assume sui piani coordinati.

« È bene applicare la (B) al caso particolare in cui u sia la soluzione principale della equazione $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = Mu$ relativa all'origine; otteniamo allora semplicemente

$$u(x_0, y_0, z_0) = v(0, 0, 0),$$

formola che stabilisce una sorta di reciprocità fra le soluzioni principali della equazione data e della aggiunta, affatto analoga a quella osservata da Darboux nel caso $n = 2$ (l. c. pag. 81).

(1) Con $(uv)_0$ indichiamo il valore di uv nell'origine.

§ 4.

« Con eguale successo si può trattare il problema del N. 2 ed esprimere il valore di u in ogni punto della regione ivi considerata per mezzo dei valori dati per u e per le derivate sopra Σ, quando pel detto punto si sappia determinare la soluzione principale della equazione aggiunta. Se si costruisce infatti per un punto $P \equiv (x_0\, y_0\, z_0)$ il tetraedro P A B C di cui è parola al § 2 e si suppone, per fissare le idee, che il tetraedro giaccia dalla parte positiva di ciascuna delle tre faccie piane, la formola (A) ci darà:

$$\iint_{PBC} X\, dy\, dz + \iint_{PAC} Y\, dx\, dz + \iint_{PAB} Z\, dx\, dy =$$

$$= -\iint_{\Sigma} \left(X \cos \widehat{nx} + Y \cos \widehat{ny} + Z \cos \widehat{nz} \right) d\sigma$$

Se per v si prende nuovamente la soluzione principale della equazione aggiunta relativa al punto P, la somma del 1° membro si riduce a (1)

$$3u_P - (u_A + u_B + u_C)$$

aumentato di un integrale curvilineo esteso al perimetro del triangolo ABC.

« In questa parte e nel secondo membro figurano soltanto i valori noti di u e delle derivate sopra Σ; la formola che così otteniamo risolve dunque il problema. Di qui risulta: *Le condizioni ai limiti del N. 2 individuano la soluzione regolare* u *corrispondente.*

§ 5.

« In ciò che precede mi sono limitato, per brevità della esposizione, al caso di tre variabili ($n = 3$). Ma come già si è detto il processo delle approssimazioni successive, come pure il metodo di Riemann è ancora applicabile al caso generale della equazione:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n} = Mu.$$

Non vi è difficoltà alcuna a constatare la verità della prima affermazione. Quanto alla seconda basterà osservare che se v è una soluzione della equazione aggiunta:

$$\frac{\partial^n v}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n} = (-1)^n . Mv ,$$

(1) Con u_p indichiamo il valore di u in P ecc.

si avrà identicamente qualunque sia u:

$$nv\left(\frac{\partial^n u}{\partial x_1\,\partial x_2 \dots \partial x_n} - \mathrm{M}u\right) = \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \mathrm{X}_n}{\partial x_n},$$

dove X_1, X_2, $\mathrm{X}_3 \dots \mathrm{X}_n$ sono espressioni lineari nelle derivate miste di u, v fino alle $(n-1)^{\mathrm{me}}$. Così si ha:

$$\mathrm{X}_1 = v\,\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_2\,\partial x_3 \dots \partial x_n} - \frac{1}{n-1}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\,\frac{\partial^{n-2} u}{\partial x_3\,\partial x_4 \dots \partial x_n} + \dots\right) +$$

$$+ \frac{1.2}{(n-1)(n-2)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_3}\,\frac{\partial^{n-3} u}{\partial x_4 \dots \partial x_n} + \dots\right) -$$

$$- \frac{1.2.3}{(n-1)(n-2)(n-3)}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_4} \cdot \frac{\partial^{n-4} u}{\partial x_4 \dots \partial x_n} + \dots\right) +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + (-1)^{n-1} u\,\frac{\partial^{n-1} v}{\partial x_2\,\partial x_3 \dots \partial x_n},$$

in ogni termine fra parentesi deducendosi i varî termini dal primo scritto con permutazioni di indici. Basterà allora applicare la nota estensione della (A) allo spazio di n dimensioni.

« Terminiamo coll'osservare che nel caso $\mathrm{M} = 1$ possiamo subito determinare la soluzione principale della equazione

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1\,\partial x_2 \dots \partial x_n} = \mathrm{M}u$$

relativa al punto $(a_1\, a_2 \dots a_n)$. Se poniamo infatti

$$\tau = (x_1 - a_1)\,(x_2 - a_2) \dots (x_n - a_n)$$

è facile trovare una trascendente intera in τ:

$$\mathrm{J}(\tau) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} c_r\, \tau^r$$

che coincide appunto colla soluzione principale. Osservando che $\frac{\partial \tau}{\partial x_i} = \frac{\tau}{x_i}$ ed esprimendo che

$$\frac{\partial^n \mathrm{J}}{\partial x_1\,\partial x_2 \dots \partial x_n} = \mathrm{J},$$

troviamo:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} r^n\, c_r\, \tau^{r-1} = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} c_r \tau^r,$$

onde:

$$c_1 = 1\,, \quad c_2 = \frac{1}{2^n}\,, \quad c_3 = \frac{1}{2^n.\,3^n} \dots c_r = \frac{1}{2^n.\,3^n \dots\dots r^n}\,.$$

« La trascendente intera

$$\mathrm{J}(\tau) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\tau^r}{2^n.\,3^n \dots r^n}$$

e adunque la soluzione principale. Così abbiamo ottenuto l'estensione ad n qualunque del risultato conseguito per primo da Du-Bois Reymond (l. c., pag. 296) per $n=2$, ove ponendo

$$\tau = -\frac{x^2}{2},$$

la $J(\tau)$ si muta nella prima funzione di Bessel $j_0(x)$.

Osservazione

« Il metodo delle approssimazioni successive, come è adoperato ai N. 1, 2, sarebbe egualmente applicabile alla equazione più generale:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} + Mu,$$

i coefficienti $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, M essendo funzioni finite e continue di x, y, z. Lo stesso dicasi della corrispondente generalizzazione alle n variabili. Al contrario il metodo di Riemann sembra riuscire soltanto in casi particolari, dei quali il più semplice è stato sopra considerato ».

Matematica. — *Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Scopo di questa Nota è di portare un primo contributo a una teoria, che potrei chiamare *geometrica*, delle *equazioni differenziali lineari;* di mostrare cioè in qual modo considerazioni geometriche semplicissime possano condurre a risultati interessanti per un ramo così importante dell'Analisi moderna. Non sono, in gran parte almeno, risultati nuovi quelli che ora ottengo; ma la novità del metodo potrà forse invogliare qualcuno a continuare con me queste ricerche (1).

« L'idea prima di introdurre nello studio delle equazioni differenziali lineari quelle considerazioni geometriche di cui noi ci varremo, sembra dovuta ad Halphen (*Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires;* Mém. Sav. Etr.; vol. 28; 1883/84), mentre a Laguerre (Compt. Rend.; 1879) e Brioschi (Bull. de la Soc. Math. de France; t. VII, 1879) spetterebbe di aver per la prima volta considerati gli *invarianti differen-*

(1) All'egr. prof. Klein, che qui mi è caro ringraziare nuovamente, vado debitore di avermi istradato su questa via.

ziali, dei quali lo stesso Halphen, anche in altri lavori su quest'argomento ([1]), ha fatto ampiamente uso (ma ai quali noi non ricorreremo). — Sia

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_{n-1} y' + A_n y = 0$$

un'equazione differenziale lineare (omogenea) di ordine $n \geq 3$, nella quale y è la variabile dipendente, e i coefficienti $A_1 \ldots.$ sono funzioni qualunque della variabile indipendente x, che si suppongono appartenere a un determinato campo di razionalità (*Rationalitätsbereich*). Indichiamo con $y_1, y_2, \ldots. y_n$ un sistema di integrali (soluzioni) *indipendenti* dell'equazione proposta (non legati dunque da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti), e interpretiamo queste stesse y_i come coordinate projettive omogenee di punti (y) in uno spazio S_{n-1}. Al variare della x varieranno, in generale, anche le $y_1, y_2, \ldots y_n$, e il punto (y) descriverà una certa curva Γ (appartenente allo spazio S_{n-1}) che Halphen ha chiamata *Courbe attachée* all'equazione differenziale ([2]). Questa curva, per il modo stesso in cui fu definita, non si altera se alla variabile indipendente x se ne sostituisce un'altra z, comunque legata con essa; e nemmeno se gli integrali y_i vengon tutti moltiplicati (o divisi) per uno stesso fattore, funzione di detta variabile; essa ha dunque carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni:

$$z = f(x) \qquad y = \varphi(x) \,.\, v$$ ([3])

e si può quindi considerare come *attachée* a un'intera classe di equazioni differenziali lineari, deducibili l'una dall'altra con trasformazioni del tipo accennato ([4]) ([5]).

« Le y_i non sono però, in generale, funzioni univoche della x; ma, per uno stesso valore di questa, esse potranno assumere più, e fors'anche infiniti

([1]) Ad es. nella Mem.: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du 4ème ordre;* Acta Math., vol. III.

([2]) Halphen limita bensì questa considerazione ai casi di $n = 3$ e $n = 4$ (quindi $n - 1 \leq 3$); ma dice egli stesso che al di là del 4° ordine « *si l'image géométrique fait défaut, l'objet ne subsiste pas moins* ».

([3]) È appunto per avere l'invariantività rispetto a queste trasformazioni, che conviene interpretare le y_i come coordinate *omogenee*.

([4]) Se si trattasse però di equazioni differenziali di 2° ordine ($n = 2$), sarebbe facile verificare che con trasformazioni di questo tipo si può passare da una qualunque di esse a ogni altra. Volendo quindi studiare proprietà invariantive di queste equazioni rispetto a certe trasformazioni, conviene limitare maggiormente la cerchia di queste ultime (fissandosi ad es., nel caso dei coefficienti razionali, sulle sole sostituzioni lineari di x).

([5]) È facile verificare che le coordinate di un iperpiano (S_{n-2}) variabile osculatore alla curva Γ soddisfanno all'*equazione differenziale aggiunta* di Lagrange:

$$y^{(n)} - (A_1 y)^{(n-1)} + (A_2 y)^{(n-2)} - \ldots. + (-1)^n A_n y = 0 ;$$

mentre le coordinate di una tangente, di un piano, o in generale di un S_k osculatore ($k \leq n - 3$) soddisfanno rispettivamente alle diverse *equazioni differenziali associate* di Forsyth (Phil. Trans.; vol. CLXXIX; cfr. anche: Craig, *A treatise on linear differential equations*; New-York, 1889).

valori, tutti esprimibili però come combinazioni lineari dei loro valori primitivi. Più chiara riesce la cosa se immaginiamo distesa la variabile x su di una superficie (*piano, superficie di Riemann*, ...) sulla quale risultino funzioni univoche i singoli coefficienti $A_1, \ldots$; allora ad ogni cammino chiuso sopra questa superficie corrisponderà una certa sostituzione lineare a coefficienti costanti $y_i^{(1)} = \sum_k a_{ik} y_k$, per modo che, quando x descrive questo cammino ritornando al punto di partenza, le y_i, anzichè riprodursi tali e quali, daranno luogo alle $y_i^{(1)}$ così definite (ma che potrebbero, in particolare, coincidere con esse). All'insieme di tutti i cammini chiusi che su quella superficie si possono tracciare, corrisponderà un certo *gruppo* di sostituzioni lineari delle y_i; gruppo che potrà essere finito o infinito, ma sarà certo *discontinuo*, e risulterà dalle possibili combinazioni di un certo numero di operazioni fondamentali (operazioni *generatrici*). A questo gruppo Hermite ha dato il nome di *gruppo monodromico* dell'equazione differenziale (1). — Ma, interpretata geometricamente, una sostituzione lineare delle y_i dà luogo a una collineazione nello spazio S_{n-1}; e siccome qui si tratta di sostituzioni che mutano ogni gruppo di valori delle funzioni $y_i(x)$ in un punto dato x in un altro gruppo di valori che le stesse funzioni possono assumere in questo punto (2), avremo a che fare in sostanza con *un gruppo discontinuo di collineazioni dello spazio* S_{n-1}, *che trasformano in sè stessa la curva* Γ ATTACHÉE *all'equazione differenziale proposta* (3).

(1) Dalla considerazione di questo gruppo Riemann avrebbe voluto appunto prender le mosse, per costruire una teoria generale delle equazioni differenziali lineari. E questa sembra che dovesse essere la seconda parte del suo Programma colossale nella teoria delle funzioni, mirando egli forse a dare nella teoria delle equazioni differenziali lineari una sorella alla teoria delle funzioni Abeliane. Ma di lui non abbiamo, in quella teoria, che la Memoria: *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen* (Ges. Werke, 2ª ed., IV), e il frammento (ibid. XXI): *Zwei allgemeine Lehrsätze* .... Anche qui la difficoltà maggiore sta nei *teoremi di esistenza*. Nel solo caso più semplice della *funzione ipergeometrica* (considerata appunto da Riemann) la dimostrazione relativa fu data recentemente dallo Schilling (Math. Ann., vol. XLIV; e altro lavoro che escirà fra breve).

(2) Più brevemente, possiamo dire che ogni *ramo* (*Zweig*) di una funzione $y(x)$ vien mutato in un altro *ramo* di questa stessa funzione.

(3) Da ciò la ragione del nome di *projectiv-periodische Curven* (curve *projettivamente periodiche*?) che il Klein proponeva di dare a queste curve. Una specie di periodicità si presenta infatti corrispondentemente ai cammini chiusi della x testè considerati. Così p. e. la *sinussoide* (rappresentata sotto la forma $y = a r \operatorname{sen} x$) sarebbe una curva *additivamente periodica;* e in modo analogo si potrebbero anche immaginare curve *moltiplicativamente periodiche*. — Ricerche su queste curve *projettivamente periodiche* non ne furono fatte ancora; ma ad esse si potrebbero applicare ricerche analitiche già condotte a buon punto; p. e. quelle sugli integrali delle soluzioni y $(\int y_i dx)$, che corrisponderebbero a ciò che gli integrali Abeliani sono per le curve algebriche. Già Abel aveva considerati questi integrali (Oeuvr., t. II, p. 54-65), e aveva dato per essi un teorema analogo a quello sullo

« La considerazione di questo *gruppo di trasformazioni projettive* è appunto fondamentale per il nuovo campo di ricerche del quale mi sono proposto di dare un saggio. Lo studio geometrico di queste curve Γ non può non esser fecondo di risultati per la teoria delle equazioni differenziali lineari.

« 2. La questione particolare della quale vogliamo qui occuparci fu posta per la prima volta dal sig. Fuchs, che in una breve Nota inserta nei Berl. Ber. (8 giugno 1892), e più diffusamente nella Memoria: *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen* ..... (Acta Math., vol. I) già la risolse per il caso delle equazioni differenziali di 3° ordine. E si tratta precisamente di indagare, per quanto possibile, la natura degli integrali di una data equazione differenziale lineare, nell'ipotesi che un sistema di soluzioni indipendenti di detta equazione soddisfacciano a una o più date equazioni algebriche (omogenee, a coefficienti costanti, e quindi di grado superiore al primo). Questo caso comprende naturalmente quello in cui gli integrali in discorso sono essi stessi funzioni algebriche della variabile indipendente x. Geometricamente, ciò vuol dire che la curva Γ dianzi considerata si suppone *a priori* contenuta in una certa varietà algebrica dello spazio S_{n-1} [1]; o, in particolare, si suppone essa stessa una curva algebrica, e ciò nel caso che le equazioni algebriche date siano tali da definire una curva nello spazio S_{n-1} delle coordinate omogenee y_i [2]. Potrebbe bensì Γ essere soltanto *una parte*

---

scambio di argomenti e parametri negli integrali Abeliani di 3ª specie. Jacobi (Journ. de Crelle, t. 32) diede alla dimostrazione di Abel forma più chiara, e ulteriori miglioramenti vi introdusse più tardi Frobenius (ibid. t. LXXVIII), mentre poco prima Fuchs (ibid. t. LXXVI) aveva proseguite le ricerche su quegli stessi integrali (giovandosi dei nuovi risultati che da Abel in poi si erano ottenuti nella teoria delle funzioni). E lo stesso Fuchs si occupò anche (ibid. t. LXXXIX, e Berl Ber., dic. 1892) delle funzioni in certo qual modo *inverse* di questi integrali (e definite precisamente in modo analogo alle funzioni Abeliane).

(1) Varietà che dovrà essere trasformata in sè stessa da tutte le collineazioni contenute nel gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta, perchè appunto le y_i, pur sostituendosi linearmente in modo corrispondente, devono sempre soddisfare alle equazioni algebriche date. La questione si collega quindi intimamente collo studio delle *Varietà algebriche di uno spazio qualunque, che ammettono un dato gruppo di trasformazioni projettive*. — Il gruppo di *tutte* le trasformazioni projettive (o sostituzioni lineari) che mutano in sè stessa la varietà algebrica in discorso dovrà contenere come sottogruppo il *Gruppo di razionalità* (*Rationalitätsgruppe*, secondo F. Klein) considerato dai sigg. Picard e Vessiot (Ann. de Toulouse, 1887; Ann. de l'Ec. Norm, 1892), oppure coinciderà addirittura con esso.

(2) Non è però esatto, come più o meno tacitamente supposero i diversi Analisti che di tale questione si occuparono, che questo caso si presenti sempre e solo quando le equazioni date sieno in numero di $n-2$ (n essendo l'ordine dell'equazione differenziale). Infatti $n-2$ equazioni algebriche (distinte) fra le coordinate di un punto variabile in uno spazio S_{n-1} potrebbero benissimo non definire una curva, ma solo una varietà due o più volte infinita, mentre d'altra parte vi sono anche curve dello spazio S_{n-1} che non si possono rappresentare col detto numero di equazioni (ma solo con un numero maggiore).

di quest'ultima curva; ma anche allora sarebbe egualmente curva algebrica, perchè analiticamente separabile dalla curva complessiva, che è appunto algebrica (e sarebbe in tal caso *riduttibile*).

« Noi ci occuperemo precisamente di quest'ultimo caso (del caso cioè in cui la curva Γ è algebrica). Per questo caso, le ricerche del sig. Fuchs sulle equazioni differenziali di 3° ordine furono estese, seguendo lo stesso suo metodo, da Ludwig Schlesinger (Diss. Berlin, 1887) alle equazioni di 4° ordine (¹), mentre altri ancora hanno trattata la stessa questione servendosi degli *invarianti differenziali*, che, dopo gli ultimi risultati ottenuti da Forsyth (Phil. Trans., vol. CLXXIX) e Brioschi (Acta Math., vol. XIV) si sono dimostrati (più ancora di prima) ottimo strumento di ricerca. In particolare, Lipm. Schlesinger (Diss. Berlin, 1888) ha trattato nuovamente il caso delle equazioni differenziali di 3° ordine; M. Meyer (Diss. Berlin, 1893), quello delle equazioni di 4° ordine; e infine Wallenberg (Journ. de Crelle, t. CXIII) ha estesa la ricerca a equazioni differenziali di ordine qualunque (²).

« 3. In queste ricerche è però opportuno introdurre qualche particolare ipotesi sui coefficienti dell'equazione differenziale proposta e sul comportamento dei diversi integrali nei relativi *punti singolari*. Così p. e. nei lavori di Fuchs e dei suoi scolari si suppone quasi sempre di aver a che fare con equazioni di quella categoria, che lo stesso Fuchs ha caratterizzata nella sua Memoria prima sulle equazioni differenziali lineari (Journ. de Crelle; t. LXVI, p. 146, eq. (12)), e che da lui ha anzi preso il nome (*Fuchs'sche Klasse*). In particolare, queste equazioni hanno tutte i coefficienti *razionali* (³). E spesso si aggiunge anche l'ipotesi che siano razionali le radici di quelle equazioni relative ai diversi punti singolari, che Fuchs ha chiamate (Journ. de Crelle, t. LXVIII, p. 367) *determinirende Fundamentalgleichungen* (e che danno

(¹) Ludw. Schlesinger si è occupato però anche (fino a un certo punto) del caso in cui fra i *quattro* integrali y_i è data *una sola* equazione.

(²) Anche i Francesi si sono occupati di queste ricerche, almeno in qualche caso particolare (nel caso, soprattutto, in cui sono date fra le y_i equazioni di 2° grado); cfr. ad es. Goursat: Compt. Rend., t. XCVII, p. 31, e Bull. Soc. Math., t. XI (o anche Compt. Rend., t. C, p. 233, dove è studiato il caso di una curva tracciata sulla sviluppabile biquadratica circoscritta a una cubica sghemba); e così pure Halphen: Compt. Rend., t. CI. Halphen ha anche supposto, più generalmente, che un'espressione algebrica, intera, omogenea $f(y_1\ y_2, \ldots y_n)$ sia data solo come *funzione razionale della variabile* x, domandandosi qual partito si può trarre da una *data* equazione così fatta per l'integrazione dell'equazione differenziale proposta (cfr. la Mem. di lui nel Journ. de Liouville, s. 4ª, t. I; e anche: Brioschi, Ann. di Mat., s. 2ª, vol. XIII).

(³) E i loro integrali si comportano *regolarmente* nei punti singolari. Il caso in cui non tutti gli integrali hanno comportamento regolare in questi punti fu però studiato in particolare da Thomé (cfr. diverse Mem. nel Journ. de Crelle, t. LXXIV-XCV, riassunte nel t. XCVI).

gli esponenti a cui *appartengono* gli integrali fondamentali delle corrispondenti sostituzioni lineari) (1).

« Wallenberg suppone invece, da principio almeno, che l'equazione differenziale proposta abbia per coefficienti funzioni *algebriche* della x. Ma più tardi ricade egli pure nella *Fuchs'sche Klasse.*

« *Noi supporremo pure che i coefficienti* $A_1, A_2, \ldots$ *siano funzioni algebriche della variabile indipendente* x; ma preciseremo meglio la nostra ipotesi, intendendo che tutte queste funzioni appartengano a una stessa *Classe* nel senso di *Riemann*, siano cioè tutte *razionali sopra una stessa superficie di Riemann;* o, in altri termini, siano *funzioni razionali di uno stesso ente algebrico di genere qualunque* (2). Se in particolare questo genere è nullo, avremo il caso dei coefficienti razionali nel senso ordinario.

« In quest'ipotesi, il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta avrà per operazioni *generatrici* le sostituzioni lineari delle y_i che corrispondono: 1° ai giri intorno ai diversi punti singolari; 2° a quei certi cammini chiusi, fra loro irriducibili, che si possono tracciare sulla data superficie di Riemann *senza spezzarla* (che non si possono cioè restringere fino a ridursi a un punto solo — non singolare —, nel qual caso ad essi corrisponderebbe invece la pura sostituzione identica $y_i^{(1)} = y_i$). Questi cammini, in numero eguale al doppio del genere p della data superficie, possono ritenersi coincidenti con un sistema qualunque di $2p$ tagli, che rendano la superficie uniconnessa.

« Oltre a questo, ci converrà introdurre l'ipotesi, che nei *punti singolari* dell'equazione differenziale proposta (e non *potranno* essere che quelli in cui diventa infinito qualcuno dei coefficienti) (3) tutti gli integrali si comportino *regolarmente* (4) (diventino cioè finiti in ogni punto così fatto $x = a$, quando si moltiplichino per una potenza finita conveniente di $x - a$,— o per una potenza di $\frac{1}{x}$, se si tratta del punto $x = \infty$) (5).

« 4. Distingueremo due casi:

« *a*) La curva Γ *attachée* all'equazione differenziale proposta non ammette che un numero finito di trasformazioni projettive in sè stessa;

(1) Quegli integrali cioè che a queste sostituzioni (corrispondenti rispett. a giri intorno ai diversi punti singolari) fanno assumere forma canonica.

(2) Denominazione dovuta al Weierstrass (lezioni sulle funzioni Abeliane). Cfr. anche C. Segre, *Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Ann. di Mat.; s. 2a, vol. XXII, p. 71). — Possiamo anche dire, in un modo un po' diverso, studieremo *equazioni differenziali lineari sopra un dato ente algebrico.*

(3) Anzi, se $p > 0$, potrebbe anche darsi che l'equazione proposta non avesse affatto punti singolari.

(4) Cfr. le Mem. cit. di Fuchs, o anche Thomé: Journ. de Crelle, t. LXXV, p. 266.

(5) Con questo però non si esclude la presenza di termini *logaritmici* in qualcuna delle y_i fondamentali per una qualsiasi sostituzione del gruppo monodromico.

« *b*) La stessa curva ammette invece un numero infinito di tali trasformazioni.

« Il caso *a*) lo divideremo ancora in due:

« 1) Il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta è *finito* (non contiene cioè che un numero finito di operazioni);

« 2) Il gruppo monodromico anzidetto comprende un numero infinito di operazioni. Queste non potranno però dar luogo che a un numero finito di collineazioni nello spazio S_{n-1}; sicchè le y_i saranno bensì funzioni a infiniti valori, ma a questi non corrisponderà che un certo numero finito di valori dei loro mutui rapporti.

« Nel caso 1) le y_i sono funzioni che sulla data superficie di Riemann hanno comportamento ovunque regolare, e non possono assumere in un punto qualsiasi di questa che un certo numero finito k di valori distinti (1). Sono dunque funzioni *algebriche*, per quanto in generale non risultino funzioni razionali dello stesso ente algebrico primitivo (ma bensì di un nuovo ente, che si potrà mettere in corrispondenza (k, 1) col primo). In ogni modo, « *l'equazione proposta è integrabile algebricamente* » (2).

« Nel caso 2) si conclude in modo perfettamente analogo che le y_i devono essere ancora funzioni algebriche della variabile x, *a meno di uno stesso fattore*, che, sulla superficie di Riemann sulla quale le y_i risultano razionali, dovrà essere puramente *moltiplicativo*, e sarà quindi la funzione esponenziale di un integrale Abeliano. E anche analiticamente si giunge subito a quest'ultimo risultato, perchè, dovendo l'equazione proposta con una sostituzione $y = \varphi(x) . v$ trasformarsi in altra integrabile algebricamente, e quindi anche a coefficienti algebrici, ne viene di conseguenza che dovrà essere in particolare funzione algebrica il nuovo secondo coefficiente:

$$B_1 = n\frac{\varphi'}{\varphi} + A_1$$

(1) Resta dunque esclusa senz'altro, per questo caso, la presenza dei termini logaritmici di cui alla nota prec.

(2) Non sarà forse inutile ricordare a questo punto il legame intimo che passa fra le equazioni differenziali lineari di ordine n integrabili algebricamente, e *i gruppi discontinui finiti di sostituzioni lineari di n variabili;* e come (cfr. ad es.: Klein, *Einleitung in die höhere Geometrie*, II; Göttingen, 1893, p. 361) « a ogni gruppo discontinuo « finito di sostituzioni lineari corrisponda tutta una categoria di equazioni differenziali « lineari integrabli algebricamente ». Per lo studio di questi gruppi discontinui sono d'importanza capitale le ricerche di C. Jordan (Journ. de Crelle, t. LXXXIV, e Atti dell'Acc. di Napoli, vol. VIII, 1879-80), grazie alle quali è ormai esaurito anche il caso di *tre* variabili (mentre quello di *due* sole variabili, che era già noto precedentemente, conduce ai gruppi dei *corpi regolari*).

e quindi:

$$\varphi = e^{\frac{1}{n}\int(B_1 - A_1)dx}$$

« Del caso *b*), che dà luogo a considerazioni geometriche interessanti (per quanto semplicissime) sulle curve razionali di uno spazio qualunque, mi riservo occuparmi in altra Nota ».

Fisica-matematica. — *Sopra gli invarianti ortogonali di deformazione.* Nota di Carlo Somigliana, presentata dal Socio Beltrami.

I.

« In alcune *Note fisico-matematiche* pubblicate nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (T. III, 1889) il prof. Beltrami ha dimostrata l'importanza di certe espressioni, da lui chiamate *invarianti ortogonali di deformazione*, le quali godono la proprietà di mantenersi inalterate di forma per un cambiamento qualsiasi degli assi ortogonali di riferimento, oppure per una rotazione arbitraria intorno ad uno di essi, accompagnata, se vuolsi, da spostamenti che non mutino la direzione di questo asse. Conoscendo queste espressioni infatti si ha il modo di scrivere immediatamente la forma generale del potenziale di elasticità pei corpi isotropi e per quelli isotropi rispetto ad un asse (isotropia incompleta).

« Pei corpi i quali presentano uno o più assi di simmetria elastica, come i cristalli, il potenziale di elasticità risulta, di necessità, formato con espressioni che sono invariabili pel gruppo di sostituzioni che caratterizza la simmetria del corpo; ma finora non è stata fatta la ricerca diretta di queste espressioni, la cui conoscenza presenta gli stessi vantaggi di quella degli invarianti che si possono dire *isotropi*.

« In questa Nota io indico un procedimento assai semplice per la formazione degli invarianti di deformazione corrispondenti ad un asse di simmetria di periodo qualunque, ossia degli invarianti dei gruppi ciclici, che sono i gruppi fondamentali di ogni sorta di simmetria; e trovo che, per ogni valore del periodo n dell'asse, essi possono esprimersi razionalmente mediante otto invarianti linearmente indipendenti, di cui però sei sono tali per qualsiasi rotazione. Io chiamerò questi ultimi invarianti *di rotazione*, e gli altri invarianti *ciclici di periodo n*.

« In una Nota, che ha avuto l'onore dell'inserzione in questi Rendiconti [1], ho dimostrato che la legge di razionalità, per quanto concerne le

[1] Vol. III, 1° sem. 1894.

proprietà elastiche dei cristalli, è una conseguenza delle ipotesi fondamentali della teoria della elasticità. La verità di questa proposizione risulta immediatamente dalla forma degli invarianti ciclici di grado minimo, e si ottiene così una dimostrazione nuova e più semplice della legge suddetta.

« Un'altra deduzione interessante può esser fatta. Alcune recenti esperienze del sig. O. Thomson [1] sembrano aver resa necessaria una estensione della teoria classica della elasticità, che fu proposta pel caso della isotropia dal sig. W. Voigt [2], e che consiste nell'introdurre nella espressione del potenziale anche i termini di terzo ordine rispetto alle componenti di deformazione. Ora si può domandare se, con tale estensione, la legge di razionalità continui ad essere una conseguenza della forma del potenziale. Vedremo che ciò non è, poichè in tal caso è possibile l'esistenza di un asse di periodo *cinque*, distinto da un asse di isotropia.

« La teoria della elasticità, quando si assuma pel potenziale una espressione generale che contenga anche i termini di terzo grado, viene così a perdere il pregio notevole di comprendere tutti e soli i corpi cristallini, quali si presentano in natura e ad abbracciare anche corpi, la cui reale esistenza non sembra finora conforme alla esperienza.

« Questo fatto certamente non autorizza a respingere la proposta estensione, poichè noi possiamo sempre introdurre la legge di razionalità come un dato sperimentale; ma mi pare necessario il tenerne conto, almeno per avere un concetto esatto del valore della nuova teoria rispetto all'antica.

II.

« La sostituzione che serve a trasformare le sei componenti di deformazione, quando gli assi coordinati subiscono una rotazione di un angolo $\frac{2\pi}{n}$ intorno all'asse delle z, si può scrivere, come ho mostrato nella Nota sopra citata, nella forma seguente

$$(1)\quad \begin{aligned} x_x - y_y &= (x'_x - y'_y)\cos\tfrac{4\pi}{n} - x'_y \operatorname{sen}\tfrac{4\pi}{n} & \qquad y_z &= y'_z \cos\tfrac{2\pi}{n} + z'_x \operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{n} \\ x_y &= (x'_x - y'_y)\operatorname{sen}\tfrac{4\pi}{n} + x'_y \cos\tfrac{4\pi}{n} & z_x &= -y'_z \operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{n} + z'_x \cos\tfrac{2\pi}{n} \\ x_x + y_y &= x'_x + y'_y & z_z &= z'_z \end{aligned}$$

per cui se, per semplicità, si pone

$$(2)\quad \begin{aligned} x_x - y_y &= x & \qquad x_y &= y & \qquad x_x + y_z &= z \\ y_z &= u & z_x &= v & z_z &= w \end{aligned}$$

quelle formole si riassumono nelle seguenti

$$\begin{aligned} x + iy &= e^{\frac{4\pi}{n}}(x' + iy') & \qquad u + iv &= e^{\frac{-2\pi}{n}}(u' + iv') \\ z &= z' & w &= w' \end{aligned}$$

[1] Wied. Ann. Bd. 44, 1891.

[2] Nachrichten v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1893 e 1894.

ove $i = \sqrt{-1}$. Ora se una funzione razionale intera f delle sei componenti di deformazione rimane invariata di forma quando si fa la sostituzione (1), e si immaginano in essa sostituite le variabili x, y, z, u, v, w alle primitive, dovrà essere identicamente

$$f(x, y, z, u, v, w) = f(x', y', z', u', v', w')$$

quando si tenga conto delle (2). Ora notiamo che, essendo z e w già invarianti per se stesse, basterà, per la ricerca delle espressioni invariabili, che ci occupiamo di quelle che dipendono da x, y, u, v. Poniamo per questo

$$x + iy = Z \qquad u + iv = W$$
$$x - iy = Z_1 \qquad u - iv = W_1$$

e le (2) si potranno scrivere

$$(3) \qquad Z = e^{\frac{4\pi}{n}i} Z' \qquad W = e^{-\frac{2\pi}{n}i} W'$$
$$Z_1 = e^{-\frac{4\pi}{n}i} Z_1' \qquad W_1 = e^{\frac{2\pi}{n}i} W'_1$$

« Qualunque invariante $f(x, y, u, v)$ potrà essere trasformato in una funzione di Z, Z_1, W, W_1, per cui la quistione si riduce a trovare le espressioni razionali intere $F(Z, Z_1, W, W_1)$, per le quali in forza delle (3), si ha

$$(4) \qquad F(Z, Z_1, W, W_1) = F(Z', Z_1', W_1'. W_1')$$

« Ora la forma generale di queste espressioni è

$$(5) \qquad F = \Sigma . A_{pqrs} Z^p Z_1^q W^r W_1^s$$

ove le A_{pqrs} sono costanti; per le (3) avremo poi

$$F = \Sigma . A_{pqrs} Z'^p Z_1'^q W'^r W_1'^s e^{\frac{2\pi}{n} i (2p - 2q - r + s)}$$

e affinchè sia vera la relazione (4), tutti gli esponenziali dovranno avere il valore *uno*, ossia si dovrà avere

$$(6) \qquad \frac{2p - 2q - r + s}{n} = \text{numero intero.}$$

Reciprocamente, quando queste condizioni sono soddisfatte, ciascuno dei termini che compongono il secondo membro della (5) è per sè stesso un invariante. Dunque il problema della determinazione degli invarianti ciclici, di un dato periodo n, si riduce alla quistione aritmetica di trovare tutte le soluzioni intere dell'equazione (6).

« Indichiamo con k, λ, μ, ν quattro numeri interi arbitrarî, e poniamo

$$(7) \qquad p = kn + \lambda + \mu \qquad r = kn + 2\lambda + \nu$$
$$q = \mu \qquad s = \nu$$

« Di qui si ha

$$2p - 2q - r + s = kn$$
$$-p + q + r - s = \lambda$$

la prima delle quali relazioni ci dice che, scelti arbitrariamente i numeri k, λ, μ, ν, le (7) danno sempre una soluzione dell'equazione (6); e la seconda, insieme alle altre $\mu = q$, $\nu = s$, ci dimostra reciprocamente che, data una soluzione della (6), è sempre possibile determinare i numeri λ, μ, ν in modo che essa venga rappresentata dalle (7). Dunque queste formole ci danno la soluzione generale della equazione proposta.

« Esse però ci danno, oltre le soluzioni positive anche le negative; queste conducono ad invarianti fratti, i quali però risultano sempre il quoziente di due invarianti interi, come si vedrà da ciò che segue, e quindi non danno alcun risultato nuovo. A noi basta del resto conoscere gli invarianti interi e quindi supporremo i numeri arbitrarî scelti in modo che sia

$$(8) \qquad kn + \lambda + \mu \geq 0 \qquad\qquad kn + 2\lambda + \nu \geq 0$$
$$\mu \geq 0 \qquad\qquad \nu \geq 0$$

« In quanto al numero k potremo pure supporlo sempre positivo; difatti se certi valori p_0, q_0, r_0, s_0 soddisfanno la (6) per un valore negativo k_0 di k, è chiaro che i numeri q_0, p_0, s_0, r_0 soddisferanno la stessa equazione per $k = -k_0$, ed i due invarianti corrispondenti a queste due soluzioni saranno

$$Z^{p_0} Z_1^{q_0} W^{s_0} W_1^{r_0} = P + iQ \qquad\qquad Z^{q_0} Z_1^{p_0} W^{r_0} W_1^{s_0} = P - iQ\,;$$

quindi nei due casi troviamo gli stessi invarianti reali P, Q, che sono quelli che a noi interessano.

« Dunque possiamo concludere: l'espressione

$$(9) \qquad I = (ZW)^{kn} (ZW^2)^{\lambda} (ZZ_1)^{\mu} (WW_1)^{\nu}$$

qualunque siano i numeri k, λ, μ, ν dà sempre un invariante ciclico, generalmente complesso, di periodo n; inoltre qualunque invariante ciclico intero [1] si può ottenere da essa prendendo per k un numero positivo e per λ, μ, ν numeri che soddisfacciano alle condizioni (8), oppure formando una funzione razionale intera di tali espressioni e di z e w.

« Consideriamo ora gli invarianti reali che si possono ottenere dalla formola precedente e dapprima supponiamo $k = 0$. Allora il prodotto

$$R = (ZW^2)^{\lambda} (ZZ_1)^{\mu} (WW_1)^{\nu}$$

sarà invariante per qualsiasi valore di n, e siccome anche λ, μ, ν sono arbitrarî, ne segue che le tre espressioni

$$I = ZW^2 \qquad\qquad H = ZZ_1 \qquad\qquad J = WW_1$$

godranno della stessa proprietà, cioè saranno invarianti di *rotazione*. Gli ultimi due sono reali e si ha

$$H = x^2 + y^2 \qquad\qquad J = u^2 + v^2$$

[1] D'ora innanzi per invariante ciclico si intenderà sempre un invariante ciclico intero.

mentre **I** è complesso e dà origine a due invarianti reali di terzo grado

$$K = x(u^2 - v^2) - 2yuv$$

$$K' = y(u^2 - v^2) + 2xuv$$

« Fra questi quattro invarianti non può esistere alcuna relazione lineare; però se ne ha una non lineare

$$K^2 + K'^2 = KJ^2$$

che è assai facile verificare, osservando che

$$|I| = |ZW^2|$$

« Esprimendo R mediante gli invarianti di rotazione reali ora trovati, otteniamo

$$R = (K + i\,K')^{\lambda}\, H^{\mu}\, J^{\nu} \tag{10}$$

e per le condizioni (8), affinchè R sia intero non dovranno μ e ν essere negativi, ed inoltre per λ si dovrà avere

$$\lambda + \mu \geq 0 \qquad 2\lambda + \nu \geq 0$$

« Ora supponiamo λ negativo ed osserviamo che a cagione della identità

$$1 = (K^2 + K'^2)^{-\lambda}\, H^{\lambda}\, J^{2\lambda}$$

si può scrivere anche

$$R = (H - i\,K')^{-\lambda}\, H^{\lambda+\mu}\, J^{2\lambda+\nu} \tag{10'}$$

nella quale formola nessun esponente può essere negativo. Da queste due espressioni (10) (10′) segue che R e quindi qualunque invariante di rotazione, che non contenga z e w, è una funzione razionale intera dei quattro invarianti H, J, K, K′, fra i quali si ha la relazione

$$K^2 + K'^2 = HJ^2$$

« Gli invarianti di rotazione sono stati presi in considerazione dal prof. Beltrami nelle *Note* sopra citate, dove come invarianti fondamentali assume i seguenti

$$A = y_z^2 + z_x^2 \qquad B = x_x\, y_y - \tfrac{1}{4}\, x_y^2$$

$$C = y_z\, z_x\, x_y - x_x\, y_z^2 - y_y\, z_x^2$$

insieme naturalmente a z e w. Fra questi invarianti e quelli da noi trovati si hanno le relazioni

$$A = -J \qquad 4B = z^2 - H \qquad -2C = zJ + K$$

« L'esistenza dell'invariante K′ non credo sia stata finora notata; esprimendolo in funzione delle componenti di deformazione si ha

$$K' = x_y\,(y_z^2 - z_x^2) + 2\,(x_z - y_y)\, y_z\, z_x$$

« Passando ora ai veri invarianti ciclici e quindi supponendo $k \neq 0$, poniamo

$$(ZW)^n = J_{2n} + i\, J'_{2n}$$

Saranno allora J_{2n}, J'_{2n} due invarianti ciclici di grado $2n$, linearmente indipendenti, legati però a quelli di rotazione dalla relazione

$$J_{2n}^2 + J'^2_{2n} = H^n\, J^n$$

e la espressione generale (9) si ptrà scrivere

$$I = (J_{2n} + iJ'_{2n})^k (K + iK')^\lambda H^\mu J^\nu$$

nella quale soltanto λ potrà essere negativo. Di qui segue che qualunque invariante ciclico, che non contenga z e w, sarà una funzione razionale dei sei invarianti J_{2n}, J'_{2n}, K, K', H, J, che si potrà sempre porre sotto la forma

$$\frac{1}{H^t J^{2t}} F(H, J, K, K', J_{2n}, J'_{2n})$$

ove F è simbolo di funzione razionale intera e t un intero positivo o nullo.

III.

« Proponiamoci ora di determinare, per qualunque valore di n, gli invarianti ciclici di grado minimo. La soluzione di questo problema conduce immediatamente alle conclusioni accennate da principio.

« Chiamando N il grado di uno qualunque degli invarianti dati dalla (9), avremo

$$N = 2kn + 3\lambda + 2\mu + 2\nu$$

e la quistione si riduce a trovare i valori di k, λ, μ, ν che rendono minima la espressione precedente, colla condizione che si abbia

$$(11) \qquad \begin{array}{ccc} k \geq 1 & \mu \geq 0 & \nu \geq 0 \\ kn + \lambda + \mu \geq 0 & & kn + 2\lambda + \nu \geq 0 \end{array}$$

« Osserviamo che, per ogni terna di valori assegnati ai numeri positivi k, μ, ν, il valore di λ che rende minima N, compatibilmente con le condizioni precedenti, si otterrà prendendo per λ fra i due valori

$$-(nk + \mu) \quad , \quad -\tfrac{1}{2}(nk + \nu + \varepsilon)$$

quello che è in valore assoluto minore, dove con ε indichiamo un numero che è uguale a zero, od a -1, secondo che $nk + \nu$ è pari o dispari.

« In secondo luogo notiamo che tutte le quaterne di valori possibili per k, λ, μ, ν si possono distinguere in tre gruppi secondo quella che è soddisfatta fra le tre condizioni

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & nk + \mu = \tfrac{1}{2}(nk + \nu) \\ 2^\circ & nk + \mu > \tfrac{1}{2}(nk + \nu) \\ 3^\circ & nk + \mu < \tfrac{1}{2}(nk + \nu) \end{array}$$

« Se è soddisfatta la prima, dovremo porre

$$\lambda = -(nk + \mu) \qquad \nu = nk + 2\mu$$

quindi

$$N = nk + 3\mu$$

« Il minimo valore di N si avrà allora, per le (11), ponendo $k = 1$, $\mu = 0$ e sarà $N = n$.

« Supponiamo ora soddisfatta la seconda condizione, e quindi poniamo

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}(nk + \nu + \varepsilon);$$

avremo

$$N = \tfrac{1}{2}(nk + \nu - 3\varepsilon) + 2\mu$$

Se n è pari, il minimo valore pari che possa assumere $nk + \nu$ è n, quindi il minimo valore di N si avrà ponendo $\nu = 0$, $\mu = 0$, $k = 1$; queste posizioni sono compatibili colla condizione 2ª, ed il minimo di N sarà quindi $N = \frac{n}{2}$.

« Se n è dispari, il minimo valore pari di $nk + \nu$ è $n + 1$, quindi il minimo valore di N si avrà ponendo $k = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$; queste posizioni sono compatibili colla condizione 2ª, purchè sia, come è difatti, $n > 2$. Dunque il minimo valore di N è in questo caso $N = \frac{n+1}{2}$.

« Si vede poi immediatamente che l'ipotesi che sia $nk + \nu$ dispari e quindi $\varepsilon = -1$, conduce a trovare per N dei valori superiori ai precedenti, cioè $N = \frac{n+4}{2}$ per n pari e $N \pm \frac{n+3}{2}$ per n dispari.

« Finalmente supponiamo soddisfatta la terza condizione; dovremo porre

$$\lambda = -(nk + \mu)$$

e dovrà essere

$$nk + 2\mu > \nu$$

quindi $\nu = nk + 2\mu + \tau$, ove τ è un intero positivo. Perciò sarà

$$N = nk + 3\mu + 2\tau$$

ed il minimo valore possibile per questa espressione è $N = n + 2$.

« Di qui, riassumendo, si vede che gli invarianti di grado minimo si ottengono dal secondo gruppo, e sono di grado $\frac{n}{2}$ per n pari e di grado $\frac{n+1}{2}$ per n dispari. Le loro espressioni complesse sono

$$Z^{\frac{n}{2}}\,,\ Z_1^{\frac{n}{2}} \qquad \text{per } n \text{ pari}$$

$$Z^{\frac{n-1}{2}} W_1\,,\ Z_1^{\frac{n-1}{2}} W \qquad \text{per } n \text{ dispari}$$

« Per passare ai corrispondenti invarianti reali, noi porremo (indicando con un indice in alto il periodo e con un indice in basso il grado)

$$(12) \qquad \begin{aligned} Z^{\frac{n}{2}} &= I^{(n)}_{\frac{n}{2}} + i I'^{(n)}_{\frac{n}{2}} \\ Z^{\frac{n-1}{2}} W_1 &= L^{(n)}_{\frac{n+1}{2}} + i L'^{(n)}_{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

« Questi invarianti sono linearmente indipendenti fra loro e dagli invarianti di rotazione; però sono legati a questi ultimi dalle relazioni non lineari

$$\left[I_{\frac{n}{2}}^{(n)}\right]^2 + \left[I_{\frac{n}{2}}^{\prime(n)}\right]^2 + = H^{\frac{n}{2}} \qquad \left[L_{\frac{n+1}{2}}^{(n)}\right]^2 + \left[L_{\frac{n+1}{2}}^{\prime(n)}\right]^2 = H^{\frac{n-1}{2}} J$$

IV.

« Finora abbiamo supposto il periodo n come dato, e ci eravamo proposti di trovarne tutti gli invarianti corrispondenti, di qualunque grado. Nella teoria della elasticità si presenta un problema in certo modo inverso; si assume generalmente per il potenziale una forma di un grado m determinato, e quindi per averne l'espressione più generale conviene conoscere tutti gli invarianti di grado m, qualunque ne sia il periodo.

« Supponiamo $m = 2$; è chiaro che n non potrà superare 4. Difatti per $n = 4$ esistono gli invarianti ciclici di 2° grado $I_2^{(4)}$, $I_2^{\prime(4)}$, ma per $n \geq 5$ gli invarianti di grado minimo (12) sono almeno di terzo grado.

« Di qui segue: *Se il potenziale di elasticità è una funzione quadratica delle componenti di deformazione, esso non può essere formato che cogli invarianti di rotazione z, w, H, J e con invarianti ciclici di periodo 2, 3, 4.*

« Questo risultato basta per dimostrare il teorema che è oggetto della Nota che ho citato da principio, cioè che la legge di razionalità è una conseguenza necessaria della ipotesi che il potenziale sia una forma quadratica delle componenti di deformazione.

« Se ora ammettiamo che il potenziale possa contenere anche termini di terzo grado, esso potrà essere formato anche cogli invarianti di rotazione K e K′, ed inoltre cogli invarianti ciclici $L_3^{(5)}$, $L_3^{\prime(5)}$ che si ottengono dalle (12) per $n = 5$. Anche per $n = 6$ abbiamo gli invarianti $I_3^{(6)}$, $I_3^{\prime(6)}$ che pure potranno comparire nel potenziale. Per $n \geq 7$ invece gli invarianti di grado minimo sono di grado superiore al terzo. Dunque:

« *Quando il potenziale è una forma di terzo grado, esso può contenere invarianti ciclici di periodo 2, 3, 4, 5, 6 e questi soltanto.*

« È quindi possibile formare una espressione pel potenziale, distinta da quelle che si hanno nel caso della isotropia assiale, e che corrisponde ad un corpo avente un asse di simmetria elastica di periodo 5. Una tale espressione sarebbe, ad esempio

$$AL_3^{(5)} + BL_3^{\prime(5)}$$

ove A, B sono costanti. Questo risultato, contrario alla legge di razionalità, per la quale non possono esistere che assi a periodo 2, 3, 4, 6, giustifica

le considerazioni che abbiamo premesse circa la estensione della teoria della elasticità proposta dal prof. Voigt.

« In generale poi si vede che, elevando sufficientemente il grado del potenziale, divengono possibili assi di simmetria di periodo qualunque, e precisamente: 1° perchè esista un asse di periodo pari $2r$, distinto da un asse di isotropia, il potenziale deve essere di grado non inferiore ad r; 2° perchè esista un asse di periodo dispari $2r+1$, distinto da un asse di isotropia, il potenziale deve essere di grado non inferiore ad $r+1$.

« Una volta fissato il grado che deve avere il potenziale e trovati gli invarianti ciclici corrispondenti, si potranno subito determinare le diverse forme del potenziale stesso per tutti gli assi di simmetria, compatibili col suo grado. Quindi in particolare si potranno ritrovare le forme note del potenziale nel caso, comunemente ammesso, che sia di 2° grado, per una via analoga a quella indicata come la più naturale dal prof. Beltrami, pei corpi isotropi.

« Noi però non insisteremo su queste ovvie applicazioni ».

Matematica. — *Sulle congruenze di grado* n *che si possono rappresentare sopra un piano.* Nota di P. Visalli, presentata a nome del Socio Cremona.

« 1. In questa Nota ci proponiamo lo studio delle congruenze di grado n, dotate, ciascuna, di un piano eccezionale σ contenente un numero semplicemente infinito di rette della congruenza, le quali inviluppano una curva ψ della classe $n-1$.

« Queste congruenze si possono rappresentare sul piano semplice σ.

« Sia C_n una di esse.

« Ad una retta a di C_n, corrisponde il punto $a\sigma$, e viceversa ogni punto di σ è immagine della retta di C_n passante per esso e non giacente, in generale, in σ.

« Sopra ogni tangente della curva ψ, vi è un punto, che in generale non coincide col punto di contatto, tale che per esso non passa alcuna retta di C_n esterna al piano σ. Il luogo di questi punti è una curva φ, che è l'immagine delle rette di C_n, giacenti in σ.

« Nel piano σ vi saranno dei punti P, eccezionali per la congruenza: x_1 semplici, x_2 doppi, ..., x_r r-pli; cioè tali che per ogni punto r-plo passa un numero semplicemente infinito di rette di C_n, che formano un cono di ordine r, ed altre $n-1-r$ tangenti alla curva ψ.

« 3. Le rette di C_n, che tagliano una retta a qualunque (asse), formano una superficie Γ dell'ordine $2n$, giacchè in un piano aa' passante per a,

giacciono n rette di C_n, e per il punto $a\,a'$ passano altre n rette della congruenza, e quindi a' taglia in $2n$ punti la superficie Γ. Questa superficie ha un punto r-plo in ogni punto eccezionale r-plo della congruenza.

« 4. Il luogo delle tracce su σ delle rette che tagliano a è una curva α dell'ordine $n+1$, che passa con r rami per ogni punto eccezionale r-plo, e semplicemente per il punto $a\sigma$ (vertice della curva). Se la retta a appartiene a C_n, il punto $a\sigma$ è doppio per la curva α.

« Due curve α, corrispondenti a due rette a, b, oltre ai punti eccezionali, hanno in comune $2n$ punti, tracce delle $2n$ rette che tagliano a e b, quindi si ha:

$$(n+1)^2 - \Sigma\, r^2\, x_r = 2n$$

da cui

$$\Sigma\, r^2\, x_r = n^2 + 1 \tag{1}$$

Le curve α non hanno, in generale, punti multipli fuori dei punti eccezionali, quindi indicando con p il loro genere, si ha:

$$2p = n\,(n-1) - \Sigma\, r\,(r-1)\; x_r$$

e per la (1):

$$2p = \Sigma\, r x_r - n - 1 \tag{2}$$

« 5. Nella formola (1) il massimo valore che si può dare ad r è n, e si ha allora $x_n = 1$, $x_1 = 1$, cioè nel piano σ vi sono due punti eccezionali, uno n-plo e l'altro semplice.

« La superficie Γ, corrispondente ad una retta di σ, si comporrà del piano σ contato $n-1$ volte, e di un'altra superficie di ordine $n+1$; se poi la retta di σ passa per il punto eccezionale n-plo P_n, la superficie Γ corrispondente si comporrà del piano σ contato $n-1$ volte, del cono di ordine n e vertice P_n, e di un fascio di rette; quindi:

« Se nel piano σ vi è un punto eccezionale n-plo per la congruenza, vi sarà un numero semplicemente infinito di punti eccezionali semplici della congruenza, ciascuno dei quali è il centro di un fascio di rette di C_n, situato in un piano passante per P_n.

« In un'altra Nota studieremo più dettagliatamente queste particolari congruenze aventi un punto eccezionale n-plo.

« 6. Sia π un piano qualunque, non eccezionale per la congruenza. Le rette di C_n determinano fra i piani π, σ una corrispondenza $(1, n)$, dicendo corrispondenti un punto di π ed uno di σ che giacciono sulla stessa retta di C_n. Alle rette di π corrispondono in σ curve α di ordine $n+1$, le quali formano una rete. Queste curve α passano un r rami per ogni punto P r-plo, e semplicemente per gli n punti S_i $(i = 1, .., n)$ in cui le n rette S_i di C_n, giacenti in π, tagliano σ.

« I punti fondamentali di σ, sono i punti P ed i punti S; mancano, in generale, le curve fondamentali e quindi in π mancano i punti fondamentali.

« Il cono di rette di C_n avente per vertice un punto P, r-plo, taglia π secondo una curva di ordine r, curva fondamentale corrispondente a P. Le rette s, sono rette fondamentali corrispondenti ai punti S. Alla retta $\pi\sigma$, considerata come appartenente a π, corrisponde la retta stessa e la curva φ. Quindi la curva φ è dell'ordine n, e passa come le curve α per i punti P.

« Alla retta $\pi\sigma$, considerata come appartenente a σ, corrisponde la retta stessa e le n rette S_i.

« 7. La curva doppia di σ, che è l'Iacobiana della rete di curve α, è dell'ordine $3n$ e passa con $3r-1$ rami per ogni punto P, r-plo, e con due rami per ogni punto S. Essa è di genere:

$$p' = 9p - n + 1 - \Sigma x_r$$

ove Σx_r indica il numero dei punti P; e taglia una curva α in $2(p+n-1)$ punti, fuori dei punti fondamentali.

« 8. La curva limite del piano π è dell'ordine $2(p+n-1)$, dello stesso genere p' della curva doppia, della classe $4p+2n-1+\Sigma x_r$, ha:

$$\delta = 2\{(p+n)^2 + 4 - 3n + 2\Sigma x_r - 17p\}$$

punti doppi,

$$c = 3(6p - \Sigma x_r - 1)$$

cuspidi, e tocca in $3r-1$ punti ogni curva fondamentale di ordine r.

« 9. Se A è un punto comune al piano π e alla superficie focale di C_n, per A passano due rette di C_n infinitamente vicine; quindi A è un punto della curva limite, e viceversa; quindi:

« L'ordine della superficie focale è $2(p+n-1)$.

« La curva doppia della superficie focale è una curva gobba dell'ordine δ.

« La curva cuspidale della superficie focale è una curva gobba dell'ordine c.

« I coni circoscritti alla superficie focale sono dell'ordine $4p+2n-1+\Sigma x_r$.

« Le rette di C_n sono tangenti doppie della superficie focale.

« La superficie focale tocca un piano eccezionale passante per un punto P, semplice, secondo una conica; e tocca un cono di C_n, avente il vertice in un punto P_r, r-plo, secondo una curva gobba dell'ordine $3r-1$.

« 10. La retta $\pi\sigma$ taglia la curva φ in n punti per i quali passa la curva doppia, quindi la curva limite tocca in questi n punti la retta $\pi\sigma$. Inoltre la curva limite taglia la stessa retta $\pi\sigma$ in $2(p-1)$ punti. Ad uno

di questi punti corrispondono n punti di cui uno coincide col punto medesimo, e gli altri $n-1$ sono tali che due sono infinitamente vicini, quindi questi punti sono intersezioni di $\pi\sigma$ e della curva ψ. Risulta quindi che la curva ψ è dell'ordine $2(p-1)$ e che la superficie focale tocca il piano σ lungo la curva φ e lo sega lungo la curva ψ.

« 11. Per un punto P, r-plo, passano $n-1$ rette di C_n tangenti a ψ, delle quali r appartengono al cono di C_n, di vertice P. E poichè la curva gobba di contatto del cono con la superficie focale è dell'ordine $3r-1$, risulta che questa curva ha un punto $(2r-1)$plo in P.

« 12. La curva ψ non passa per un punto P_r, r-plo, e la curva φ vi passa con r rami, quindi ogni punto eccezionale r-plo di σ è multiplo secondo $2r$ per la superficie focale.

« 13. Sieno P_r, P_s due punti fondamentali di σ, rispettivamente r-plo ed s-plo, e tali che $r+s=n$. Alla retta $P_r\,P_s \equiv a$, corrisponde in π una curva di ordine $n+1$ composta dalle due curve fondamentali corrispondenti ai punti P_r, P_s, e di ordine complessivo uguale ad n, ed una retta a' passante per $a.\pi\sigma$. Inoltre alla retta a' corrisponde una curva α, composta della retta a e di una curva α_n di ordine n. Ad ogni punto di a' corrisponde un punto di a ed $n-1$ punti di α_n, e ad ogni punto di a un punto di a', al punto aa' corrisponde se stesso, e al punto della retta a infinitamente vicino a P_r (P_s) corrisponde uno dei punti in cui a' taglia la curva fondamentale corrispondente; quindi:

« Le rette di C_n, giacenti nel piano aa', formano un fascio, il cui centro si trova sui due coni (P_r), (P_s).

« La curva α_n taglia la retta a in due punti fuori dei punti fondamentali per i quali passa la curva doppia, inoltre la curva α_n taglia la curva doppia oltre che in questi due punti e nei punti fondamentali, in altri $2(n+p-1)-4$; quindi la retta a' tocca in due punti la curva limite e la sega in $2(n+p-1)-4$ altri punti, e perciò:

« Il piano aa' è tangente alla superficie focale lungo una conica, e la taglia secondo una curva di ordine $2(n+p-1)-4$.

« 14. Sia O′ il centro del fascio di rette di C_n giacenti nel piano aa', e π' un piano per O′ non coincidente con aa'. Delle n rette di C_n, giacenti in π' una è la retta $s_i' \equiv \pi.\,aa'$; e la retta a è fondamentale nella trasformazione (π', σ). La curva doppia di σ è dell'ordine $3n-1$, passa con $3r-2$ e $3s-2$ rami per i due punti P_r, e P_s, e semplicemente per S_i, quindi la curva limite di π' tocca in un punto fuori di O′ la retta s_i', e perciò la conica di contatto fra il piano aa' e la superficie focale passa per O′.

« Ad una retta per O′ corrisponde in σ la retta a ed una curva di ordine n, che ha un punto $(r-1)$plo in P_r ($(s-1)$plo in P_s), e non passa per S_i; e, poichè questa curva taglia la curva doppia in $2(n+p-1)-2$

punti fuori dei punti fondamentali, risulta che la curva limite ha un punto doppio in O′, e che O′ è un punto doppio della superficie focale.

« 15. La classe della superficie focale di C_n è uguale all'ordine, ed i coni circoscritti alla superficie focale hanno c piani tangenti stazionari, e δ piani tangenti doppi; quindi:

« I piani tangenti stazionari della superficie focale formano una sviluppabile della classe c, ed i piani tangenti doppi formano una sviluppabile della classe δ.

« 16. La superficie focale di C_n si può rappresentare sopra un piano doppio σ. Un punto A della superficie ha per immagine quel punto A′ di σ ove le due rette di C_n, infinitamente vicine, uscenti per A, tagliano σ.

« Viceversa: un punto A′ di σ, è immagine dei due punti ove la retta di C_n uscente per A′, e non giacente in generale in σ, tocca la superficie.

« Un punto P, r-plo, è immagine di una curva gobba della superficie di ordine $3r - 1$.

« Una sezione piana della superficie ha per immagine la curva doppia J nella trasformazione (π, σ), ove π è il piano segante.

« Queste curve J, in numero 3 volte infinito, sono dell'ordine $3n$, passano con $3r - 1$ rami per ogni punto P, r-plo, ed hanno n punti doppi, variabili in linea retta. Due curve J si segano, fuori dei punti fondamentali, in

$$9n^2 - \Sigma (3r - 1)^2 x_r = 12p + 6n - 3 - \Sigma x_r$$

punti variabili.

« Le rette di σ sono immagini di curve gobbe di ordine $3n$, appartenenti alla superficie focale.

« 17. Indichiamo con L la curva intersezione della superficie focale e di un piano π, e sia J la sua immagine. Ogni punto di J è immagine di un punto di L, e di un altro punto, che diremo congiunto al primo, situato sulla superficie focale. Il luogo dei punti congiunti ai punti di L, è una curva gobba L′, la quale ha pure per immagine la curva J.

« Se J_1 è l'immagine della sezione di un piano π_1 con la superficie, il numero dei punti comuni alle due curve J, J_1, cioè $12p + 6n - 3 - \Sigma x_r$ è uguale al numero dei punti in cui π_1 taglia L ed L′; ma π_1 taglia L in $2(p + n - 1)$ punti; quindi l'ordine della curva L′ è:

$$10p + 4n - \Sigma x_r - 1$$

« 18. Fra le coppie di punti congiunti della superficie focale ve ne è un numero semplicemente infinito, nelle quali i due punti congiunti sono infinitamente vicini. In altri termini vi è un numero semplicemente infinito di rette di C_n, che sono tangenti di flesso della superficie focale. Il luogo dei punti di contatto di queste rette di C_n, (punti uniti della superficie), è una curva E, che chiameremo curva unita della superficie focale.

« Le curve L e L′ si tagliano in $10p + 4n - \Sigma x_r - 1$ punti. Ora se B è un punto comune ad L e L′, il suo congiuuto B′, deve essere comune ad L e L′. I punti B e B′ possono essere distinti o coincidenti. Se sono distinti, la retta B B′ è una retta di C_n giacente in π, e poichè in π vi sono n rette di C_n, risulta che in un piano qualunque π vi sono $10p + 2n - \Sigma x_r - 1$ punti uniti della superficie focale, e quindi:

« La curva unita della superficie focale è dell'ordine $10p + 2n - \Sigma x_r - 1$.

« Ci riserviamo di sviluppare in un altro lavoro le considerazioni speciali che si riferiscono alle congruenze di secondo e terzo grado ».

Matematica. — *Sopra alcune congruenze di grado* n, *dotate di una curva gobba singolare di ordine* n. Nota di P. Visalli, presentata a nome del Socio Cremona.

Fisica. — *Intorno ad alcune modificazioni dell'areometro di Fahrenheit, e ad una nuova forma di bilancia.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Calcolo della posizione dell'ipocentro, del tempo all'origine e della velocità di propagazione dei terremoti.* Nota di F. Bonetti e G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

« Se nel calcolare per un dato terremoto la posizione dell'ipocentro, il tempo all'origine e la velocità di propagazione si volesse tener conto adequato di tutte le circostanze, che possono influire più o meno sul fenomeno, s'incontrerebbero gravissime ed attualmente insuperabili difficoltà. Infatti per apprezzare convenientemente queste circostanze occorrerebbe una cognizione della costituzione interna del globo, quale pur troppo oggi non si ha, salvo che nella parte superficialissima: come anche si richiederebbe qualche dato di più sulle cause che danno origine ai terremoti. Queste difficoltà son messe molto bene in evidenza dal Cap. C. E. Dutton nel suo pregevolissimo lavoro sul terremoto di Charleston del 31 agosto 1886 [1], dove egli tratta a fondo

[1] *The Charleston Earthquake of August 31, 1886,* by Capt. Clar. Edw. Dutton — *United States Geological Survey — Ninth annual report 1887-88,* pag. 355-389. Whashington 1889.

la questione della natura delle onde sismiche e del meccanismo della loro propagazione. Ciononostante lo stesso Dutton, coadiuvato dal Newcomb, procede a determinare colla maggiore approssimazione, che può, gli elementi suddetti per il terremoto di Charleston. Ed è infatti da convenire con lui che, anche senza poter risolvere pienamente la questione proposta, si possa però intanto fare qualche primo passo nella sua soluzione, poste, s'intende, alcune ipotesi che la semplifichino.

« Parecchi sono i metodi finora usati o proposti per calcolare gli elementi di un terremoto: ma un metodo generale, che non richieda altra cognizione fuori di quella dell'istante, in cui si avverte la scossa in un numero sufficiente di località, a quanto noi sappiamo, finora non è stato pubblicato. Il Milne [1] ha risoluto il problema di determinare gli elementi di un terremoto mediante la sola cognizione dei tempi d'arrivo della scossa almeno in cinque località; ma ha considerato unicamente il caso particolare, che la superficie terrestre possa ritenersi piana. Quindi evidentemente il suo calcolo non è applicabile a terremoti, in cui si abbiano osservazioni anche a grande distanza dall'epicentro, quali ce le danno i moderni strumenti. Noi invece colle formole, che sviluppiamo in questa Nota vogliamo considerare il problema nella sua generalità.

*
* *

« Nel nostro calcolo noi partiamo dalle seguenti ipotesi:

1°) che il centro di scuotimento, il quale si trova ad una certa profondità nella massa terrestre, possa considerarsi, ben inteso, in prima approssimazione, come un punto;

2°) che il mezzo, in cui si propagano le scosse, possa, pure in un primo studio del fenomeno, ritenersi come omogeneo ed isotropo; e quindi la propagazione dell'urto si faccia con moto uniforme e per linee rette dall'ipocentro fino alla superficie.

« Prescindiamo anche da qualunque perturbazione possa derivare dal fatto, che il mezzo, in cui avviene originariamente la propagazione dell'urto, è limitato alla superficie della terra, e gliene succede un altro di densità ed elasticità ben diverse.

« Quanto ai due sistemi di onde longitudinali e trasversali, contemplati nella teoria della propagazione di un urto nei corpi solidi elastici, le quali onde si propagano con velocità diverse, è chiaro che il nostro calcolo va applicato ad uno qualunque di questi due sistemi, a piacere. Di più siccome la perturbazione sismica si rivela in ogni località con una serie di movimenti, che ha una durata più o meno lunga, s'intende che dobbiamo riferirci per i tempi ad una stessa fase della perturbazione sismica in tutte le località.

(1) *Earthquakes and other earth movements.* London 1886, pag. 206 e seg.

« Per dare alle nostre formole la massima generalità cominciamo dal supporre che lo scuotimento avvenga in un mezzo indefinito, e che si osservino i tempi, in cui esso giunge a *cinque* punti, comunque disposti nell'interno del mezzo. Si vuol determinare: 1°) la posizione del centro di scuotimento; 2°) il tempo t, in cui ha avuto origine al detto centro la scossa (tempo all'origine); 3°) la velocità v di propagazione dell'urto, che supponiamo, come si è detto, costante.

« Siano $a_0\ b_0\ c_0$, $a_1\ b_1\ c_1$, $a_2\ b_2\ c_2$, $a_3\ b_3\ c_3$, $a_4\ b_4\ c_4$, le coordinate rettangolari delle località, in cui si determina l'istante d'arrivo delle vibrazioni: d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 le rispettive distanze dal centro di scuotimento x, y, z: t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 gl'istanti, in cui lo scuotimento giunge ai suddetti punti: si avrà

$$(\alpha) \qquad d^2_s = (a_s - x)^2 + (b_s - y)^2 + (c_s - z)^2 = v^2\,(t_s - t)^2$$

« Di queste equazioni ne abbiamo cinque; e sottraendo la prima dalle altre, allo scopo di fare sparire i quadrati di x, y, z e t, si avranno le quattro equazioni seguenti in x, y, z ed u:

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + \Theta_1 u &= M_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + \Theta_2 u &= M_2 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + \Theta_3 u &= M_3 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + \Theta_4 u &= M_4 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{array}{lll} A_s = 2(a_s - a_0) & \Theta_s = t^2_s - t^2_0 - 2(t_s - t_0)t & u = v^2 \\ B_s = 2(b_s - b_0) & M_s = (a^2_s + b^2_s + c^2_s) - (a^2_0 + b^2_0 + c^2_0) & \\ C_s = 2(c_s - c_0) & & \end{array}$$

« La risoluzione del sistema (β) di equazioni ci fornirà l'espressione di x, y, z, u in funzione di quantità note e di t. Si avrà cioè

$$x = \begin{vmatrix} M_1 & B_1 & C_1 & \Theta_1 \\ M_2 & B_2 & C_2 & \Theta_2 \\ M_3 & B_3 & C_3 & \Theta_3 \\ M_4 & B_4 & C_4 & \Theta_4 \end{vmatrix} : D \quad y = \begin{vmatrix} A_1 & M_1 & C_1 & \Theta_1 \\ A_2 & M_2 & C_2 & \Theta_2 \\ A_3 & M_3 & C_3 & \Theta_3 \\ A_4 & M_4 & C_4 & \Theta_4 \end{vmatrix} : D \quad z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & M_1 & \Theta_1 \\ A_2 & B_2 & M_2 & \Theta_2 \\ A_3 & B_3 & M_3 & \Theta_3 \\ A_4 & B_4 & M_4 & \Theta_3 \end{vmatrix} : D$$

$$u = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & M_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & M_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & M_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & M_4 \end{vmatrix} : D, \quad \text{essendo } D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \Theta_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \Theta_3 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \Theta_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & \Theta_4 \end{vmatrix}$$

« Si vede facilmente che queste espressioni si possono porre sotto la forma

$$(\gamma) \qquad x = \frac{P_1 + Q_1 t}{R + St} \quad y = \frac{P_2 + Q_2 t}{R + St} \quad z = \frac{P_3 + Q_3 t}{R + St} \quad u = \frac{P_4}{R + St}$$

essendo P_s, Q_s, R_s, S coefficienti noti.

« Introducendo le (γ) in una qualunque delle (α) si giunge ad un'equazione di terzo grado in t. Questa ci fornirà tre valori di t, dei quali uno

sempre reale. Sostituendo nelle (γ) un valore di t, si avranno i valori delle x, y, z, u, e dal valore di u finalmente quello di v.

« Dal caso più generale scendiamo ad alcuni casi particolari.

« Caso I. — Supponiamo che i punti d'osservazione siano tutti sopra una sfera. In tal caso l'origine delle coordinate si ponga al centro della sfera, di cui diciamo r il raggio. Sarà per conseguenza

$$a^2_s + b^2_s + c^2_s = a^2_0 + b^2_0 + c^2_0 = r^2$$

quindi $M_s = 0$; e l'equazioni (β) si riducono alle seguenti:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + \Theta_1 u = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + \Theta_2 u = 0 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + \Theta_3 u = 0 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + \Theta_4 u = 0 \end{aligned}$$

« Dividendo per u, sostituendo a Θ_s il suo valore, e ponendo $\frac{x}{u} = \xi$, $\frac{y}{u} = \eta$, $\frac{z}{u} = \zeta$, si avranno le equazioni:

$$(\delta) \quad \begin{aligned} A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta - 2(t_1 - t_0)t + (t^2_1 - t^2_0) = 0 \\ A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \zeta - 2(t_2 - t_0)t + (t^2_2 - t^2_0) = 0 \\ A_3 \xi + B_3 \eta + C_3 \zeta - 2(t_3 - t_0)t + (t^2_3 - t^2_0) = 0 \\ A_4 \xi + B_4 \eta + C_4 \zeta - 2(t_4 - t_0)t + (t^2_4 - t^2_0) = 0 \end{aligned}$$

« La risoluzione di queste ci darà i valori di ξ, η, ζ e t.

« Ora poichè $x = u\xi$, $y = u\eta$, $z = u\zeta$, sostituendo queste espressioni, unitamente al valore t già noto, in una qualunque delle (α), si giunge alla seguente equazione di secondo grado in u:

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, u^2 - \left\{ 2(a_s \xi + b_s \eta + c_s \zeta) + (t_s - t)^2 \right\} u + r^2 = 0$$

« Ricavato un valore di u da questa equazione, diverranno note le x, y, z, e la v.

« Caso II. — Se oltre al supporre che le località siano, come nel caso antecedente, situate tutte sopra una sfera, si suppone di più noto il punto (a_0, b_0, c_0), in cui il raggio passante per il centro di scuotimento incontra la superficie della sfera, il problema si semplifica notevolmente: poichè basterà ora conoscere i tempi t_1, t_2, t_3, di tre sole località $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$, $a_3\, b_3\, c_3$.

(ε) « Infatti si ha $\frac{x}{a_0} = \frac{y}{b_0} = \frac{z}{c_0}$, ovvero $x = z\frac{a_0}{c_0}$, $y = z\frac{b_0}{c_0}$.

« L'equazioni fondamentali (α) si riducono dunque alle seguenti:

$$(\zeta)\quad \begin{aligned} \left(\frac{r}{c_0}\right)^2 z^2 - \frac{2}{c_0}(a_1\, a_0 + b_1\, b_0 + c_1\, c_0)\, z + r^2 = v^2\,(t_1 - t)^2 \\ \left(\frac{r}{c_0}\right)^2 z^2 - \frac{2}{c_0}(a_2\, a_0 + b_2\, b_0 + c_2\, c_0)\, z + r^2 = v^2\,(t_2 - t)^2 \\ \left(\frac{r}{c_0}\right)^2 z^2 - \frac{2}{c_0}(a_3\, a_0 + b_3\, b_0 + c_3\, c_0)\, z + r^2 = v^2\,(t_3 - t)^2 \end{aligned}$$

« Sottraendo la prima di queste equazioni dalla seconda e dalla terza, e ponendo $\frac{z}{v^2} = w$ (η), si hanno le due equazioni in w e t.

$$\frac{1}{c_0}\Big\{(a_1 - a_2)\, a_0 + (b_1 - b_2)\, b_0 + (c_1 - c_2)\, c_0\Big\}\, w + (t_2 - t_1)\, t = \frac{t^2_2 - t^2_1}{2}$$

$$\frac{1}{c_0}\Big\{(a_1 - a_3)\, a_0 + (b_1 - b_3)\, b_0 + (c_1 - c_3)\, c_0\Big\}\, w + (t_3 - t_1)\, t = \frac{t^2_3 - t^2_1}{2}$$

« Da queste si ricavano i valori di w e t. Introducendo poi in una qualunque delle (ζ), p. e. nella prima, il valore trovato di t e l'espressione $z = wv^2 = wu$, in cui w è già noto, si giunge all'equazione di secondo grado in u:

$$\left(\frac{rw}{c_0}\right)^2 u^2 - \Big\{\frac{2w}{c_0}(a_1\, a_0 + b_1\, b_0 + c_1\, c_0) + (t_1 - t)^2\Big\}\, u + r^2 = 0$$

« Traendo da questa un valore di u, e tenendo conto della (η), si conoscono i valori di v e di z: quindi finalmente le (ε) ci daranno x ed y.

« Caso III. — Il problema diviene ancora più semplice, supponendo che il punto (a_0 b_0 c_0) sia esso stesso il centro di scuotimento. In questo caso, oltre la conoscenza della posizione del detto centro, basta che il tempo dell'arrivo della scossa sia stato determinato in due sole località. Infatti dette δ_1 e δ_2 le distanze dei punti $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$ da $a_0\, b_0\, c_0$, si ha direttamente

$$\delta_1 = \sqrt{(a_1 - a_0)^2 + (b_1 - b_0)^2 + (c_1 - c_0)^2} = v(t_1 - t)$$

$$\delta_1 = \sqrt{(a_2 - a_0)^2 + (b_2 - b_0)^2 + (c_2 - c_0)^2} = v(t_2 - t)$$

« Queste equazioni non sono altro che le (ζ), quando vi si faccia $z = c_0$. Ponendo $\omega = \frac{1}{v}$, sarà:

$$\delta_1\, \omega + t = t_1$$

$$\delta_1\, \omega + t = t_2$$

donde si ricaveranno i valori di ω e di t, che risolvono il problema.

* * *

« Le varie formole date di sopra per punti di osservazione posti tutti alla superficie di una sfera sono quelle da applicare al caso pratico dei terremoti, nei quali l'ipocentro può stare ad una profondità più o meno grande,

e le località, dove si osservano i tempi d'arrivo delle scosse, sono tutte sopra la superficie terrestre [1]. Ma in questo caso pratico, se tenessimo conto della reale struttura del nostro globo, non potremmo più a rigore supporre la sua massa omogenea, come abbiamo fatto fin qui nelle nostre formole. Tanto la densità, come l'elasticità possono variare lungo il tragitto dell'onda sismica, sia per la diversa costituzione dei materiali attraversati, sia per l'aumento della pressione colla profondità. Quindi a rigore non si potrebbe più ammettere il cammino rettilineo dell'urto sismico dal centro di scuotimento ad una qualunque delle località considerate. È chiaro dunque che i valori che si possono ottenere applicando le nostre formole, vanno presi in pratica solo come prima approssimazione e con riserva, conforme appunto alle fatte riflessioni.

« Abbiamo veduto che tanto nel caso più generale di località comunque poste nell'interno di una massa indefinita, quanto nel caso particolare di località poste tutte sopra una sfera (caso I), è necessario di conoscere i tempi d'arrivo delle scosse almeno in cinque località. Quando invece si supponga nota la posizione del raggio, su cui si trova il centro di scuotimento, o in altre parole, si conosca la posizione dell'epicentro, (caso II) sono necessari solamente i tempi di tre località; i quali finalmente si riducono a due, ove si supponga il movimento propagarsi dall'epicentro stesso, cioè a dire, l'ipocentro coincidente coll'epicentro (caso III) [2]. Siccome però di fatto si ha quasi sempre un numero ben più grande del necessario di località, dove sono stati osservati i suddetti tempi, si capisce facilmente che per utilizzare tutti questi dati sovrabbondanti si potrà ricorrere al metodo dei minimi quadrati.

*
* *

« Si potrebbe il problema della determinazione degli elementi di un terremoto considerare anche da un altro punto di vista, supponendo cioè che per una particolare struttura del nostro globo la scossa abbia origine, e si propaghi efficacemente solo nello strato più superficiale della terra, seguendo con moto uniforme gli archi di circolo massimo e non le corde; o almeno supponendo che esista, fra le altre, una particolare forma di vibrazione sismica, la quale per una ragione qualsiasi costituisca un fenomeno proprio del detto strato superficiale, ed irraggi dall'epicentro con velocità costante lungo i circoli massimi. Il calcolo degli elementi del terremoto, basato unicamente sull'osservazione dei tempi in diverse località, esige in questo secondo modo di

[1] Le coordinate cartesiane delle diverse località si deducono dalle coordinate geografiche colle note formole trigonometriche, ed il calcolo è facilissimo, quando si scelga per origine degli assi il centro della terra, per piano xy il piano dell'equatore, e quindi l'asse terrestre per asse delle z.

[2] A questo caso ci avviciniamo nella pratica, quando l'ipocentro è da ritenersi ad una profondità relativamente assai piccola.

vedere un processo diverso da quello tenuto fino qui da noi nell'ipotesi della propagazione rettilinea, e speriamo di aver agio di trattare anche sotto quest'altro punto di vista il nostro problema.

« È certo che lo studio di un terremoto anche in questa seconda ipotesi è importantissimo per più ragioni. Primieramente perchè da qualche tempo i livelli astronomici, sismometrografi ecc. hanno accennato l'esistenza di onde sismiche a lento periodo, che si mostrano alla superficie con una specie di larghissimo increspamento della medesima, e si vuole da alcuni che queste onde abbian fatto persino l'intero giro del globo. Ora parrebbe che fosse questo appunto un caso di quel movimento puramente superficiale, che abbiam detto. In secondo luogo qualora i dati di osservazione per un terremoto fossero in numero maggiore del necessario, sottoponendoli al calcolo tanto nell'ipotesi della propagazione rettilinea, lungo le corde, quanto nell'ipotesi della propagazione lungo gli archi di circolo massimo, il miglior accordo fra i valori calcolati ed osservati potrebbe metterci sulla via per decidere quale delle due ipotesi si accosti più alla realtà.

« Finalmente, come dichiareremo meglio in una Nota che fa seguito alla presente, supposto anche che l'urto si propaghi nell'interno della massa terrestre in linea retta, con velocità costante, è però certo che, lungo la superficie la velocità, diciam così, apparente di propagazione (quella che chiameremo *velocità superficiale*) non può essere costante, ma variabile con legge determinata. Così anche la velocità ottenuta dividendo l'arco di circolo massimo per il tempo impiegato a percorrerlo, cioè la velocità superficiale *media*, deve variare pur essa. Se invece il fenomeno è superficiale, le velocità vera e media dovranno coincidere ed essere costanti ambedue, salva sempre la questione di perturbazioni irregolari, dovute all'eterogeneità dei materiali attraversati. Dal calcolo dunque delle velocità, quando ben inteso, il progresso delle osservazioni sismiche sarà in grado di fornirci una determinazione sufficientemente esatta delle ore delle scosse, potrà derivare molta luce tanto sul meccanismo di propagazione dell'urto sismico, quanto anche, se si voglia, sulla costituzione interna dello sferoide terrestre.

« Comunemente dai sismologi le distanze dei punti di osservazione, sia dall'epicentro, sia uno dall'altro, vengono contate sui circoli massimi passanti per l'epicentro, e si ritiene la velocità del terremoto rappresentata dai quozienti di queste distanze per le differenze dei relativi tempi. Questo modo di procedere non dà a rigore altro che la velocità media superficiale, la quale, come abbiamo osservato, se l'ipocentro è profondo, e l'urto sentito alla superficie proviene direttamente da esso in linea retta, sarà diversa dalla velocità di propagazione nella massa terrestre, che è la cercata. Però se l'ipocentro è vicinissimo alla superficie, e i punti d'osservazione sono a distanze da esso tali, che la differenza tra l'arco e la corda sia trascurabile; le due ipotesi della propagazione rettilinea e della propagazione per archi di circolo

massimo condurranno a risultati sensibilmente identici, o meglio le differenze potranno essere in pratica sopraffatte da variazioni accidentali. È per questo che uno di noi (Agamennone) nel calcolare col metodo di Dutton e Newcomb la velocità di parecchi terremoti, ad ipocentro probabilmente pochissimo profondo, e nei quali la distanza della località più lontana dall'ipocentro si aggira sui 2000 km., ha creduto di non allontanarsi dal modo di procedere comune. Infatti per tale massima distanza l'arco non supera la corda che di pochi chilometri. D'altronde gli errori di osservazione nei tempi sono ancor tali, per i terremoti finora studiati, da rendere impossibile per ora il porre in evidenza le variazioni suaccennate di velocità ».

Chimica. — *Sulla costruzione della nicotina.* Nota di G. Oliveri, presentata dal Socio Paternò.

Mineralogia. — *Sopra alcuni minerali di Su Poru fra Tonni e Correboi in Sardegna* — *La tormalina della zona arcaica di Caprera.* Note di D. Lovisato, presentate dal Socio Struever.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

N. Nicoli. *Sull'efflusso dei gas, dei vapori e dei liquidi soprariscaldati sotto forti pressioni.* Presentata dal Socio Cerruti.

A. Porro. *Un'altra ipotesi sulla formazione della grandine.* Presentata dal Segretario.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente annuncia con rammarico all'Accademia la perdita da questa fatta nella persona del Socio straniero Tchebichef Pafnutij, mancato ai vivi il 16 dicembre 1894; apparteneva il defunto Socio all'Accademia sino dal 16 dicembre 1883.

CONCORSI A PREMIO

Il Segretario Blaserna dà comunicazione dell'elenco dei lavori presentati per concorrere al premio reale di *fisica*, scaduto il 31 dicembre 1894.

1. Bartoli Adolfo — 1) *Sul calore specifico delle acque e sulle misure termiche e calorimetriche in genere* (N. 21 Memorie e Note st.). — 2) *Sulla misura del calore solare e dei suoi effetti* (N. 10 Mem. e Note st.). — 3) *Sulla costituzione degli elettroliti e sulla elettrolisi* (N. 13 Memorie e Note st.). — 4) *Sulla conduttività elettrica* (N. 18 Memorie e Note st.).

2. Berio Giacomo Emilio — *Teoria matematica della propulsione elicoidale e della resistenza dei fluidi, coi più recenti perfezionamenti alle forme nautiche dei piroscafi e dei propulsori navali* (ms.).

3. Chiazzari Orazio — *Caldaia tipo locomotiva. Migliorie ed applicazioni* (st.).

4. Chistoni Ciro — 1) *Determinazione dei valori assoluti della direzione e dell'intensità della forza magnetica terrestre, fatte sul continente italiano nell'anno 1883* (st.). — 2) *Id. id. fatte in Sardegna nei mesi di maggio e di giugno 1884* (st.). — 3) *Misure assolute degli elementi del magnetismo terrestre fatte nell'anno 1885* (st.). — 4) *Id. id. fatte nell'anno 1886* (st.). — 5) *Id. id. fatte nell'anno 1887* (st.). — 6) *Id. id. fatte a Roma negli anni 1885, 1886, 1887* (st.). — 7) *Id. id. fatte nel luglio e nell'agosto 1888* (st.). — 8) *Id. id. fatte in Sicilia nei mesi di luglio e di agosto 1890* (st.). — 9) *Contributo allo studio del magnetismo terrestre in Italia e lungo le coste dell'Adriatico* (st.). — 10) *Sulla variazione secolare degli elementi del magnetismo terrestre a Milano* (st.). — 11) *Id. id. a Venezia* (st.). — 12) *Id. id. a Padova* (st.). — 13) *Id. id. a Como, a Pavia, a Verona ed a Modena* (st.). — 14) *Id. id. a Firenze* (st.). — 15) *Sul coefficiente di riduzione dell'unità arbitraria di forza magnetica assunta da Humboldt in unità assoluta* (st.). — 16) *Sulla determinazione del meridiano astronomico col magnetometro unifilare di Kew* (st.). — 17) *Magnetometro unifilare dei seni* (st.). — 18) *Teoria del metodo del Lloyd per la misura dell'intensità magnetica* (st.). — 19) *Sulla determinazione del coefficiente d'induzione dei magneti col metodo di Lamont* (st.). — 20) *Sulla misura delle deviazioni col magnetometro dei seni a posizioni est ed ovest del magnete deviatore* (st.). — 21) *Sul calcolo del coefficiente magnetometrico ecc.* (st.). — 22) *Sull'applicazione del magnetometro dei seni alla determinazione del coefficiente medio di temperatura dei magneti* (st.). — 23) *Azione deviatrice di un magnete fisso sopra un magnete libero di muoversi attorno ad un asse verticale* (5 Mem. st.).

5. De Gregorio Antonio — *Su taluni nuovi strumenti fisici e meteorologici, certe azioni molecolari dei liquidi, taluni fenomeni tellurici, e sulla più probabile origine del nostro sistema solare.* (st.).

6. Marangoni Carlo — *Teoria sulla grandine* (4 Note st. ed una ms.).

7. Righi Augusto — 1) *Sulle cariche elettriche generate dalle radiazioni* (st.). — 2) *Sopra un apparecchio stereoscopico* (st.). — 3) *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni.* III Memoria (st.). — 4) *Sulle forze elementari elettromagnetiche ed elettrodinamiche.* Memorie I, II (st.). — 5) *Sulla misura delle forze elettromotrici di contatto dei metalli in varî gas, per mezzo delle radiazioni ultraviolette* (st.). — 6) *Sull'elettricità di contatto in diversi gas* (st.). — 7) *Sulla convezione elettrica* (st.). — 8) *Sulle traiettorie percorse nella convezione fotoelettrica, e su alcuni nuovi fenomeni elettrici nell'aria rarefatta* (st.). — 9) *Sulla convezione fotoelettrica e su altri fenomeni elettrici nell'aria rarefatta* (st.). — 10) *Sopra specie di scintille elettriche nelle quali la luminosità si propaga gradatamente da un elettrodo all'altro* (st.). — 11) *Sulle scintille costituite da masse luminose in moto* (st.). — 12) *Ricerche sperimentali intorno a certe scintille elettriche costituite da masse luminose in moto.* Con Appendice (st.).— 13) *Sulla teoria dello stereoscopio* (st.). — 14) *Di un nuovo apparecchio per l'interferenza delle onde sonore* (st.). — 15) *Sulla misura delle differenze di fase prodotte dalle lamine cristalline, e sulla costruzione delle lamine quarto-d'onda e mezz'onda* (st.). — 16) *Sulla distribuzione dei potenziali presso il catodo* (st.). — 17) *Sulla distribuzione del potenziale nell'aria rarefatta percorsa dalla corrente elettrica* (st.). — 18) *Su alcune disposizioni sperimentali per la dimostrazione e lo studio delle ondulazioni elettriche di Hertz* (st.). — 19) *Apparecchio da lezione per la composizione delle oscillazioni pendolari* (st.). — 20) *Di un nuovo elettrometro idi statico assai sensibile* (st.). — 21) *Sulla preparazione di lamine sottili di vetro, presentanti gli anelli di interferenza* (st.). — 22) *Sulle oscillazioni elettriche a piccola lunghezza d'onda, e sul loro impiego nella produzione di fenomeni analoghi ai principali fenomeni dell'ottica* (st.). — 23) *Sulle onde elettromagnetiche generate da due piccole oscillazioni elettriche ortogonali, oppure per mezzo di una rotazione uniforme* (st.).

8. Saporetti Antonio — *Metodo universale per determinare col psicometro di August l'umidità relativa dell'aria atmosferica nel caso delle temperature sotto zero e per qualsiasi clima* (st.).

Lo stesso Segretario annuncia poscia che al concorso al premio Carpi per la *Chimica fisica* pel 1893-94, si presentò il concorrente

Carrara Giacomo — *Dissociazione elettrolitica e legge della diluizione nei solventi organici.* (st. e ms.).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Corrispondenti Righi e Nobile, e il 9° fascicolo del *Trattato d'ottica fisiologica* del defunto Socio straniero H. von Helmholtz.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia delle scienze di Stockholm; il R. Istituto geologico di Budapest; la Società geologica di Darmstadt.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Le Università di Bonn e di Jena.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nell'adunanza del 6 gennaio 1895.

Baratta M. — I terremoti di Calabria. Roma, 1895. 8 .

Dubois E. — Pithecanthropus erectus, eine menschenaehnliche Uebergangsform aus Java. Batavia, 1894. 4°.

De Schio A. — Leggi del vento da 28109 registrazioni dell'anemografo di Vicenza. Dic. 1885. — Nov. 1886. Venezia, 1894. 4°.

Guccia G. B. — Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie. Palermo, 1894. 8°.

Id. — Sulla involuzione di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie. Palermo, 1894. 8°.

Helmholtz H. v. — Handbuch der Physiologischen Optik. Lief. IX. Leipzig, 1894. 8°.

Mariani A. — Scoperta scientifica della Scrittura sperimentale della meccanica razionale ecc. Roma, 1894. 8°.

Meli R. — Ing. cav. uff. prof. Giulio Pitocchi. Parole. Roma, 1894. 16°.

Müllner L. — Die Bedeutung Galileis für die Philosophie. Wien, 1894. 8°.

Nobile A. — Ascensioni rette determinate simultaneamente a Capodimonte ed a Cordoba. Napoli, 1894. 4°.

Id. — Risultati di talune osservazioni di distanze zenitali. Napoli, 1894. 4°.

Id. — Saggio di determinazione diretta della costante di una linea geodetica nell'ellissoide di rivoluzione schiacciato. Napoli, 1894. 4°.

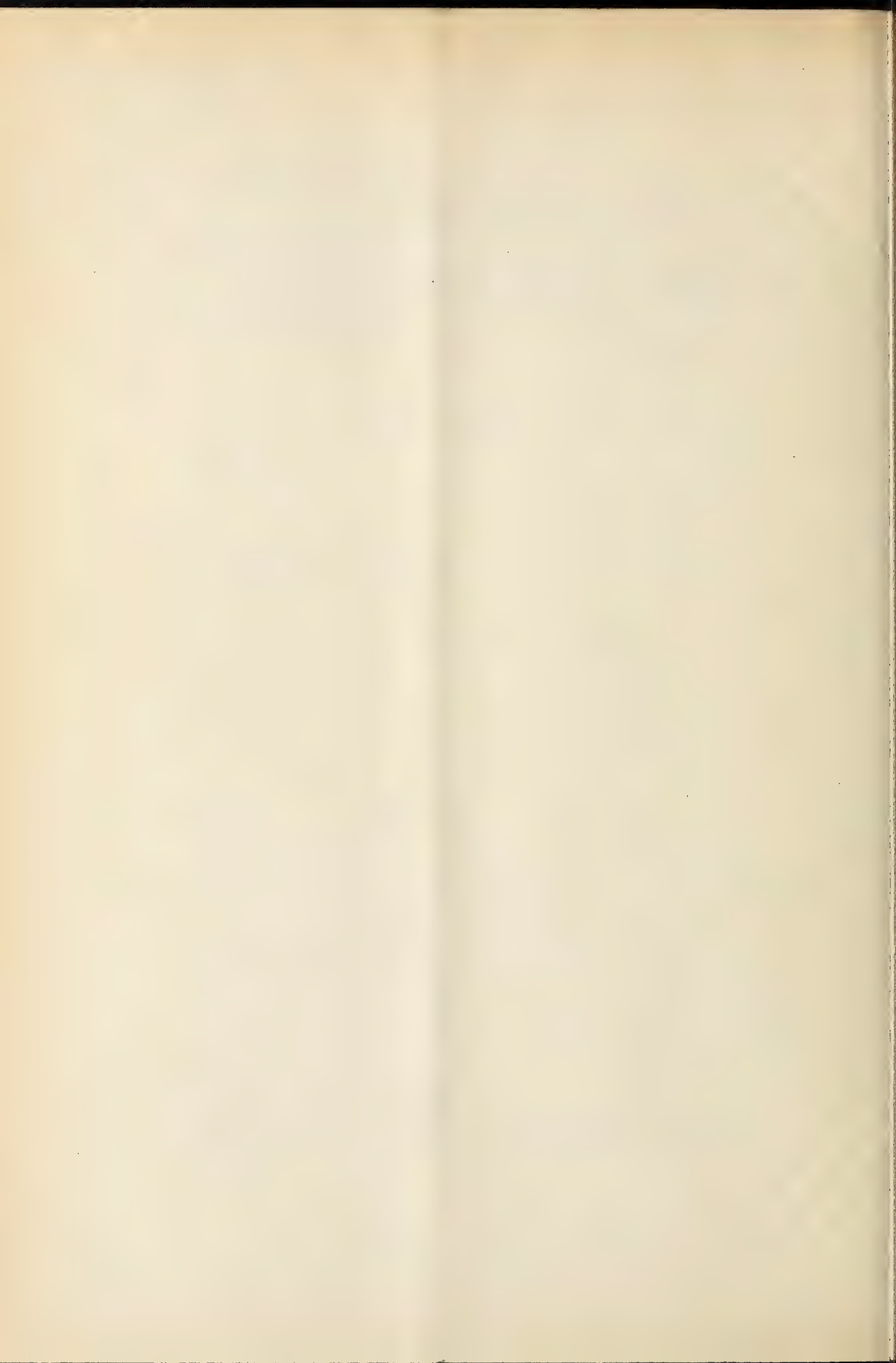
Id. — Studio iniziale del collimatore del cerchio meridiano Reichembach. — Heurtaux. Napoli, 1894. 4°.

Riefler S. — Die Präcisions- Uhren. mit vollkommen freiem Echappement &. München, 1894. 4°.

Righi A. — Sulle onde elettromagnetiche generate da due piccole oscillazioni elettriche ortogonali, ecc. Bologna, 1894. 4°.

Sacco F. — I molluschi dei terreni terziarî del Piemonte e della Liguria. Torino, 1894. 8°.

Studio sulle condizioni di sicurezza delle miniere e delle cave in Italia. Roma, 1894. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 gennaio 1895.

A. Messedaglia Vicepresidente

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque, e sopra certe equazioni differenziali lineari, che con queste curve si possono rappresentare.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

« 1. In questa Nota mi propongo di trattare il caso indicato con $b)$ al n. 4 della mia Nota precedente: *Sopra alcune considerazioni geometriche* ..... (1); il caso cioè, in cui la curva Γ quivi considerata ammette infinite trasformazioni projettive in sè stessa. Non potrà dunque questa curva essere di genere superiore a *uno*; e anzi nemmeno di genere *uno*, perchè fra le ∞^1 trasformazioni birazionali che mutano in sè stessa una data curva ellittica non vi può essere che un numero finito di trasformazioni projettive (dello spazio cui la curva appartiene) (2). Sarà dunque una curva *razionale*.

« Se la curva Γ è *normale* (quindi di ordine $n-1$) si potranno sempre scegliere le coordinate (ossia gli integrali indipendenti) y_i in modo che per i punti di detta curva (considerate cioè le y_i come funzioni della x) si annullino identicamente i determinanti della matrice:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

(1) Cfr. questi Rendiconti, p. 18.

(2) Cfr. ad es., per le curve *normali*, la Mem. del sig. Segre nei Math. Ann. XXVII, p. 297; oppure la Nota del sig. Klein nelle Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss.; Bd. 13, 1885; o anche: Klein-Fricke, *Theorie der elliptischen Modulfunctionen;* vol. II, p. 242. E per una curva non normale, basta osservare che ogni projettività su di essa deve esser *contenuta* in una projettività sulla curva normale qualsiasi, di cui si considera la prima come projezione.

« E queste y_i si potranno esprimere sotto la forma :

$$y_1 = z_1^{n-1}\,;\ y_2 = z_1^{n-2} z_2\,;\ y_3 = z_1^{n-3} z_2^2\,;\ \ldots\ldots\ y_n = z_2^{n-1}\,;$$

dal che segue che l'equazione differenziale proposta ha la proprietà notevolissima di ammettere come soluzioni le potenze $(n-1)^{\text{sime}}$ di tutti gli integrali dell'equazione differenziale lineare di 2° ordine, alla quale soddisfanno z_1 e z_2 (e quindi tutte le funzioni $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, dove λ_1 e λ_2 sono costanti arbitrarie). Questa nuova equazione differenziale ha pure coefficienti algebrici, che sono funzioni razionali sulla data superficie di Riemann, e si possono facilmente calcolare. L'integrazione dell'equazione proposta è quindi ricondotta a quella di quest'ultima equazione (e corrispondentemente, com' è noto, di un'equazione differenziale di 3° ordine contenente il *parametro differenziale* di Schwarz, oppure di un'*equazione di Riccati*). Ma l'integrazione di queste stesse equazioni non si può in generale ricondurre a un problema inferiore (1).

« 2. Per trattare il caso in cui la curva Γ è razionale, ma di un ordine $m \geq n$, normale quindi per uno spazio S_m superiore a S_{n-1}, bisogna premettere qualche osservazione sulle possibili trasformazioni projettive di una tal curva in sè stessa. Già è noto (cfr. ad es. Loria: Giorn. di Battaglini, vol. XXVI) che le ∞^3 collineazioni di uno spazio S_m, che trasformano in sè stessa una data curva razionale normale di questo spazio, non hanno che ∞^2 diverse piramidi fondamentali, ciascuna delle quali è tale per ∞^1 di quelle collineazioni. E sempre *due* vertici della piramide stanno sulla curva in discorso (e sono i punti uniti della projettività *sopra* questa), mentre gli altri $m-1$ sono dati dalle intersezioni degli S_k osculatori alla curva in uno di quei due punti ($k = 1, 2, \ldots.\, m-1$) rispett. cogli S_{m-k} osculatori nell'altro (2).

« Da questo, e dal fatto notissimo che, se una curva non normale ammette una trasformazione projettiva, questa deve essere *contenuta* in altra projettività di uno spazio superiore, che trasformi in sè stessa la curva normale di cui la prima è projezione, si trae facilmente che:

« *Se una curva razionale* C^m *appartenente a uno spazio* S_k (*dove* $k < m$) *ammette una trasformazione projettiva, ne ammetterà certo* ∞^1 *aventi una*

(1) Del gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta sappiamo soltanto, in questo caso, che esso è contenuto in un certo gruppo ∞^3 di sostituzioni lineari (gruppo che è *simile* a quello delle ∞^3 trasformazioni projettive di una data variabile qualsiasi, — nel senso che le operazioni dei due gruppi si corrispondono biunivocamente —). Perchè l'integrazione dell'equazione differenziale lineare di 2° ordine a cui siamo giunti possa ricondursi a un problema inferiore (di quadrature cioè, funzioni esponenziali, od operazioni algebriche) è necessario (e sufficiente) che il gruppo monodromico sia contenuto in un sottogruppo (algebrico) del gruppo ∞^3 considerato di sopra.

(2) Se però i due primi punti doppi (sulla curva) coincidono, anche gli altri $m-1$ coincideranno con questi. La projettività nello spazio S_m non avrà allora che un solo punto unito, e, di più, una retta, un piano, ... un S_{m-1} uniti e passanti tutti per questo punto. È questo però il solo caso in cui quelle collineazioni non hanno $m+1$ punti doppi distinti.

stessa piramide fondamentale, e sarà projezione di una C^m *normale da un* S_{m-k-1} *appartenente a una delle* ∞^2 *piramidi di* S_m, *che sono fondamentali per le trasformazioni projettive di quest'ultima curva* (1).

« Queste collineazioni dello spazio S_k hanno i loro $k+1$ punti doppî tutti distinti (2), e possono essere le sole che mutino in sè stessa la curva (projezione) C^m. Ma vi è anche un caso in cui questo gruppo ∞^1 di collineazioni ammette un'opportuna estensione (*Erweiterung*); ed è il caso in cui l'S_{m-k-1}, da cui si è projettata la curva normale di S_m ($m \geq 4$), ha una posizione, per così dire, *simmetrica* rispetto ai punti uniti su detta curva, che sono comuni alle ∞^1 projettività di S_m, per le quali quello stesso S_{m-k-1} è spazio unito (3). — Allora la curva ottenuta come projezione è trasformata in sè stessa da infinite altre projettività, che non formano di per sè un gruppo, ma ne formano bensì uno (misto) assieme alle precedenti. *Sulla curva*, sono queste le ∞^1 involuzioni, nelle quali gli stessi due punti uniti di prima si corrispondono in doppio modo (4).

« 3. Ritornando ora alla considerazione della curva Γ *attachée* all'equazione differenziale proposta, il risultato testè ottenuto ci mostra che, se detta curva è razionale e non normale (e ammette solo quel primo gruppo ∞^1 di trasformazioni projettive cogli stessi punti uniti), *le operazioni generatrici del gruppo monodromico dell'equazione differenziale avranno tutte le stesse soluzioni fondamentali*, ossia *tutte le sostituzioni lineari del gruppo dovranno ridursi a forma canonica colle stesse y*. E poichè si tratta di collineazioni aventi i loro punti doppî essenzialmente distinti, queste y saranno sulla data

(1) Queste curve razionali rientrano dunque nelle *curve* W studiate dai sigg. Klein e Lie (Compt. Rend., 1870; Math. Ann., IV); e sono anzi, assieme alle corrispondenti curve normali, le sole W algebriche. — Avremmo anche potuto prender le mosse direttamente da queste *curve* W, e domandarci quali fra esse sono algebriche; ma abbiamo preferito ricorrere alle considerazioni esposte di sopra, perchè di queste dovremo anche valerci più avanti. — È chiaro che le curve razionali e non normali, le quali ammettono infinite trasformazioni projettive in sè stesse, dovranno avere determinate singolarità (una cuspide, oppure determinati spazî iperosculatori). Così ad es. la cubica piana razionale deve avere una cuspide, e la quartica sghemba anche una cuspide, oppure due tangenti stazionarie (cfr. ad es. Klein-Lie, l. c.; o anche: Cremona, Rend. Ist. Lomb., 1868; Bertini, ibid., 1872; Cayley, Quart. Journ. of Mathem., VII; ecc.)

(2) Così avviene infatti per le collineazioni da noi considerate nello spazio S_m, a meno che due, e quindi tutti i punti doppî non coincidano *sulla curva*. E in questo caso la projezione fatta dall'unico punto o da uno degli spazî uniti sarebbe ancora una curva normale, di ordine inferiore.

(3) Vale a dire, se esso contiene l'intersezione dell'S_k osculatore alla curva in uno di quei due punti coll'S_{m-k} osculatore nell'altro, contenga sempre anche l'intersezione dell'S_{m-k} osculatore nel primo coll'S_k osculatore nel secondo.

(4) Il prodotto di due qualunque fra queste involuzioni è infatti una projettività, in generale non involutoria, avente quei certi due punti come punti uniti.

superficie di Riemann funzioni puramente *moltiplicative*, quindi *funzioni esponenziali di integrali Abeliani relativi a questa stessa superficie* (1).

« Questi integrali non potranno avere però che infiniti logaritmici; perchè, se avessero dei *poli*, questi sarebbero per le y punti singolari *essenziali* (cesserebbe cioè quivi il comportamento *regolare*) (2). L'integrale generale avrà la forma:

$$y = \lambda_1 e^{\Sigma_1} + \lambda_2 e^{\Sigma_2} + \cdots + \lambda_n e^{\Sigma_n}$$

dove le λ sono costanti arbitrarie, e le Σ integrali Abeliani della data superficie. L'equazione proposta è dunque integrabile per *quadrature* (3).

« Indichiamo ora con ($m \geq n$) l'ordine della curva Γ, e assumiamo le stesse y_i moltiplicative come coordinate nello spazio S_{n-1}; assumiamo cioè come punti di riferimento gli stessi punti uniti comuni alle ∞^1 collineazioni che mutano Γ in sè stessa. E siano precisamente (1) e (2) — quei punti cioè per cui y_1 o rispettivamente y_2 sono diversi da zero — i due punti fondamentali che stanno su questa curva. La projezione di Γ su di un piano coordinato qualsiasi (1) (2) (h) ($h = 3, 4, \ldots n$) dall'S_{n-4} fondamentale rispettivamente opposto avrà un'equazione del tipo:

$$y_1^{m-r}\, y_2^{r} = y_h^{m}, \qquad [1]$$

dove r, al variare di h, assume successivamente $n-2$ valori distinti nella serie $1, 2, \ldots m-1$ (4). Segue da ciò che posto $y_1 = e^{\Sigma_1}$ e $y_2 = e^{\Sigma_2}$, si può assumere, per $3 \leq h \leq n$:

$$y_h = e^{\frac{m-r}{m}\Sigma_1 + \frac{r}{m}\Sigma_2}$$

ossia $y_h = e^{\alpha_h \Sigma_1 + \beta_h \Sigma_2}$, dove α_h e β_h sono numeri razionali aventi per somma l'unità, e le differenze $\alpha_h - \beta_h$ sono tutte diverse fra loro. E possiamo anche estendere quest'espressione ai valori $h = 1$ e $h = 2$, ritenendo $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$. E se infine trasformiamo l'equazione differenziale proposta, ponendo:

$$z = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{2}(x) \qquad y = e^{\frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2}(x)} . v ;$$

(1) Il gruppo monodromico dell'equazione differenziale sarà in questo caso un gruppo *Abeliano*, vale a dire le operazioni in esso contenute saranno a due a due *permutabili*.

(2) L'ipotesi del *comportamento regolare*, di cui abbiamo fatto uso al n.° 4 della Nota prec., non risulterebbe però necessaria in questa 2ª Nota (tranne che nelle ultime considerazioni del n.° 5).

(3) — e funzioni esponenziali —, le quadrature essendo però da eseguirsi su funzioni *razionali* (nel campo di razionalità prescelto).

(4) Facciamo astrazione dalla costante, che dovrebbe comparire come fattore al 1° o 2° membro, ritenendola inglobata nella y_h. Le y_h non erano infatti determinate finora che a meno di un fattore costante; e adesso ancora, date y_1 e y_2, le rimanenti non lo sono che a meno di una radice m^{sima} dell'unità. La determinazione completa è però implicita nelle equazioni successive. — Sono queste appunto le equazioni a due termini (*zweigliedrig*) di cui fa cenno Wallenberg (l. c., p. 22 e seg.).

e indichiamo con v_h il nuovo integrale corrispondente a y_h, avremo evidentemente:

$$v_h = e^{(\alpha_h - \beta_h)z}.$$

« La nuova equazione differenziale fra v e z ha dunque *coefficienti costanti*, e la sua equazione caratteristica ha le radici tutte razionali e fra loro distinte.

« 4. Il caso particolare accennato alla fine del n. 2 si presenta quando gli $n - 2$ valori assunti da r nelle equazioni [1] — che sussistono, naturalmente, anche in questo caso — sono, benchè in altro ordine, gli stessi assunti da $m - r$. Allora accanto ad ogni equazione:

$$y_1^{m-r} y_2^r = y_h^m$$

ne dovrà sussistere un'altra:

$$y_1^r y_2^{m-r} = y_{h'}^m;$$

e a queste due potremo anche sostituire (per ogni coppia di indici h, h') le due seguenti:

$$y_1 y_2 = y_h y_{h'} \qquad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{m-2r} = \left(\frac{y_h}{y_{h'}}\right)^m. \qquad [2]$$

« Se n è numero dispari (≥ 5), dovrà essere m pari, e dovrà sussistere un'equazione:

$$y_1^{\frac{m}{2}} y_2^{\frac{m}{2}} = y_l^m \text{ [1]}.$$

« In questo caso gli integrali $y_1, y_2, \dots y_n$ non saranno più, in generale, moltiplicativi sulla data superficie di Riemann, ma il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta potrà contenere anche sostituzioni del tipo:

$$\begin{aligned} y'_1 &= \text{Cost.} \times y_2 \ \dots\ y'_h = \text{Cost.} \times y_{h'} \ \dots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (y'_l = \text{Cost.} \times y_l) \\ y'_2 &= \text{Cost.} \times y_1 \ \dots\ y'_{h'} = \text{Cost.} \times y_h \ \dots \end{aligned}$$

le quali però, applicate una seconda volta, ridànno le stesse funzioni primitive, a meno di fattori costanti. E da questo si trae che le y_i sono ancora funzioni moltiplicative, quindi esponenziali di integrali Abeliani, ma, in generale, *su di un'altra superficie di Riemann, in corrispondenza* (2, 1) *colla superficie data.* Si può ripetere perciò tutto il ragionamento del n.° prec., concludendo ancora che l'equazione differenziale proposta deve essere trasfor-

[1] L'S_{m-k-1}, da cui si è projettata la curva normale di S_m, non passerà allora per nessun punto in cui s'incontrino due $S_{\frac{m}{2}}$ osculatori a questa curva. E la y_l si potrà determinare in modo che sia $y_l^2 = y_1 y_2$, sicchè la curva Γ risulta contenuta in un cono quadrico di $(n-3)^{\text{sima}}$ specie (avente cioè per *asse* uno spazio S_{n-4}). — Per $n = 3$ la curva Γ si ridurrebbe essa stessa — in questo caso — a una conica multipla.

mabile in altra a coefficienti costanti, e integrabile essa stessa per quadrature (più un'estrazione di radice); anzi le differenze $\alpha_h - \beta_h$ sono in questo caso a due a due eguali ed opposte, sicchè l'equazione caratteristica mancherà dei termini di posto pari. Due qualunque v_h e $v_{h'}$ fra loro corrispondenti differiranno soltanto nel segno dell'esponente (saranno cioè fra loro reciproche), e la derivata $\frac{dz}{dx}$ sarà essa stessa la radice quadrata di una funzione razionale sulla superficie di Riemann data [1]. — Di più, le stesse v_h e $v_{h'}$, considerate come funzioni di x, soddisferanno a un'equazione differenziale lineare di 2° ordine, i cui coefficienti sono anche funzioni razionali sulla superficie data [2].

« Concludiamo perciò che l'equazione differenziale proposta (cfr. la Nota prec. cit.), nelle ipotesi da noi introdotte, deve sempre presentare uno di questi tre casi:

« 1.° *L'equazione è integrabile algebricamente, a meno forse di un fattore comune a tutte le soluzioni* (*il cui logaritmo si potrà determinare con una quadratura*);

« 2.° *L'equazione è riducibile ad altra dello stesso ordine con coefficienti costanti, ed è allora integrabile per quadrature e funzioni esponenziali* (*più, forse, un'estrazione di radice quadrata*);

« 3.° *L'equazione è riducibile ad altra, pure lineare, di 2° ordine* (*o ad una delle forme equivalenti*) [3].

« 5. Aggiungerò ancora poche osservazioni sul caso trattato nei n.i 2 e seg. di questa Nota.

« Ammesso che le *determinirende Fundamentalgleichungen* di Fuchs relative a tutte le operazioni generatrici del gruppo monodromico abbiano radici *razionali* (e non occorre aggiungere « *fra loro diverse* [4] », essendo noi già sicuri, per ragioni *geometriche*, di poter ridurre ogni sostituzione lineare

[1] Da quest'estrazione di radice proviene appunto la nuova irrazionalità, che ci obbliga a passare su di un'altra superficie. — Anche Wallenberg trova per questo caso (l. c., p. 37): $\psi'(x) = \frac{dz}{dx} = \sqrt{R(x)}$.

[2] Anche y_h e $y_{h'}$ dovranno soddisfare a una corrispondente equazione differenziale di 2° ordine a coefficienti algebrici, ma non più razionali (in generale) sulla data superficie.

[3] Se l'equazione proposta non è dunque integrabile algebricamente, lo è per quadrature, oppure si riduce a un'equazione di Riccati — il problema d'integrazione di grado immediatamente superiore —. Quadrature e equazione di Riccati si presentano — fatta eccezione per la sola quadratura del caso a,2) — quando la curva Γ ammette infinite trasformazioni projettive, e rientra perciò nelle *curve* W di Klein-Lie. Si può verificare passo per passo come *a un maggior numero di proiettività trasformanti in sè stessa la curva* Γ, *corrisponde sempre un problema di integrazione più complicato.*

[4] Tali anzi, che la differenza fra due radici qualunque di una stessa equazione sia un numero *non* intero (zero incluso).

del gruppo a forma canonica generale) gli integrali y_1, y_2, ... y_n potranno differire da funzioni algebriche della x — e precisamente da radici di funzioni razionali sulla superficie di Riemann data (o su quell' altra, in corrispondenza (2, 1) con questa) — solo per fattori che su questa stessa superficie non diventano mai nulli nè infiniti, e saranno perciò funzioni esponenziali di integrali Abeliani di 1ª specie (1).

« Se introduciamo perciò anche l'ipotesi che l'equazione differenziale proposta abbia coefficienti razionali (e appartenga quindi alla classe *Fuchsiana*), gli integrali stessi y_1, ... y_n saranno *radici di funzioni razionali della* x, qualora non si presenti il caso svolto al n. 4. Che se invece questo caso si presenta, saranno *funzioni esponenziali di integrali iperellittici*, e non saranno quindi, in generale, funzioni algebriche (2). Wallenberg esclude questo caso nell'ultimo enunciato della sua Memoria, introducendo l'ipotesi che l'equazione differenziale lineare proposta sia *irriduttibile* (3), sicchè allora il caso in cui la curva Γ è razionale e normale (di ordine $n - 1$) si presenta come sola eccezione all'integrabilità algebrica dell'equazione stessa (a meno forse di un fattore comune a tutte le soluzioni); ed è questo anche il risultato a cui è giunto Ludw. Schlesinger nel caso particolare $n = 4$ » (4).

(1) In particolare, se le y_i sono esse stesse funzioni algebriche di x, saranno certo radici di funzioni razionali sull'una o rispettivamente sull'altra superficie.

(2) Nell'esempio cui ricorre Wallenberg (l. c., p. 39), per mostrare che le y possano essere funzioni *non* algebriche di x, compaiono precisamente funzioni esponenziali di integrali ellittici di prima specie. E le equazioni ch'egli trova dover sussistere fra le diverse y sono precisamente le nostre [2]. Non compare invece nella nostra ricerca il caso degli integrali *ultraellittici* (l. c., p 33 e seg.) — dipendenti cioè dalla radice di indice superiore a 2 di una funzione razionale —, perchè la curva Γ non sarebbe allora algebrica.

(3) Se però, fra le tante definizioni che già furon date di equazione differenziale lineare irriduttibile (Frobenius, Kœnisberger, ...) noi ci fissiamo su quella che fu proposta (e sviluppata) recentemente dal sig. Beke per le equazioni a coefficienti razionali (Math. Ann.; Bd. 45, p. 279 e seg.), e che si potrebbe estendere (in modo ovvio) alle equazioni con coefficienti *razionali sopra una data superficie di Riemann qualsiasi*, risulterebbe ancora riduttibile l'equazione differenziale fra v e x, ma non quella fra y e x.

(4) Cfr. la Diss. cit., p. 38. Il nome *Gebilde zweiter Stufe* non è di facile interpretazione; ma si capisce che l'autore accenna al caso in cui le equazioni algebriche date fra y_1, ... y_4 definiscono una *curva*. Il caso indicato con (D) — cfr. p. 15 — è quello delle equazioni:

$$\begin{cases} y_2^2 - y_1 y_3 = 0 \\ y_3^2 - y_2 y_4 = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

che rappresentano appunto, come ognun vede, una cubica sghemba.

Matematica. — *Sopra alcune congruenze di grado* n, *dotate di una curva gobba singolare di ordine* n. Nota di P. VISALLI, presentata a nome del Socio CREMONA.

« 1. In una precedente Nota (1) sulle congruenze di grado n, dotate ciascuna di un piano eccezionale σ contenente un numero semplicemente infinito di rette della congruenza, che inviluppano una curva ψ della classe $n-1$, abbiamo tralasciato di occuparci del caso in cui fra i punti del piano σ, eccezionali per la congruenza, fra i quali esiste la relazione $\Sigma_r r^2 x_r = n^2+1$, ci fosse un punto P_n, n-plo.

« Lo studio di questo caso particolare forma l'oggetto della presente Nota.

« 2. Ponendo $x_n=1$, la formola precedente dà anche $x_1=1$; cioè nel piano σ vi sono due punti eccezionali, uno n-plo P_n, l'altro semplice P_1. Le rette della congruenza, che passano per P_n, formano un cono di ordine n, quelle uscenti per P_1 formano un fascio.

« 3. Sia π un piano qualunque. Le rette della congruenza determinano fra i punti dei due piani π, σ una corrispondenza $(1, n)$, dicendo corrispondenti un punto di π ed uno di σ che giacciono sulla stessa retta della congruenza.

« Ad un punto della retta $\pi\sigma$, considerato come appartenente a σ, corrisponde il punto medesimo; considerato come appartenente a π corrisponde lo stesso punto ed altri $n-1$ punti del piano σ.

« I punti fondamentali di σ sono il punto P_n, n-plo, il punto P_1 semplice, ed altri n punti semplici, S_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ nei quali le n rette della congruenza, giacenti in π, tagliano σ.

« Al punto P_n corrisponde una curva β di ordine n, intersezione del piano π con il cono (P_n), al punto P_1 corrisponde la retta $\omega_1\pi$, ove ω_1 indica il piano del fascio di rette della congruenza uscenti per P_1, ed ai punti S corrispondono le rette s'.

« Alle rette del piano π corrispondono curve α di ordine $n+1$, le quali passano con n rami per P_n, e semplicemente per P_1 e per i punti S_i.

« Nel piano σ vi sono $n+1$ rette fondamentali: $P_n P_1$, $P_n S_i$; quindi in π vi sono $n+1$ punti fondamentali semplici, i quali giacciono sulla curva β e sulle rette fondamentali, uno su ciascuna. Indicherò con $0'$ il punto fondamentale corrispondente alla retta $P_n P_1$, e con S'_i quello corrispondente alla retta $P_n S_i$.

« Al punto in cui $P_n P_1$ taglia $\pi\sigma$ corrisponde il punto medesimo; ma a tutti i punti di $P_n P_1$ corrisponde $0'$, quindi $0'$ coincide col punto $P_n P_1 . \pi\sigma$ ed il piano ω_1 passa per P_n.

(1) V. pag. 33.

« Da quanto si è detto risulta che ogni piano che passa per P_n e per una retta s'_i della congruenza, non passante per P_n è eccezionale, giacchè contiene un numero semplicemente infinito di rette della congruenza formanti un fascio il cui centro è uno dei punti in cui s'_i taglia il cono (P_n).

« Il centro di questo fascio lo chiameremo *polo* del piano $P_n S'_i$.

« 4. La curva α, corrispondente alla retta $\pi\sigma$, si compone della retta medesima, della retta $P_n P_1$, e di altre $n-1$ retta m_i uscenti per P_n. Una curva qualunque α corrispondente ad una retta a' di π, taglia $\pi\sigma$, oltre che nei punti S, nel punto per il quale passa a', e taglia in un punto, fuori di P_n, ciascuna delle $n-1$ rette m_i. Questi $n-1$ punti comuni alla curva α ed alle rette m_i, corrispondono al punto $a'.\pi\sigma$; quindi: ad ogni punto di $\pi\sigma$ corrisponde il punto medesimo ed altri $n-1$ punti situati sulle $n-1$ rette m_i, uno su ciascuna.

« 5. Le rette fondamentali di σ sono di prima specie; perciò ognuna ha $n-1$ punti congiunti. I punti congiunti alla retta $P_n P_1$, si trovano sulle rette m_i, uno su ciascuna. Risulta quindi che in un piano qualunque π non passante per P_n vi sono n punti eccezionali per la congruenza e che, per ognuno di essi, passa un fascio di rette della congruenza ed altre $n-1$ rette della congruenza medesima, esterne al piano del fascio.

« 6. La curva doppia del piano σ è una curva dell'ordine $2n$-1 con un punto $(2n-2)$-plo in P_n, e passa semplicemente per gli altri punti fondamentali.

« Essa taglia le rette fondamentali solo nei punti fondamentali, e taglia la retta $\pi\sigma$, nei punti S_i e negli $n-1$ punti ove π è tagliato dalle rette m_i.

« La curva limite di π è dell'ordine $2(n-1)$, della classe n, di genere zero, non passa per i punti fondamentali S' ed O', tocca in un punto ciascuna retta s' e la retta $\pi\omega_1$, in $2(n-1)$ punti la curva β, e tocca la retta $\pi\sigma$ negli $n-1$ punti per i quali passano le rette m_i.

« La curva limite non taglia in altri punti la retta $\pi\sigma$, quindi la curva ψ, inviluppo delle rette della congruenza, giacenti nel piano σ, è di ordine zero, cioè è formata da $n-1$ punti, che dirò punti Q; o in altri termini: le rette della congruenza, giacenti in σ formano $n-1$ fasci aventi i centri nei punti Q.

« Il cono (P_n) taglia il piano σ secondo la retta $P_n P_1$ ed altre $n-1$ rette r_i. Ad uno degli $n-1$ punti $\pi\sigma.r_i$ corrispondono il punto medesimo, un punto infinitamente vicino a P_n ed altri $n-2$ punti; quindi è necessario che uno dei punti Q sia della retta r_i; cioè:

« I punti Q si trovano sulle $n-1$ rette r_i, uno su ciascuna.

« 7. Come è noto, la curva limite di π, è la sezione di π con la superficie focale, segue quindi che la superficie focale, è dell'ordine $2(n-1)$, tocca il piano σ secondo le $n-1$ rette m_i, ed ha un punto $2(n-1)$-plo in P_n; cioè

« La superficie focale della congruenza è un cono razionale di ordine $2(n-1)$ della classe n, il quale ha per vertice P_n e tocca il piano σ lungo le $n-1$ rette m_i, ed il cono (P_n) secondo $2(n-1)$ generatrici.

« 8 Le curve congiunte alle rette di σ (nella trasformazione π, σ) sono dell'ordine n^2+n-1, passano con n rami per ogni punto S e per P_1 e con n^2-1 rami per P_n. La curva congiunta ad un punto S è di ordine n, passa semplicemente per i punti S e per P_1 e con $n-1$ rami per P_n. La curva congiunta a P_n è dell'ordine n^2-1, passa con $n-1$ rami per i punti S e per P_1 e con n^2-n rami per P_n.

« Ad una retta a per P_n in σ corrisponde in π una retta a' e la curva β corrispondente a P_n. Ad a' corrisponde a ed una curva α_n di ordine n, che è la curva congiunta ad a, in modo che ad ogni punto di a' corrisponde un punto di a ed $n-1$ punti della curva α_n. I punti corrispondenti determinano sulle rette a, a' due punteggiate prospettive, quindi le rette della congruenza, giacenti nel piano $a\,a'$, formano un fascio. Poichè al punto di a infinitamente vicino a P_n, corrisponde un punto d'intersezione di β con a', risulta che il centro del fascio giace su una generatrice del cono (P_n); quindi si ha:

« Per il punto P_n passa un numero semplicemente infinito di piani eccezionali per la congruenza, che dirò piani ω, in ciascuno dei quali vi è un fascio di rette della congruenza, avente il centro sul cono (P_n).

« La curva doppia taglia la retta $a=\omega\sigma$ in un punto, fuori di P_n; quindi la retta a' è tangente alla curva limite, cioè:

« Il cono focale della congruenza è inviluppato dai piani ω.

« 0 Abbiamo dimostrato che in un piano qualunque π vi sono n punti S', centri di n fasci di rette della congruenza, giacenti in piani ω, e che questi punti S' giacciono sul cono (P_n). Anche nel piano σ vi sono n centri di fasci di rette della congruenza, e sono il punto P_1 ed i punti Q, giacenti sulle n generatrici in cui il piano σ taglia il cono (P_n).

« Consideriamo ora un piano qualunque γ passante per P_n. Esso taglia la curva β del piano π in n punti B'_1, $B'_2\ldots$, B'_n ad ognuno dei quali corrisponde un punto infinitamente vicino a P_n, in una data direzione.

« Indichiamo con b_1, $b_2,\ldots b_n$ le n rette di σ condotte per P_n, secondo le direzioni corrispondenti rispettivamente a B'_1, $B'_2,\ldots$, B'_n. I piani $B'_1\;b_1$, $B'_2\;b_2,\ldots$, $B'_n\;b_n$ sono piani ω, su ciascuno di essi vi è un fascio di rette

della congruenza, ed i centri S′ di questi fasci sono sulle generatrici P_n B'_1, P_n B'_2, ..., P_n B_n, e quindi sul piano γ. Si ha perciò:

« Nella congruenza, oltre al punto eccezionale n-plo, vi è un numero semplicemente infinito di punti eccezionali semplici, il luogo dei quali è una curva gobba di ordine n tracciata sul cono (P_n)

« 10. Riepilogando si può dire:

« Le rette della congruenza formano un cono (P_n), di ordine n, ed un numero semplicemente infinito di fasci. Il luogo dei centri di questi fasci è una curva gobba (curva singolare della congruenza), tracciata sul cono P_n, ed i piani dei fasci medesimi inviluppano la superficie focale, che è un cono avente il vertice in P_n, dell'ordine $2(n-1)$, tangente lungo $2(n-1)$ rette al cono (P_n), e tangente secondo $n-1$ rette al piano σ.

« Le n rette della congruenza, uscenti per un punto qualunque A dello spazio, sono quelle che congiungono A con i poli S′ degli n piani ω, che per A si possono condurre tangenti al cono focale.

« Le n rette della congruenza, giacenti in un piano qualunque π dello spazio, sono quelle in cui π è tagliato dagli n piani ω, polari dei punti S′ in cui π taglia la curva singolare.

« Se il punto A (il piano π) è eccezionale, per esso passano (in esso giacciono) un fascio di rette della congruenza ed altre $n-1$ rette esterne al piano (non passanti per il centro) del fascio.

« 11. I risultati ottenuti precedentemente nell'ipotesi di $x_n = 1$ non si possono applicare se è $n = 1$, perchè in tal caso l'equazione $\Sigma r^2 x_r = n^2 + 1$ dà $x_1 = 2$. Sebbene la congruenza lineare sia abbastanza nota (1), tuttavia non crediamo superfluo far vedere come il metodo da noi seguito sinora si presti facilmente alla ricerca delle sue proprietà.

« Chiamiamo con P e Q i punti eccezionali semplici della congruenza situati sul piano σ. Fra i punti σ e quelli di un piano qualunque π, le rette della congruenza determinano una corrispondenza univoca di secondo grado.

« I punti fondamentali di σ sono i punti P, Q ed il punto S ove la retta s' della congruenza, giacente in π taglia σ. Le rette fondamentali di σ sono le rette dei lati del triangolo PQS. Alla retta PQ corrisponde in π il punto $S' \equiv \pi\sigma$. PQ, alle rette PS, QS corrispondono rispettivamente i punti P′, Q′ ove i piani dei fasci di rette della congruenza di centro P e Q,

(1) Vedi Reye, *Geometria di posizione.*

i quali passano per S' tagliano s'. La retta PQ è la retta della congruenza giacente in σ.

« Ad una retta qualunque a condotta per P in σ, corrisponde in π una conica formata dalla retta $P'S'$, corrispondente a P, e da una retta a' la quale taglia a e passa per Q'. Le rette della congruenza determinano sulle rette a, a' due punteggiate prospettive, al punto di a infinitamente vicino a P corrisponde il punto $a' \cdot S'P' \equiv M'$ ed al punto della retta a' infinitamente vicino a Q' corrisponde il punto $a \cdot SQ \equiv N$, quindi il centro del fascio di rette della congruenza, giacenti nel piano aa', è il punto di incontro delle rette PM', $Q'N$, ma ciascuna di queste due rette taglia la retta $P'Q$ esterna al loro piano, quindi il centro del fascio è il punto ove la retta $P'Q$ taglia il piano aa'.

« Indicando con u e v le due rette $P'Q$, PQ', si ha:

« Ogni piano del fascio che ha per asse la retta $u(v)$ è eccezionale per la congruenza, e contiene un fascio di rette il cui centro è l'intersezione del piano con la retta $v(u)$.

« Ogni retta della congruenza taglia u e v; e viceversa; cioè la congruenza lineare è il luogo delle rette che tagliano le due rette u, v.

« Queste due rette u, v singolari per la congruenza si dicono assi ».

Fisica terrestre. — *Sulla velocità superficiale di propagazione dei terremoti.* Nota di F. Bonetti e G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

« In una nota precedente (1) abbiamo asserito, senza dimostrarlo, che nell'ipotesi della propagazione rettilinea dell'urto sismico dal centro di scuotimento, la velocità superficiale, lungo gli archi di circolo massimo, è diversa da quella nell'interno della terra e variabile. Nella presente nota veniamo a dare la dimostrazione e qualche sviluppo di quel nostro assunto.

« Il calcolo che siamo per fare è basato sulle stesse ipotesi dei calcoli fatti nella Nota suaccennata, cioè:

1°) che la massa terrestre possa ritenersi in un primo studio ed approssimativamente come omogenea ed isotropa.

2°) che l'ipocentro possa considerarsi sensibilmente come un punto.

« Supponiamo di più che la scossa sentita alla superficie provenga direttamente dall'ipocentro.

« Sia I l'ipocentro (fig. 1), cioè il punto donde ha origine la scossa al tempo $t = 0$: supponiamo che questa si propaghi tutt'intorno nella massa solida terrestre, con una velocità u uniforme e costante, in modo che i punti

(1) V. pag. 38.

colpiti nello stesso tempo dalla scossa stiano sempre sulla superficie di una sfera. Dei punti della superficie il primo a risentire l'urto sarà l'epicentro E (cioè l'estremo più vicino ad I del diametro passante per I); poi successivamente la risentiranno gli altri punti a partire da E, in modo che in un dato istante i punti della superficie terrestre colpiti staranno tutti sopra un circolo minore, avente il centro sul diametro condotto per E. Sembrerà quindi alla superficie l'urto irradiare da E, seguendo i circoli massimi, che passano per

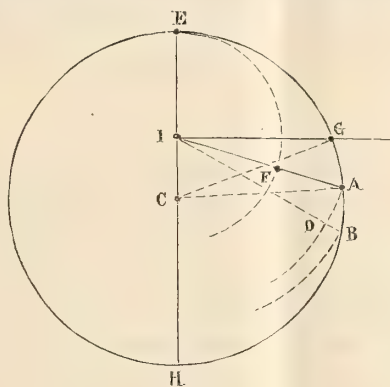



Fig. 1

questo punto. Sia v la velocità di propagazione dell'urto lungo il circolo massimo. Alla fine del tempo t esso sarà giunto in A, avendo percorso lungo il raggio il tratto $IA = ut$, e lungo il circolo massimo sulla superficie l'arco $EA = s$. Nel tempuscolo successivo dt la scossa si sarà avanzata sul raggio per un tratto $DB = udt$, e sul circolo massimo per un tratto $AB = ds$. Ora nel triangolo infinitesimo ADB, detto α l'angolo IAC, si ha

$$DB = AB \operatorname{sen} DAB = AB \operatorname{sen} \alpha \,;$$

quindi

$$u\,dt = ds \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt} = v = \frac{u}{\operatorname{sen} \alpha}\,. \tag{α}$$

Per esprimere sen α in funzione di t, detto r il raggio terrestre e δ la profondità EI dell'ipocentro, si ha dal triangolo IAC

$$\cos \alpha = \frac{u^2 t^2 + (2r - \delta)\,\delta}{2\,urt} \tag{β}$$

donde

$$v = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u^2 t^2 + (2r - \delta)\,\delta}{2\,urt}\right)^2}}\,. \tag{γ}$$

Per esprimere invece sen α in funzione dell'arco s si ha dal medesimo triangolo IAC

$$\frac{\operatorname{sen} ECA}{\operatorname{sen} IAC} = \frac{IA}{IC}\,, \quad \text{ossia} \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{s}{r}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\sqrt{r^2 + (r-\delta)^2 - 2r\,(r-\delta) \cos \frac{s}{r}}}{r - \delta}$$

donde

$$v = u \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r-\delta}\right)^2 - 2\frac{r}{r-\delta}\cos\frac{s}{r}}}{\operatorname{sen}\frac{s}{r}}. \qquad (\gamma')$$

Dalle due formole (γ) e (γ') si ricava che v è funzione della profondità δ dell'ipocentro e del tempo o della distanza superficiale s dall'epicentro.

Dalla (α) si raccoglie che v è sempre maggiore di u, perchè α è sempre minore di $\frac{\pi}{2}$.

« L'angolo α evidentemente è nullo in E e all'antipodo di E. Considerando poi il cerchio circoscritto al triangolo IAC, si giunge facilmente a dimostrare per via geometrica che l'angolo α è massimo, quando questo cerchio è tangente internamente al circolo EAH, cioè nel punto G, dove la retta IG, condotta perpendicolarmente al diametro EH, incontra la circonferenza. Ciò è facile vedere anche analiticamente. Infatti all'epicentro E si ha $ut = \delta$ a all'antipodo $ut = 2r - \delta$; quindi dalla (β) in tutti e due i casi si ricava $\cos\alpha = 1$: donde nel caso nostro $\alpha = 0$. Per determinare in modo semplice il massimo di α basta riflettere che, essendo l'angolo IAC sempre compreso

FIG. 2.

nel primo quadrante, il massimo di α corrisponde al minimo di $\cos\alpha$. Egualiando a zero la derivata prima rispetto a t del secondo membro della (β), si trova questo minimo corrispondere al caso di $(ut)^2 = (2r - \delta)\,\delta$ ossia di IA medio geometrico fra i segmenti in I del diametro: quindi ha luogo, come già si è detto, in G. È chiaro dunque che la v sarà infinita in E, poi andrà diminuendo fino ad avere un minimo in G, poi tornerà a crescere per divenire nuovamente infinita all'antipodo di E.

« Supponiamo ora che l'ipocentro coincida coll'epicentro, cioè a dire sia $\delta = 0$. Dalla figura 2 si ricava anche in questo caso particolare

$$v = \frac{u}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad (\alpha')$$

essendo α l'angolo DAB = EAC. Dal triangolo ECA si ha

$$\frac{EA}{2} = AC \cos \alpha\,, \text{ ossia } \frac{ut}{2} = r \cos \alpha\,; \text{ donde}$$

$$v = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{ut}{2r}\right)^2}}\,. \qquad (\delta)$$

Si può anche in questo caso esprimere v in funzione dell'arco s. Infatti si ha $2\alpha + \frac{s}{r} = \pi$; donde

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \frac{s}{2r} \quad \text{e} \quad v = \frac{u}{\cos \frac{s}{2r}}\,. \qquad (\delta')$$

Le formole (δ) e (δ') coincidono con quelle, che si otterrebbero facendo nelle (γ) e (γ') $\delta = 0$: ma abbiamo voluto dimostrarle direttamente per evitare l'indeterminazione che si presenta nelle (γ) e (γ'), quando vi si debba fare simultaneamente $\delta = 0$ e $t = 0$ o $s = 0$. L'analisi della (α') ci dice subito che in E la v è eguale ad u, perchè il limite dell'angolo EAC in E è $\frac{\pi}{2}$, e che va crescendo poi continuamente fino a divenire infinita all'antipodo H, dove è nullo il detto angolo. Ciò del resto è facile ricavare anche dall'analisi delle due (δ) e (δ').

« Finalmente, se l'ipocentro si suppone al centro stesso della terra, siccome la scossa giungerà simultaneamente a tutti i punti della superficie terrestre, la velocità superficiale sarà dapertutto infinita. Ed infatti, supposto l'ipocentro I in C, si vede dalla prima figura che l'angolo IAC $= \alpha$ è costantemente nullo, e quindi anche sen α: si ottiene così dalla (α) $v = \infty$.

*
* *

« Passiamo ora a calcolare la *velocità superficiale media* V tra l'epicentro E ed un punto qualunque A. Questa è precisamente quella che risulta dal metodo che tengono ordinariamente i sismologi nel calcolare la velocità di propagazione dei terremoti, quando cioè dividono lo spazio percorso per il tempo impiegato a percorrerlo, e contano questo spazio sul circolo massimo passante per l'epicentro.

« Si può trovare la V nel caso generale direttamente, osservando che il tempo impiegato dalla scossa a percorrere l'arco EA (fig. 1) è precisamente

quello che vien impiegato a percorrere il tratto $FA = IA - IF = IA - \delta$ nell'interno della massa terrestre. Quindi detto β l'angolo ECA sarà

$$V = \frac{\text{arc. EA}}{\frac{FA}{u}} = u \frac{\text{arc. EA}}{FA} = u \frac{\beta r}{IA - \delta} . \qquad (\varepsilon)$$

Si può esprimere V in funzione di t o di s, come abbiamo fatto per la v. Infatti si ha $IA = ut$, e dal triangolo IAC si ricava

$$\overline{IA}^2 = (ut)^2 = \delta^2 + 4r(r - \delta) \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \qquad (\zeta)$$

donde

$$\operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(ut)^2 - \delta^2}{r(r - \delta)}} . \qquad (\zeta')$$

« Dalla (ζ') si ottiene

$$\beta = 2 \text{ arc. sen } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(ut)^2 - \delta^2}{r(r - \delta)}}$$

e quindi

$$V = u \cdot \frac{2r \text{ arc. sen } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(ut)^2 - \delta^2}{r(r - \delta)}}}{ut - \delta} \qquad (\eta)$$

Così sostituendo nella (ε) ad IA il suo valore tratto dalla (ζ) si ha

$$V = u \frac{\beta r}{\sqrt{4r(r - \delta) \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} + \delta^2} - \delta} \qquad (\eta')$$

Dalle due espressioni (η) ed (η') di V si vede che anche la velocità media è funzione della profondità dell'ipocentro, e del tempo o della distanza superficiale dall'epicentro.

« Essendo l'arco EA maggiore della corda EA, e questa maggiore della differenza tra i due lati IA ed IE del triangolo EIA, cioè di $IA - \delta$, sarà $\frac{\beta r}{IA - \delta} > 1$; e però la V sarà sempre maggiore della u.

« Si capisce facilmente che la velocità media ha da avere per limite in E la velocità vera in questo punto, e quindi avrà per limite anch'essa l'infinito. Infatti se l'arco EA diviene infinitesimo, la differenza FA diviene infinitesima di ordine superiore. I secondi membri delle (η) ed (η') per $ut - \delta = 0$ o per $\beta = 0$ si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma facendo il quoziente delle derivate prime dei numeratori e denominatori si ottiene da tutte e due l'espressioni $V = \infty$.

« Il valore della V tra l'epicentro e il suo antipodo si vede direttamente che deve essere

$$V = u \frac{\pi}{2} \frac{r}{r - \delta}$$

e questo valore appunto ci danno le (η) ed (η'), quando si faccia nella prima $t = \frac{2r - \delta}{u}$, e nella seconda $\beta = \pi$.

« Per dare un'idea delle variazioni della V, abbiamo calcolato nella seguente tabella in base alla formola (η') i valori che assume il coefficiente di u di dieci in dieci gradi fra 0° e 180°, in un caso particolare molto semplice, cioè posto $r = 1$ e $\delta = \frac{1}{2}$. Fra 0° e 10°, come fra 90° e 110°, abbiamo inserito dei punti intermedi.

β		β	
0°	∞	90°	2,5416
1	114,6357	95	2,5262
3	38,2580	100	2,5179
5	23,0200	105	2,5161
10	11,6604	110	2,5203
20	6,1183	120	2,5452
30	4,3758	130	2,5907
40	3,5679	140	2,6563
50	3,1252	150	2,7423
60	2,8610	160	2,8502
70	2,6977	170	2,9822
80	2,5978	180	3,1416

« Si vede da questa tabella che fra 100° e 110° la funzione ha un minimo. D'altronde l'esistenza almeno di un minimo si può dimostrare anche in generale, osservando che il valore del coefficiente di u per $\beta = \frac{\pi}{2}$ è minore di quello per $\beta = \pi$, mentre per $\beta = 0$ è infinito. Infatti ponendo nella (η') $\beta = \frac{\pi}{2}$, si ha per il detto valore

$$\frac{\frac{\pi r}{2}}{\sqrt{r^2 + (r - \delta)^2} - \delta}$$

che è evidentemente minore di

$$\frac{\frac{\pi r}{2}}{r - \delta}$$

valore già trovato di sopra per $\beta = \pi$.

« Consideriamo in ultimo anche per la velocità media il caso particolare, in cui l'ipocentro coincida coll'epicentro, cioè sia $\delta = 0$. Trattiamo anche questa questione direttamente per evitare l'indeterminazione, di cui già si è parlato. Dalla figura 2 si ha

$$V = \frac{\text{arc. EA}}{t} = \frac{\beta r}{t} \cdot$$

Per esprimere tutto in funzione di β si osservi che dal triangolo ECA si ha $\frac{EA}{2} = \frac{ut}{2} = r \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$ (θ), donde $t = \frac{2r}{u} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$; e quindi

$$V = u \frac{\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} \cdot \qquad \lambda)$$

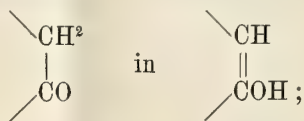
« Volendo esprimere invece tutto in funzione di t, si ottiene dalla (θ) $\beta = 2 \text{ arc. sen } \frac{ut}{2r}$: quindi

$$V = \frac{2r}{t} \operatorname{arc\,sen} \frac{ut}{2r} \cdot \qquad (\lambda')$$

Dalla (λ) si ricava che V è sempre maggiore di u, salvo in E dove finisce per essere eguale ad u. Va crescendo poi continuamente finchè in H si ha $V = u \frac{\pi}{2}$ ».

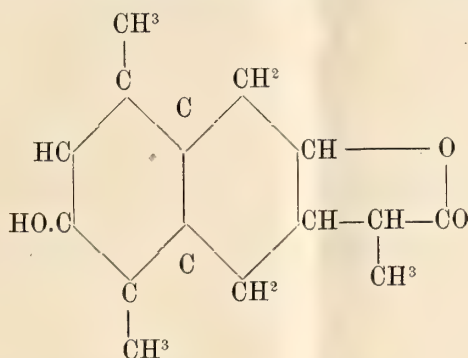
Chimica. — *Sulla struttura degli acidi santonosi.* Nota di Americo Andreocci, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

« In una mia Memoria: *Sopra due nuovi isomeri della santonina e due nuovi isomeri dell'acido santonoso* (1), dimostrai che la desmotropo-santonina, da me ottenuta per azione dell'acido cloridrico sulla santonina, contiene al posto del CO cetonico di questa l'OH naftolico, essendosi cangiato per desmotropia il lato della molecola

```
\CH²          \CH
 |      in     ||
/CO           /COH ;
```

e che l'azione dell'idrato potassico a 200° trasforma questo nuovo isomero della santonina in un altro, da me chiamato iso-desmotropo-santonina, contenente l'OH naftolico.

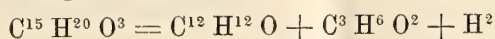
(1) Gazz. chim. ital., vol. XXIII, parte 2ª p. 468.

« Rappresentai le due desmotropo-santonine con questa struttura:

```
          CH3
          |
          C       CH2
        /   \  C  /  \
    HC/       \/      \CH ———— O
     |         |       |       |
    HO.C\     /\      /CH—CH—CO
         \ /  C  \  /      |
          C       CH2      CH3
          |
          CH3
```

derivandola da quella ora adottata per la santonina.

« Riducendo le desmotropo-santonine, pervenni a due nuovi isomeri dei due acidi santonosi, l'uno attivo, l'altro inattivo, preparati da Cannizzaro e Carnelutti (¹) per riduzione della santonina.

« Trattai i quattro acidi santonosi con idrato potassico a 360° e da tutti ottenni nettamente e quantitativamente il dimetil-naftol (²) acido propionico ed idrogeno secondo quest'equazione:

$$C^{15}H^{20}O^{3} = C^{12}H^{12}O + C^{3}H^{6}O^{2} + H^{2}$$

« Esaminando le proprietà dell'acido santonoso, derivante dalla riduzione dell'iso-desmotropo-santonina, trovai che esse coincidono perfettamente con quelle dell'antico acido santonoso attivo; solo differisce il senso della rotazione che questi acidi determinano sul piano della luce polarizzata; infatti: il primo lo devia di — 74° e l'ultimo di + 74°.

« Trovai inoltre, che l'acido racemo santonoso derivante dall'unione dell'acido destro e levo-santonoso a parti uguali, è identico coll'acido santonoso inattivo dei due sopra citati chimici.

« Ho confermato ed illustrato con una numerosa serie di derivati la stereoisomeria degli acidi: levo, destro e racemo santonosi; il di cui studio sarà dettagliatamente pubblicato fra poco. Per ora mi limito a riassumere che fra i composti levo-santonosi e quelli destro-santonosi esiste, come era prevedibile, una rassomiglianza perfetta in tutte le proprietà eccettuato il senso del potere rotatorio; mentre i composti racemici, derivanti dalla loro unione, si differenziano nelle proprietà fisiche e sono invece identici a quelli corrispondenti preparati direttamente coll'acido iso-santonoso (inattivo).

« L'acido desmotropo-santonoso, che ottenni riducendo la desmotropo-santonina, ha, sia per la sua genesi che per l'insieme delle sue proprietà chimiche, una stretta parentela coi tre acidi santonosi stereoisomeri e perciò ho creduto rappresentare tutti i quattro acidi santonosi con una stessa struttura,

(¹) Gazz. chim. ital., vol. XII, pag: 393.
(²) Gazz. chim. ital., vol. XII, p. 406.

per la quale si deve interpretare che la riduzione della santonina e delle desmotropo-santonine avvenga nel modo seguente:

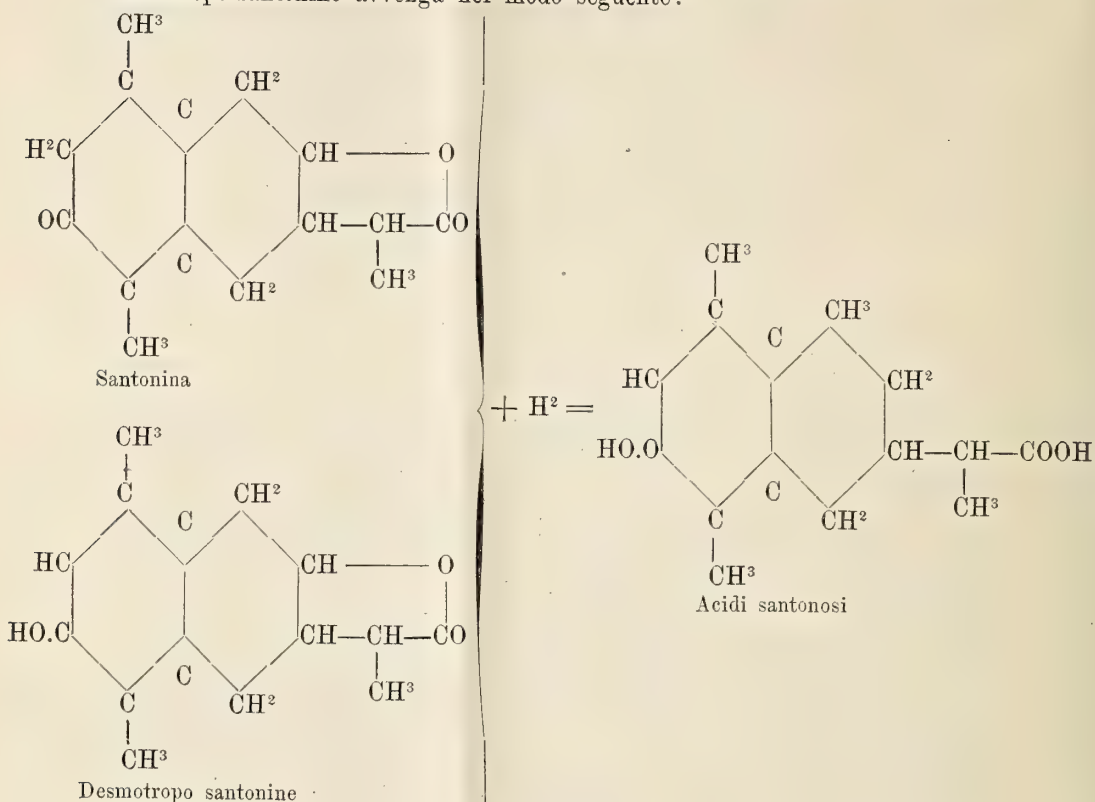
CH^3 C C CH^2 H^2C CH —— O OC CH—CH—CO C C CH^2 CH^3 CH^3

Santonina

CH^3 C C CH^2 HC CH —— O HO.C CH—CH—CO C C CH^2 CH^3 CH^3

Desmotropo santonine

$+ H^2 =$

CH^3 C C CH^3 HC CH^2 HO.C CH—CH—COOH C C CH^2 CH^3 CH^3

Acidi santonosi

« Risulta da ciò: 1° che l'H nascente ha agito nel gruppo lattonico, come avviene generalmente nella riduzione dei lattoni; 2° che l'OH naftolico degli acidi santonosi è quello stesso che esisteva nelle desmotropo-santonine e perciò deriva dal CO cetonico dalla santonina; 3° che gli acidi santonosi sono i derivati di una naftalina tetraidrogenata con tutti gl'idrogeni aggiunti nell'anello che porta il residuo dell'acido propionico.

« Per confermare questa struttura da me assegnata agli acidi santonosi e togliere definitivamente i dubbi emessi in proposito dal sig. J. Klein (1) ho istituito ulteriori ricerche, che si basano sulle seguenti considerazioni:

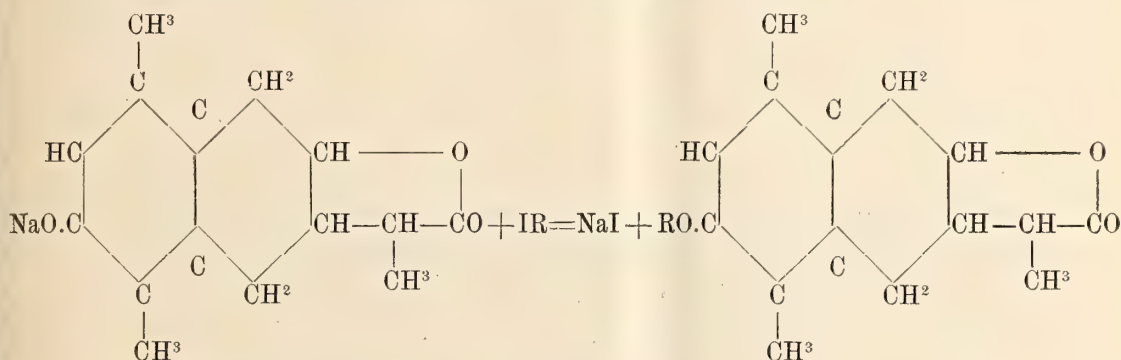
1ª Se veramente l'OH naftolico degli acidi santonosi corrisponde al CO cetonico della santonina e non deriva dall'apertura del gruppo lattonico, le etil o le metil-desmotropo-santonine, nelle quali l'H dell'OH naftolico è sostituito dal radicale alcoolico, ridotte devono dare gli acidi metil od etil-santonosi identici a quelli che direttamente si possono preparare dai corrispondenti acidi santonosi, per l'azione dell'alcoolato sodico e del joduro di metile o di etile.

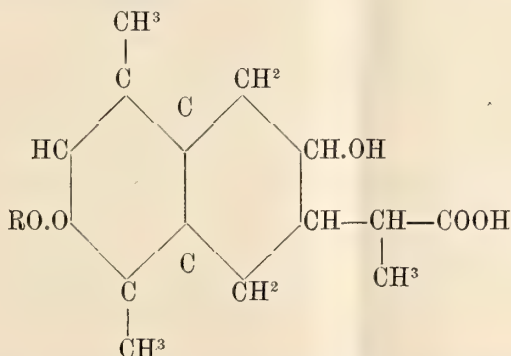
(1) *Ueber das Santonin.* I, Archiv der Pharmacie 230, p. 499-513; *Ueber das Santonin.* IV, Archiv der Pharmacie 231, p. 695-704 e Berl. Ber. 1893, p. 2506.

2ª Se gli acidi santonosi non contengono un legame etilenico nella catena laterale, non devono addizionare gli alogeni.

« I risultati delle ricerche in proposito, quì brevemente riassunti, confermarono queste mie idee sulla struttura degli acidi santonosi.

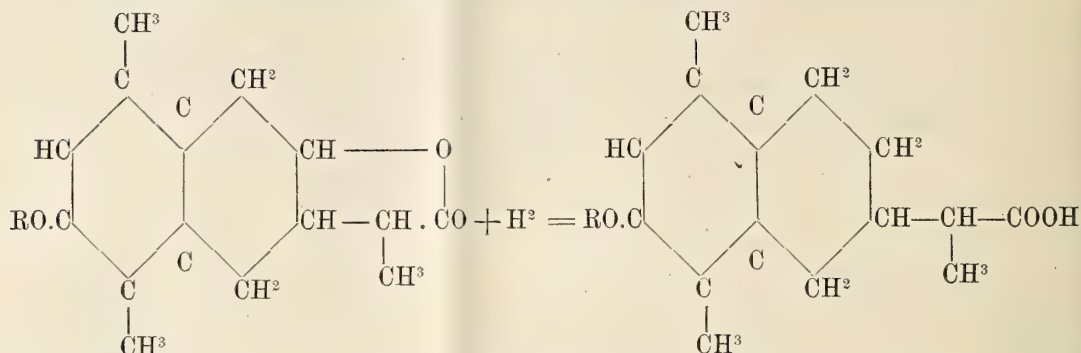
« Ottenni le due metil e le due etil-desmotropo-santonine, per l'azione dell'alcoolato sodico e del joduro alcoolico corrispondente sulla desmotropo o sull'iso-desmotropo-santonina. Si forma prima il composto sodico, che reagisce col joduro alcoolico secondo l'equazione seguente:

```
      CH³                                                CH³
      |                                                   |
      C       CH²                                         C       CH²
     / \  C  / \                                         / \  C  / \
  HC/   \ / /   \CH ——— O                             HC/   \ / /   \CH ——— O
    |    |      |       |                               |    |      |       |
NaO.C\   |     /CH—CH—CO + IR = NaI + RO.C\   |     /CH—CH—CO
      \ / \ C /   |                                    \ / \ C /   |
      C    CH²    CH³                                   C    CH²    CH³
      |                                                 |
      CH³                                               CH³
```

« I derivati alcoolici, così ottenuti, hanno i caratteri degli eteri fenolici e dei lattoni; infatti non sono più, come le desmotropo-santonine, solubili a freddo nelle soluzioni acquose degli idrati alcalini; si disciolgono solo in quelle bollenti e con gran lentezza, poichè aprendosi il legame lattonico si trasformano nei sali del loro ossiacido

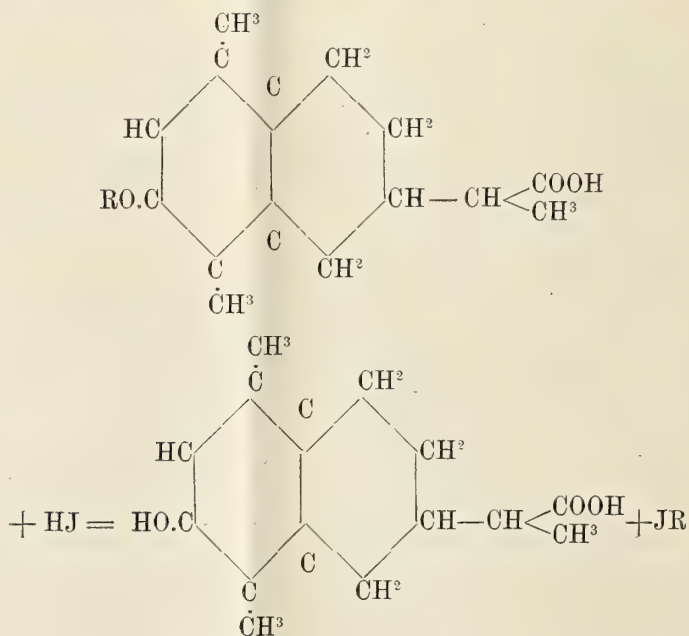
```
          CH³
          |
          C       CH²
         / \  C  / \
      HC/   \ / /   \CH.OH
        |    |      |
   RO.O\     |     /CH—CH—COOH
        \   / \ C /     |
         C      CH²     CH³
         |
         CH³
```

Questo come gli acidi desmotropo-santoninici, libero non è stabile, ed infatti perde subito acqua e si ritrasforma nel suo lattone (metil od etil-desmotropo, o iso-desmotropo-santonina).

« L'acido iodidrico concentrato e bollente a 127° distacca il radicale alcoolico dalle desmotropo-santonine etilate e metilate, ma non rigenera le desmotropo-santonine, essendo queste ridotte nell'acido santonoso che gli corrisponde.

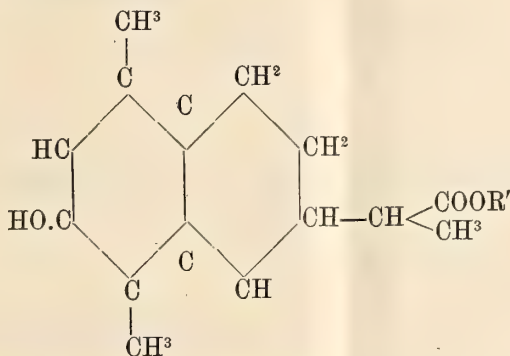
« L'idrogeno nascente (acido acetico e polvere di zinco) converte quantitativamente la metil e la etil-desmotropo-santonina negli acidi etil e metil-desmotropo-santonosi e la metil e l'etil-iso-desmotropo-santonina negli acidi metil ed etil-levo-santonosi, ciò che si esprime secondo l'equazione seguente:

```
     CH³                                               CH³
     |                                                  |
     C         CH²                                      C         CH²
   /   \   C  /   \                                   /   \   C  /   \
HC/     \   /      \CH ——— O                       HC/     \   /      \CH²
 |       |          |      |                        |       |          |
RO.C\     |         /CH — CH . CO + H² = RO.C\      |         /CH—CH—COOH
     \   / \  C    /       |                         \   / \  C    /   |
      C      CH²          CH³                          C      CH²      CH³
      |                                                |
     CH³                                              CH³
```

« Infatti: 1° tutti questi acidi metilati od etilati si scindono nettamente con l'acido jodidrico bollente nel joduro di metile o di etile e nel corrispondente acido desmotropo o levo santonoso (¹) secondo l'equazione:

```
              CH³
              C          CH²
            /   \   C  /    \
        HC/       \   /      \CH²
         |         |          |
      RO.C\        |         /CH — CH<COOH
            \    /   \  C   /          CH³
              C         CH²
             CH³

              CH³
              C          CH²
            /   \   C  /    \
        HC/       \   /      \CH²
         |         |          |
+ HJ = HO.C\       |         /CH—CH<COOH  + JR
            \    /   \  C   /        CH³
              C         CH²
             CH³
```

(¹) Per l'acido desmotropo-santonoso, ne riconobbi l'identità con quello preparato dalla riduzione della desmotropo-santonina, esaminando tutte le sue proprietà, non escluso il potere rotatorio, ed esaminando anche le proprietà del suo etere metilico. Per l'acido levo-santonoso oltre l'esame delle proprietà, e di quelle del suo etere etilico, volli anche trasformarlo nell'acido racemo-santonoso, unendolo con un peso uguale di acido destro-santonoso; così ne stabilii l'identità coll'acido santonoso proveniente dalla riduzione della iso-desmotropo-santonina.

2° I suddetti sono identici con gli acidi etil e metil-santonosi provenienti dall'azione dei joduri alcoolici e dell'alcoolato sodico sopra gli eteri degli acidi desmotropo o levo-santonosi

CH^3
C　C　CH^2
HC　CH^2
HO.C　$CH-CH<^{COOR'}_{CH^3}$
C　C　CH
CH^3

od anche direttamente sopra gli acidi liberi.

« Riconobbi l'identità degli acidi etil e metil-santonosi ottenuti coi due metodi, esaminando tutte le proprietà, specialmente il potere rotatorio, e nel caso dei levo-derivati col prepararne i racemo-composti.

« Il bromo a freddo sostituisce un atomo d'idrogeno degli acidi santonosi, ma non si addiziona in nessuna condizione.

« La reazione avviene meglio cogli eteri santonosi; infatti con questi è teoretica e saponificando poi con potassa acquosa gli eteri bromo-santonosi si ottengono facilmente gli acidi bromo-santonosi.

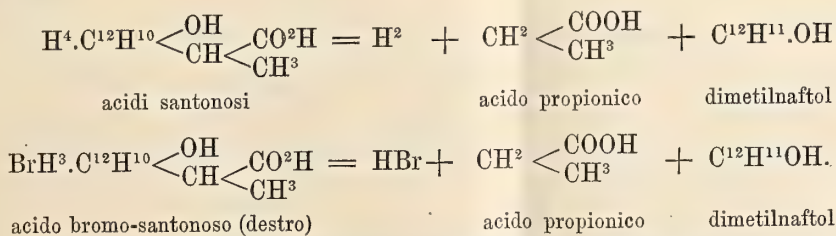
« Ho stabilito, che gli acidi bromo-destro, bromo-levo e bromo-racemo santonosi hanno il bromo al posto di uno dei 4 atomi d'idrogeno aggiunti al nucleo naftalico, coll'azione dell'idrato potassico a 360° sull'acido destro-bromo-santonoso, il quale si scinde in acido bromidrico, in acido propionico e nel dimetil-naftol identico a quello proveniente dall'analoga scissione degli acidi santonosi coll'idrato potassico.

« Le due scissioni sono parallele, come lo dimostrano le equazioni seguenti:

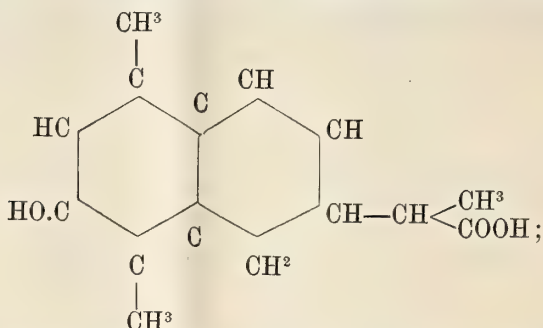
$$H^4.C^{12}H^{10}<^{OH}_{CH<^{CO^2H}_{CH^3}} = H^2 + CH^2<^{COOH}_{CH^3} + C^{12}H^{11}.OH$$

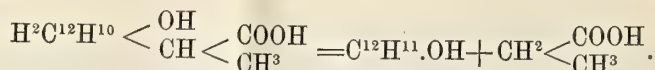
acidi santonosi　　acido propionico　　dimetilnaftol

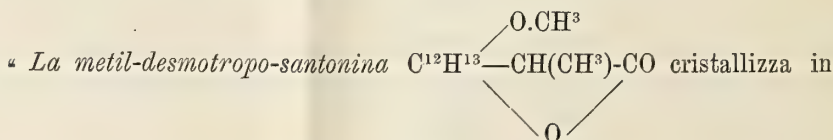
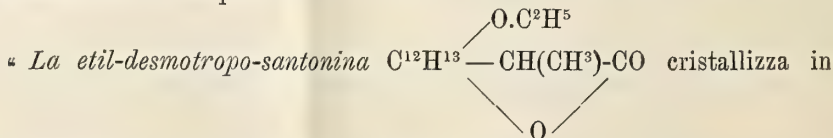
$$BrH^3.C^{12}H^{10}<^{OH}_{CH<^{CO^2H}_{CH^3}} = HBr + CH^2<^{COOH}_{CH^3} + C^{12}H^{11}OH.$$

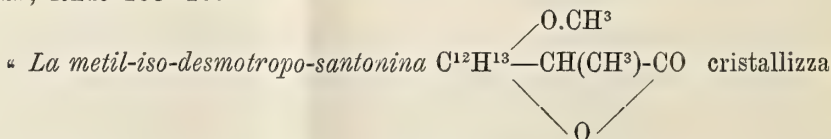
acido bromo-santonoso (destro)　　acido propionico　　dimetilnaftol

« Dall'acido bromo-destro-santonoso riscaldato coll'idrato potassico a 270°, si distacca soltanto l'acido bromidrico (quantitativamente) senza che si formino tracce di naftol, poichè la catena propionica resta attaccata al nucleo naftalico. Si ottiene così un acido fusibile a 170°, che non contiene bromo

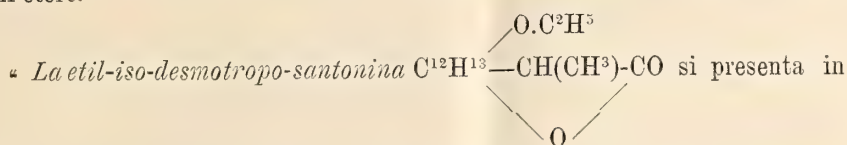
e che dalla sua genesi posso già arguire essere un acido santonoso disidrogenato del tipo biidro-dimetil-naftalina e rappresentabile collo schema

$$\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ C \quad CH \\ HC \quad C \quad CH \\ HO.C \quad C \quad CH—CH<^{CH^3}_{COOH}; \\ C \quad CH^2 \\ | \\ CH^3 \end{array}$$

infatti, per un'ulteriore azione del calore si scinde in dimetilnaftol ed acido propionico

$$H^2C^{12}H^{10} < {OH \atop CH < {COOH \atop CH^3}} = C^{12}H^{11}.OH + CH^2 < {COOH \atop CH^3}.$$

Sarà oggetto di ulteriori ricerche lo studio di quest'acido disidrogenato.

« Concluderò facendo rilevare che la formazione degli acidi bromo-santonosi a freddo, esclude l'esistenza di legami etilenici negli acidi santonosi; e che la scomposizione dell'acido bromo-destro-santonoso, dimostra ancor meglio di quella degli acidi santonosi, la struttura di tali sostanze, dipinge il distacco dei residui acidi coll' idrogeno aggiunto al nucleo naftalico e dimostra che questi non sono sostituiti dall'OH dell'idrato potassico come voleva sostenere il sig. Klein per spiegare il distacco del residuo propionico (1).

« *La metil-desmotropo-santonina* $C^{12}H^{13}{\overset{O.CH^3}{—}}CH(CH^3)\text{-}CO$ (con ponte O) cristallizza in lunghissimi aghi setacei, fusibili a 152°, è solubile nell'etere e nell'alcool, quasi insolubile nell'acqua.

« *La etil-desmotropo-santonina* $C^{12}H^{13}{\overset{O.C^2H^5}{—}}CH(CH^3)\text{-}CO$ (con ponte O) cristallizza in lunghi aghi lucenti, è solubile nell'alcool e nell'etere, e quasi insolubile nell'acqua; fonde 168°-169°.

« *La metil-iso-desmotropo-santonina* $C^{12}H^{13}{\overset{O.CH^3}{—}}CH(CH^3)\text{-}CO$ (con ponte O) cristallizza

(1) *Ueber das Santonin.* IV. Archiv der Pharmacie 1893, N. 231, p. 702.

in piccoli aghi riuniti a mammelloni fusibili a 111°-112°, solubili nell'alcool e nell'etere.

« *La etil-iso-desmotropo-santonina* $C^{12}H^{13}\begin{matrix}\diagup O.C^2H^5 \\ —CH(CH^3)-CO \\ \diagdown O \diagup\end{matrix}$ si presenta in grosse tavole esagonali, incolori, di lucentezza adamantina, che ingialliscono superficialmente alla luce. Fonde a 82°, è solubilissima nell'alcool e nell'etere, solubile nella ligroina e quasi insolubile nell'acqua.

« *L'acido metil-desmotropo-santonoso* $C^{12}H^{14}<\begin{matrix}O.CH^3 \\ CH(CH^3)-COOH\end{matrix}$ ed il suo etere $C^{12}H^{14}<\begin{matrix}O.CH^3 \\ CH(CH^3)-COO.CH^3\end{matrix}$ sono stati già descritti nella mia Memoria: *Sopra due nuovi isomeri della santonina* ecc. (¹).

« *L'acido etil-desmotropo-santonoso* $C^{12}H^{14}<\begin{matrix}O.C^2H^5 \\ CH(CH^3)-COOH\end{matrix}$ preparato tanto dall'etil-desmotroposantonina, quanto dall'acido desmotroposantonoso, si presenta in grossi prismi triclini, lucenti, fusibili a 127°; è solubile nell'alcool, nell'etere, ed insolubile nell'acqua; si discioglie nei carbonati alcalini ed il suo etere etilico è oleoso alla temperatura ordinaria.

« *L'acido metil-levo-santonoso* $C^{12}H^{14}<\begin{matrix}OCH^3 \\ CH(CH^3).COOH\end{matrix}$ preparato o coll'uno o l'altro dei due metodi, si presenta in mammelloni bianchi semi-trasparenti, è solubilissimo nell'etere e nell'alcool, meno nella ligroina e fonde a 116°-17°. Si discioglie nei carbonati alcalini. Il suo etere metilico è un olio alla temperatura ordinaria. Unito coll'acido metil-destro-santonoso (dall'acido destro-santonoso) forma l'acido *racemo-metil-santonoso*, cristallizzato in piccoli prismi fusibili a 135°-135°5.

« *L'acido etil-levo-santonoso* $C^{12}H^{14}<\begin{matrix}O.C^2H^5 \\ CH(CH^3)-COOH\end{matrix}$, ottenuto coll'uno, o l'altro metodo, cristallizza in piccoli aghi solubili nell'etere e nell'alcool, un po' meno solubili nella ligroina. Fonde a 120°-121°. Si discioglie nei carbonati alcalini. Il suo etere etilico $C^{12}H^{14}<\begin{matrix}O.C^2H^5 \\ CH(CH^3)COO.C^2H^5\end{matrix}$ fonde a 32°.

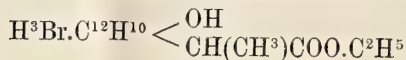
« Riunito con un peso uguale di acido etil-destro-santonoso, già preparato da Cannizzaro e Carnelutti (²), si ottiene l'acido *racemo-etil-santonoso*, fusibile 144°-45°, identico all'acido etil-santonoso inattivo preparato dai sopra citati chimici (³).

« Anche con gli eteri: levo-etil-santonito-etilico e destro-etil-santonito-

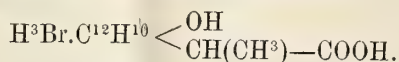
(¹) Loco cit. pag. 480.
(²) Gazz. Chim. Ital. vol. XII, p. 398-399.
(³) Loco citato p. 404, 405.

etilico ho ottenuto il racemo-composto,che è identico all'etil-isosantonito etilico fusibile a 54° (1).

« *Il bromo destro ed il bromo-levo-santonito etilico*

$$H^3Br.C^{12}H^{10} < {OH \atop CH(CH^3)COO.C^2H^5}$$

cristallizzano in grossi prismi trimetrici che si differenziano per la faccetta emiedrica; fondono a 86°; sono solubili nell'etere e nell'alcool. Si disciolgono nelle soluzioni acquose degl'idrati alcalini a freddo e riprecipitano con l'anidride carbonica inalterati, ma a caldo si saponificano e si trasformano nei sali degli

« *Acidi bromo-destro e bromo-levo-santonosi*

$$H^3Br.C^{12}H^{10} < {OH \atop CH(CH^3)—COOH.}$$

i quali cristallizzano dall'etere in laminette contenenti etere (circa il 10 %) che perdono al punto di fusione 110°; poi rifondono a 116°; sono solubilissimi nell'alcool e nell'etere.

« Dalla saponificazione del bromo-destro-santonito etilico con soluzione alcoolica di potassa, ottenni anche un'altro acido bromo-santonoso destrogiro fusibile a 159°; lo studio del quale mi riserbo riprendere fra breve tempo.

« Il *bromo-racemo-santonito etilico*, ottenuto sia per l'azione del bromo sull'isosantonito etilico, sia dall'unione dei due bromo-santoniti etilici attivi, cristallizza in mammelloni fusibili a 104°, solubili nell'alcool e nell'etere. Saponificato dà l'acido *Bromo-racemo-santonoso*, che si ottiene anche mescolando i due acidi bromo-santonosi attivi; quest'acido cristallizza in mammelloni bianchi fusibili fra 193°-195° solubili nell'alcool e nell'etere

« *L'acido bromo-desmotropo-santonoso* proveniente dalla saponificazione del suo etere metilico, cristallizza dall'etere in laminette che contengono incluso il solvente come i suoi isomeri acidi destro e levo-bromo-santonosi; però perde il solvente fra 95° e 110°.

« Queste ricerche dettagliatamente saranno pubblicate nella mia Memoria: *Sulla costituzione degli acidi santonosi*, che sarà, come ho già accennato, pubblicata fra poco tempo ».

(1) Loco citato p. 404, 405.

Fisica. — *Intorno ad alcune modificazioni dell'areometro di Fahrenheit, e ad una nuova forma di bilancia* [1]. Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

« *Modificazione dell'areometro di Fahrenheit.* — Questo areometro quale viene descritto e costruito, è assai poco esatto e presenta molti inconvenienti, cosicchè viene raramente adoperato ed è ora sostituito dalle bilance di Mohr, di Westphal, dall'areometro di Reimann, oppure dagli areometri a peso costante; i primi tre strumenti sono molto più esatti dell'areometro di Fahrenheit, gli altri lo sono meno, ma offrono il vantaggio di richieder brevissimo tempo per una determinazione.

« Però le cause d'inesattezza e gli altri inconvenienti dell'areometro di Fahrenheit si possono eliminare nei modi descritti in questa Nota, ed allora esso per precisione e comodità non è inferiore alle bilance di Mohr, di Westphal e di Reimann, mentre per semplicità, facilità di costruzione e poco costo, uguaglia o è di poco inferiore agli stessi areometri a peso costante.

« Gl'inconvenienti dell'areometro di Fahrenheit sono, parmi, questi che seguono:

« 1.° e 2.° Il tubo che congiunge bulbo e piattello e che porta il segno per l'affioramento non può essere molto sottile, come sarebbe utile per aumentare la sensibilità e diminuire gli errori causati dalla capillarità, perchè l'areometro riuscirebbe troppo fragile; così di solito si hanno entrambi gl'inconvenienti, l'areometro è fragile e non è sufficientemente sensibile nè preciso.

« 3° Immerso nei liquidi esso possiede poca stabilità, e se i pesi sono mal collocati sul piattello, o se il liquido è molto denso, facilmente avviene che l'areometro s'inclina, con pericolo che i pesi scivolino nell'acqua, o anche si rovescia.

« 4° Può avvenire, più o meno frequentemente, che i pesi piccoli sfuggendo dalle pinzette caschino nell'acqua, o peggio nel liquido, che può essere corrosivo, e non è neppure raro il caso che per errore nell'apprezzare il peso necessario per ottenere l'affioramento l'areometro sprofondi nel liquido, e per lo meno si bagni il piattello (a ciò però si rimedia facilmente regolando l'altezza del recipiente e del liquido).

« 5° Occorre conoscere e aver presente, oppure determinare il peso del-

[1] Di questa Nota, presentata all'Accademia nei primi di luglio 1894, fu ritardata la pubblicazione per varie cause. Frattanto è giunta a mia conoscenza una brevissima descrizione d'un areometro a peso del Lohnstein, che parmi posa presentare qualche somiglianza con qualcuno degli areometri descritti in questa Nota. Non ho potuto ancora procurarmi la descrizione completa dell'areometro del Lohnstein, quale è comparsa nel Z. für Istrumentenkunde del 1894, e non posso stabilire fino a che punto tale somiglianza esista.

l'areometro e quello occorrente per ottenere l'affioramento al segno stabilito, nell'acqua; quindi spesso per ogni determinazione di densità occorre fare una pesata, ottenere due affioramenti (nell'acqua e nell'altro liquido) ed eseguire tre operazioni aritmetiche (due somme ed una divisione).

« Questi inconvenienti sono tolti nelle forme di areometro delle figure 1 e 2.

« 1.° e 2.° Ho sostituito al tubo che congiunge bulbo e piattello, un filo di platino *a*, di circa 0,3 mm. di diametro, lungo 1 o 2 cm., il quale a un' estremità è fissato o saldato al piattello (in lamina sottile d'alluminio) e coll'altra estremità penetra liberamente, con debole attrito ma senza troppo giuoco, nel tubetto *b* che è chiuso in fondo e saldato alla sommità del bulbo. Questo tubetto è lungo 2 a 10 mm. ed ha il diametro di 2 a 3 mm. all'esterno e circa 0,3 mm. all'interno; è bene inoltre che esso sia esternamente un po' conico, o che almeno l'estremità libera sia arrotondata o appuntita, dimodochè non rimanga una superficie piana orizzontale; questa nel liquido produrrebbe un largo menisco che impedirebbe all'areometro d'obbedire all'azione dei piccoli pesi.

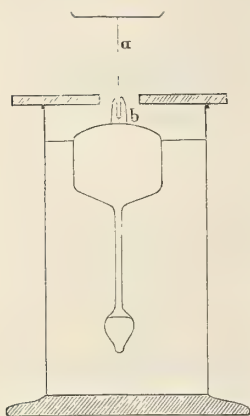



Fig. 1.

« Così l'areometro non è più fragile di una boccetta o d'un altro areometro; venendo esso immerso fino al punto d'affioramento (a metà circa del filo di platino) nell'acqua o in altro liquido sposta volumi sensibilmente uguali di questi; siccome poi coll'aggiungere o togliere dal piattello 1 milligrammo, l'areometro dovrà immergersi o emergere di un tratto non piccolo (teoricamente circa 1 cm.), ne segue che anche la spinta (ossia il peso del liquido spostato) è determinata molto esattamente.

« Essendo il filo di platino sottile, anche l'errore di capillarità è piccolo, inoltre esso potrebbe ancora essere ridotto, osservando per riflessione sulla superficie del liquido la grandezza del menisco, e cercando di ridurla al minimo valore coll'aggiungere sul piattello pesi minimi, insufficienti per fare immergere sensibilmente l'areometro, ma che agiscono sulla superficie liquida deprimendo il menisco. È comodo inoltre di far immergere l'areometro fino ad un punto qualsiasi (coincidente o no col punto d'affioramento) del filo di platino, e fare ai pesi del piattello la piccola correzione dovuta alla parte di filo di platino sporgente o immersa, e che si calcola o si determina coll'esperienza.

« 3.° Ordinariamente il bulbo degli areometri di Fahrenheit è cilindrico, oblungo e porta saldato a una estremità la zavorra, all'altra il tubo e poi il piattello. È invece utile, per aumentare la stabilità dell'areometro galleggiante, che il bulbo sia sferico o meglio cilindrico schiacciato, che alla sua parte inferiore sia saldato un tubo piuttosto lungo il quale termina in basso colla zavorra, e che il tubo o filo fra bulbo e piattello sia piuttosto corto.

« Difatti se chiamiamo Q la spinta esercitata dal liquido sul bulbo diminuita del peso di questo ed applicata al suo centro di figura, P il peso della zavorra e del tubo diminuito della spinta esercitata su essi dal liquido ed applicata all'incirca al centro della zavorra, P' il peso collocato sul piattello, e d e d' le distanze dei punti d'applicazione di P e P' rispettivamente da quello di Q, l'areometro sarà in equilibrio se $P + P' = Q$ e se queste tre forze agiscono secondo una stessa verticale; l'equilibrio poi sarà stabile, indifferente o instabile a seconda che $P d$ sarà maggiore, uguale o minore di $P' d'$. Si ha quindi molto vantaggio ad aumentare d e diminuire d'.

« Peraltro è difficile che un areometro anche costruito nel modo suddetto e che è abbastanza leggero per galleggiare in un liquido dei meno densi, galleggi poi stabilmente quando viene fatto affiorare in un liquido p. es. di densità 2, quando cioè il peso sul piattello e quasi doppio di quello dell'areometro ed all'incirca quadruplo di quello della zavorra.

« Perciò trovai più comodo di usare due areometri (o tre) uno pei liquidi meno densi dell'acqua, l'altro per quelli più densi. Oppure trovai anche comodo, specialmente per la costruzione, di usare un solo areometro B, nel quale il tubo al disotto del bulbo termina inferiormente con un uncino, al quale appendevo direttamente, o mediante un filo di platino, diverse bolle di vetro con mercurio, di peso diverso ma di volume uguale; una di esse serviva per i liquidi meno densi dell'acqua, un altro per i liquidi di densità 1 a 1,5 ecc.

« Inoltre usando la forma di areometro della figura 2, descritta in seguito, un solo areometro serve tanto pei liquidi meno densi che pei più densi.

« 4.° Essendo il piattello separabile dal resto dell'areometro, si può coprire il recipiente che contiene l'acqua, o il liquido di cui si vuol determinare la densità, con un disco, p. es. di vetro, forato nel mezzo, pel cui foro si fa poi passare il filo di platino che si fa entrare nel tubetto b. In questo modo si eviterà che i pesi caschino nel liquido, o che l'areometro sprofondi o che si rovesci.

« Inoltre se il diametro del foro è minore della differenza fra il diametro del recipiente e quello del bulbo, sarà impedito che questo venga a contatto colle pareti del recipiente; è vero bensì che il filo di platino andrà invece ad appoggiarsi contro l'orlo del foro, però spostando un pochetto il disco si potrà avere l'areometro libero e fermo, ciò che difficilmente s'otterrebbe con piccoli urti che è difficile regolare.

« 5.° Finalmente per evitare le operazioni aritmetiche si potrà prendere per unità di peso, il peso d'un volume d'acqua a 4° uguale al volume dell'areometro fino al punto d'affioramento, o piuttosto regolare questo volume in modo che esso alla temperatura media dell'ambiente sia p. es. di 10 $cm.^3$ Si potrà inoltre regolare il peso dell'areometro colla zavorra, in modo che esso sia facile a rammentare, p. es. 6 per i liquidi meno densi dell'acqua, 10 per i liquidi più densi.

« In tal modo il peso dell'areometro ed il peso occorrente per produrre l'affioramento nell'acqua (3,999 gr. a 15°) si verifica facilmente, e se p è il numero dei pesi collocato sul piattello per ottenere l'affioramento in un liquido, sarà $(p+6):10$ (oppure $p:10$), la densità del liquido cercato, che si potrà ottenere con molta esattezza mediante un solo affioramento e un facile calcolo mentale.

« Un altra forma d'areometro a volume costante, altrettanto esatta quanto le precedenti, ma di costruzione più facile e d'uso più comodo, è quella rappresentata nella figura 2 e derivante dall'areometro di Tralles.

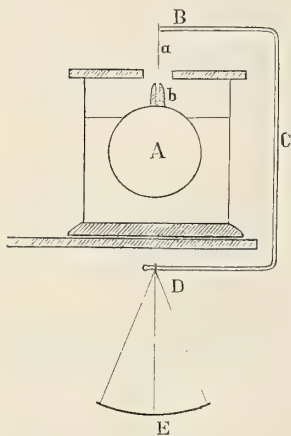



Fig. 2.

« Una bolla di vetro A, sferica, chiusa, porta saldato superiormente un tubetto b chiuso in fondo, lungo 2 a 8 mm. e del diametro di 2 a 3 mm. all'esterno, e 0,3 mm. circa, internamente. Un filo d'alluminio B C D, ripiegato due volte ad angolo retto e dalla stessa parte, tiene fissato all'estremità del braccio orizzontale superiore un filo di platino a, lungo 1 a 2 cm, e di circa 0,3 mm. di diametro, il quale s'adatta nel tubetto b. Inoltre un leggero piattello da bilancia in alluminio E, è sospeso al braccio orizzontale inferiore, sulla verticale passante per il filo di platino. Il recipiente che contiene l'acqua o l'altro liquido di cui si vuol determinare la densità è collocato su una mensoletta sporgente (o su un anello o disco d'un sostegno Bunsen), larga all'incirca quanto il recipiente, fissata all'altra estremità, in modo che il braccio inferiore del filo d'alluminio ed il piattello possano stare sotto il recipiente.

« È utile che il volume della bolla, fino al segno d'affioramento nel filo di platino, sia alla temperatura media ambiente di 10 cm.^{3} e che il peso dell'intero areometro (bolla, filo di platino e d'alluminio e piattello) sia di 5 grammi; in tal caso immergendo la bolla nell'acqua a 15° occorrerà collocare nel piattello 4,999 gr. per farla immergere fino al punto d'affioramento, e se per un altro liquido occorrerà collocare p grammi, la densità di questo liquido sarà $(p+5):10$.

« Così con una sola operazione (tralasciando l'affioramento nell'acqua) e con un facile calcolo mentale si ha la densità del liquido.

« Sarà utile verificare ogni tanto il peso dell'areometro ed il suo volume fino al punto d'affioramento, che varierà sensibilmente nel primo tempo dopo che è stata soffiata la bolla, per lo stesso fenomeno che produce lo spostamento dello zero dei termometri.

« Quest'areometro galleggia stabilmente, senza rovesciarsi, anche nei liquidi molto densi; talvolta la bolla galleggia di traverso, ma vi si rimedia raddrizzando il filo di platino che deve essere sufficientemente rigido.

« La sensibilità e l'esattezza di questo areometro sono le stesse come nell'areometro precedentemente descritto, ed è da notare che mentre nel determinare la densità d'un liquido col metodo della bilancia idrostatica, alle cause d'errore inerenti al metodo idrostatico si aggiungono quelle provenienti da possibili inesattezze della bilancia, con quest'areometro si hanno solo le prime cause d'errore, ed in quanto alla facilità delle operazioni essa non è diversa da quella d'una solita pesata, poichè i pesi si collocano sul piattello in qualsiasi posizione, senza pericolo che l'areometro si rovesci o s'inclini.

« Esso può essere costruito da chiunque è in grado di soffiare una bolla all'estremità di un tubo di vetro e di tirare e chiudere esso tubo. Un po' di pratica e di pazienza si richiede per ottenere che la bolla sia esattamente di 10 cm.^{3}; è quasi impossibile di soffiare una bolla che sia esattamente di 10 cm.^{3} (a meno che non si usi uno stampo) e nel regolare il volume della bolla essa facilmente si guasta. Il modo col quale procedo è il seguente: fondo l'estremità d'un tubo di 8 a 10 mm. di diametro, lo chiudo e vi soffio una bolla minore di 10 cm.^{3}, di pareti non troppo sottili, e saldo all' estremità della bolla il tubetto *b* preparato prima. Verso quindi nella bolla tanto mercurio finchè il tutto pesi 10 grammi, la immergo nell'acqua coll'apertura in alto, essa s'immerge finchè il volume immerso è di 10 cm.^{3}, segno il punto d'affioramento, e tolta la bolla dall'acqua, colla fiamma da smaltatore assottiglio il tubo nel punto segnato, e ripeto la prova dell'immersione nell'acqua, quindi assottiglio ancora, e ripetendo queste operazioni posso determinare dove devo separare la bolla dal tubo in modo che essa abbia il volume di 10 cm.^{3} con un errore di pochi millimetri cubi. Tolgo il mercurio dalla bolla, poscia chiudo; compongo l'areometro della figura 2 e dal peso necessario per ottenere l'affioramento aumentato del peso dell'areometro deduco esattamente il volume; è facile poi aggiungere o togliere i pochi millimetri cubi per ridurre il volume esattamente uguale a 10 cm.^{3} Se occorre aumentare di poco il volume della bolla, si prende un filo di vetro di tal lunghezza da avere il volume mancante, lo si riduce in goccia e lo si aggiunge all'estremità inferiore e conica della bolla, procurando di non farla gonfiare menomamente.

« Quest'areometro può servire altresì per determinare la densità di solidi, che si collocano prima sul piattello e poi s'immergono nell'acqua, appendendoli al piattello o alla bolla.

« **Nuova forma di bilancia.**— Gli areometri di Nicholson, di Fahrenheit, di Reimann possono servire, come è noto, per determinare il peso dei corpi; però, eccetto l'ultimo che non differisce essenzialmente da una vera bilancia, essi si prestano male a tale scopo. Una gran parte del peso occorrente per vincere la spinta del liquido deve essere collocata come zavorra, per ottenere

una certa stabilità che tuttavia non è molto grande e richiede cura nel collocare i pesi sul ristretto piattello; quindi, oltre gl'inconvenienti indicati per l'areometro, si ha quello della piccolezza dei pesi per cui esso può servire.

« Invece l'areometro della figura 2 colle opportune modificazioni nella forma e nella grandezza si presta bene alla determinazione di pesi non piccoli con notevole esattezza.

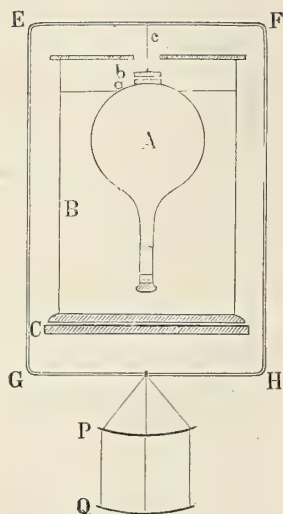



Fig. 3.

« Un pallone di vetro A, fig. 3, p. es. di 365 cm.^{3} di capacità, pesante 64 gr. contiene 120 gr. di mercurio, è turato con un tappo di sovero e uno strato di ceralacca, oppure con un tappo di gomma piuttosto basso, ed immerso capovolto in un recipiente B pieno d'acqua e collocato su una mensola c, o un anello d'un sostegno Bunsen. Al vertice del pallone trovasi fissato con ceralacca un disco di vetro a di 3 cm. di diametro, perpendicolarmente all'asse del pallone. Su questo disco si fa riposare un disco uguale b che è fissato con ceralacca ad un ago verticale d'acciaio c lungo 1 a 2 cm., spesso 0,5 mm., fissato a sua volta nel mezzo del braccio orizzontale EF, d'un rettangolo EFGH di filo d'alluminio di 2 mm. di diametro. Nel mezzo del lato orizzontale inferiore GH, che trovasi sotto il recipiente B, è appeso un doppio piatto di bilancia PQ in lamina d'alluminio.

« Collocando dei pesi in uno dei piatti, si fa immergere di più il pallone, e per un peso di circa 190 gr. esso s'immerge fino a metà dell'ago, e grazie alla sottigliezza di questo, basterà aggiungere o togliere un piccolo peso p. es. 5 mgr. perchè il pallone s'immerga di un tratto non piccolo. Collocando nell'altro piatto un corpo di cui si vuol conoscere il peso e togliendo pesi numerati dall'altro piatto finchè il pallone è immerso nuovamente fino allo stesso punto di prima, il numero di pesi tolto da direttamente il peso del corpo suddetto.

« Sarà opportuno riservare uno dei piatti per il corpo, e l'altro per i pesi numerati che devono formare una serie regolare con tutte le frazioni, le quali è bene che abbiano forma di cavalletti e siano collocate sui lati orizzontali del rettangolo. Prima di collocare i corpi sul piatto relativo, si stabilisce l'affioramento a un punto qualsiasi dell'ago con un po' di tara (p. es. pezzetti di carta) senza togliere pesi numerati e scompletare la serie.

« Avviene spesso che l'aggiungere o togliere pesi minimi, non fa immergere o emergere sensibilmente il pallone trattenuto dall'adesione dell'acqua per l'ago e dalla tensione superficiale dell'ago. A questo inconveniente che

diminuirebbe molto la sensibilità e l'esattezza della bilancia si rimedia solo in parte scuotendo il recipiente, o dando al pallone una spinta sempre nello stesso senso e possibilmente di ugual forza; gioverebbe molto usare petrolio invece di acqua, ma la grande variazione della densità del petrolio per effetto della temperatura potrebbe causare errori più gravi di quello che si vuol evitare.

« Giova molto invece coprire l'ago con un sottile strato di paraffina (che giova anche per proteggerlo dall'ossidazione) ed aggiungere o togliere piccoli pesi finchè la superficie dell'acqua attorno all'ago è sensibilmente piana; ciò si riconosce facilmente osservando per riflessione l'immagine del contorno d'un oggetto, il quale presenterà una sporgenza verso l'ago, o una cavità di fronte all'ago, o apparirà non deformato a seconda che il liquido presso l'ago è sollevato, depresso, o piano. Nel 1° caso il peso sui piatti è un po' troppo piccolo, oppure l'areometro emerge lentamente, nel 2° caso il peso è troppo forte, e l'areometro forse s'affonda lentamente, nel 3° caso la componente verticale dell'adesione, o della tensione superficiale è nulla ed inoltre l'areometro è fermo.

« Riducendo dunque sempre il pallone ad immergersi fino ad un punto qualsiasi dell'ago, e riducendo il livello del liquido attorno all'ago ad essere piano, e facendo la piccola correzione per la porzione dell'ago del livello del liquido al segno d'affioramento, si può avere un esattezza non inferiore al milligramma. Con un pallone più grande ed un ago di 1 mm. di diametro potei pesare fino a 400 grammi con un esattezza superiore al mezzo centigrammo.

« La quantità opportuna di zavorra si determina sperimentalmente; essa deve esser tanto maggiore quanto più corto è il collo del pallone e quanto più sottile è l'ago. Se la zavorra è poca (p. es. 100 gr. nel caso descritto) la spinta del liquido fa flettere l'ago ed occorrerà aumentare il peso della zavorra o la sua distanza dal centro del pallone, o lo spessore dell'ago. Talvolta però l'ago si flette più o meno perchè il disco *b* non è ben collocato sul disco sottostante, ed allora sarà facile togliere la flessione, spostando convenientemente il disco suddetto.

« Sebbene questa bilancia non sia suscettibile di tutta quella precisione che si può ottenere con un ottima bilancia a leva, sebbene per ottenere tutta la precisione di cui essa è suscettibile si richieda forse maggior cura e attenzione che non nell'operazione abituale della pesata ordinaria, tuttavia questa nuova forma di bilancia possiede sulla bilancia a leva due vantaggi non lievi.

« Uno di questi vantaggi è la facilità e la rapidità con cui può essere costruita da chiunque anche poco abile; l'altro vantaggio è che essa non è soggetta ad essere deteriorata. Una buona bilancia a leva richiede molta attenzione e molta cura in chi la usa, altrimenti perde rapidamente le sue buone qualità non può quindi essere affidata ad allievi, mentre ciò non avviene per la bilancia areometro ».

Mineralogia. — *La tormalina nella zona arcaica di Caprera.* Nota preliminare di DOMENICO LOVISATO, presentata dal Socio STRUEVER.

« La *tormalina* in Sardegna fino a questi ultimi anni si conosceva in una sola località, nelle roccie granitoidi-schistose dell'Asinara nella regione denominata *La Reale*: colà la cita il Lamarmora (1) per il primo, e colà, togliendolo certamente dall' opera classica del grande piemontese, l'accenna il Jervis (2): nessun altro ha parlato di tormalina in Sardegna, nè abbiamo alcun accenno, se questa specie minerale si trovi in altre località.

« Ecco perchè ho creduto opportuno di dire una parola sulle tormaline sarde, non tanto per fare un completo lavoro mineralogico su questa interessante specie, quanto per darne breve notizia e per far conoscere a coloro, che si occuperanno di mineralogia sarda, dove potranno trovare materiale degno dei loro studi.

« Questo minerale, proprio delle granuliti e delle roccie metamorfiche, è abbastanza diffuso in Sardegna, sebbene si presenti quasi dovunque in piccola quantità. Lo troviamo in due modi di giacimento, nelle granuliti, come abbiamo già detto, e nelle roccie, che subirono per conto di queste l'azione di metamorfismo.

« Nelle prime compare sporadicamente ed in piccoli nidi; nelle seconde abbastanza diffusa. Nelle granuliti ho trovato la tormalina fra Quarto e Capo Carbonara, da Guspini ad Arbus, da Arbus alla miniera d'Ingurtosu, proprio a cavaliere di questa; nelle granuliti che separano la miniera d'Ingurtosu da quella di Montevecchio ed in quelle di Monte Santo di Pula, nonchè da Pula a Domus de Maria. Nuclei tormaliniferi in forma di rose costituite da cristalli aghiformi a disposizione raggiata si veggono abbastanza numerosi in un dicco di roccia porfirica, attraversante la strada, che dalla miniera di Gennamari va a Gonnos Fanadiga e ad Arbus.

« Ma dove noi troviamo la tormalina ben diffusa è nel secondo modo di giacimento, in terreni antichissimi, costituiti da schisti ad elementi cristallini con microliti di vari minerali passanti dall'uroniano al cambriano, oppure in terreni antichissimi formanti la parte superiore del gneis (micaschisto), che ha subìto più o meno l'azione metamorfica delle granuliti: per quelli si presenta in cristalli sottili ed allungati disseminati in mezzo ad una quantità di granati nei micaschisti filladici della parte N. O. dell'isola, special-

(1) *Voyage en Sardaigne.* Troisième partie, tom. I, p. 16.

(2) G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia.* Parte III. Regione delle isole (Sardegna e Sicilia), p. 145.

mente nel seno formato fra Capo Falcone e la costa settentrionale della Nurra, alla spiaggia dell'Istintino, la più giovane borgata del Regno, che non conta più di 10 anni di vita: per questi invece si presenta in cristalli imperfetti ed in massecole alla dipendenza del quarzo, dentro al quale si trova impiantata sempre la tormalina dentro ai micaschisti gneissici e ad una specie di gneiss ricchissimi in mica nella zona arcaica della penisola di Punta Rossa a Caprera e nella formazione analoga dell'isoletta della Pecora, che si trova all' E. di quella penisola. Essa è di color nero, di lucentezza vitrea, ma la sua polvere, se ottenuta da frammento fresco, è verde-giallastra; se decomposta, come generalmente si trova in quei paraggi, è grigio-giallastra. Non m'avvenne di trovare alcun cristallo perfetto, cioè terminato alle due estremità: rarissimi sono anche i cristalli terminati ad una sola estremità: di faccie del romboedro pochissime ne ho potute vedere, e di queste per lo più due sono più grandi della terza e così poco lucenti da non potersi con sicurezza determinare, mai poi in modo da poter dedurre quale dovrebbe essere l'abito del cristallo completo. I cristalli dei campioni, che passarono per le mie mani sono per lo più incompleti alle due estremità, sono cristalli semplici e di essi non si veggono nettamente che le faccie prismatiche: vi predomina in tutti un prisma esagono a faccie non egualmente estese, però sempre striate ed in combinazione vedesi un altro prisma, che qua e là si presenta nei cristalli di tormalina di Caprera. Non sono infrequenti le unioni di più individui per formare un unico cristallo ad angoli rientranti nella zona delle faccie dei prismi: le compenetrazioni sono meno frequenti.

« Non possiamo istituire un paragone fra la tormalina di Caprera e quelle dell'isola d'Elba, specialmente perchè a Caprera siamo in formazioni molto più antiche; e sebbene le analisi chimiche mostrino una certa corrispondenza, non s'accordano fra loro specialmente pel colore, pel peso specifico e per altri caratteri fisici.

« Un grande difetto delle tormaline di Caprera si è che sono compenetrate dal quarzo in modo che difficilmente si possono liberare da esso anche frammenti piccolissimi di questa sostanza. È forse perciò che il peso specifico della nostra tormalina risultò una prima volta = 2,95 alla temperatura dell'acqua 8,75° C; una seconda volta diede sempre col metodo della boccetta 2,96 alla temperatura dell'acqua = 11° C, mentre il frammento più grosso, che ho potuto ottenere, colla bilancia del Mohr mi diede 3,047 alla temperatura dell'acqua di 14° C. È vero che il De Lapparent [1] dà il peso specifico della tormalina fra 2,94 e 3,3, ma generalmente in media si ritiene il p. s. delle tormaline fra 2,98 e 3,20.

« La sua durezza è inferiore di poco a quella del quarzo.

« Nel tubo chiuso crepita lievemente, ma non dà acqua: al cannello

[1] A. De Lapparent, *Cours de Minéralogie,* 1884, p. 364.

si gonfia e fonde facilmente in scoria verdiccio-giallastro, come del resto la maggior parte delle tormaline ferro-magnesiane. Si ha la reazione dell'acido borico colla colorazione della fiamma in verde, fondendo la sua polvere con una mescolanza di bisolfato potassico e spato fluore. Al rosso scuro perde 2,15 % in peso: diventa rosso cupo ed al color bianco si agglutina. Non è attaccabile dagli acidi: però dopo fusione è decomposta in parte dall'acido solforico e gelatinizza un po' coll'acido cloridrico.

« La tormalina di Caprera, che è quasi sempre accompagnata dal granato roseo in minutissimi trapezoedri, dei quali con una lente di forte ingrandimento si veggono benissimo le faccie, ha dato al prof. M. Fasolo i seguenti risultati:

$Si\ O_2$	40,09
$Al_2\ O_3$	36,41
$Fe_2\ O_3$	8,16
$Fe\ O$	1,56
$Mn_2\ O_3$	0,79
$Mg\ O$	2,40
$Ca\ O$	0,28
$Na_2\ O$	1,25
$Bo_2\ O_3$	7,14
Fl.	1,93
	100,01

« All'analisi spettroscopica della soluzione contenente i soli metalli alcalini, appena apparisce la linea del potassio, per cui i dati che si riferiscono a questi metalli sono riportati al solo sodio.

« Sopra 72 analisi di tormalina date dal Dana (1) nessuna dà una quantità così forte di fluorio: la determinazione dell'acido floridrico come pure quella dell'anidride borica fu eseguita col metodo del Berzelius.

« Per riguardo alla magnesia riferendosi alle 72 analisi citate dal Dana, noi troviamo che in 6 essa manca ed in 29 il tenore di essa è inferiore alla nostra: quindi senza tema di errare possiamo ritenere la nostra tormalina come ferro-magnesiana e quindi come tutte quelle di questo gruppo mancante di litio.

« Dai dati su riferiti si stabilisce che per dieci molecole delle basi bivalenti corrispondono quaranta molecole delle basi trivalenti: ferro ed alluminio. Per queste occorrendo cinquanta molecole di SiO_2 apparisce che nella tormalina trovasi un'eccedenza di sedici molecole di SiO_2 cioè 9,79 % in più della quantità di SiO_2 necessaria per la costituzione di un monosilicato delle differenti basi. Se questa silice appartenga alle singole molecole della

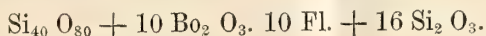
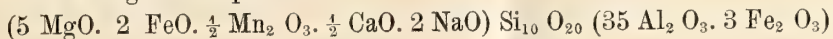
(1) Dana, *The system of Mineralogy*, 1893 p. 554-5.

tormalina o trovasi accidentalmente distribuita fra esse, lo possiamo facilmente dedurre da quanto si è detto precedentemente sul quarzo intimamente mescolato colla tormalina: per cui la proporzione della silice dovrebbe essere diminuita ed accresciute invece le proporzioni dell'acido borico, del calcio e del sodio, pei quali comparisce assai povera.

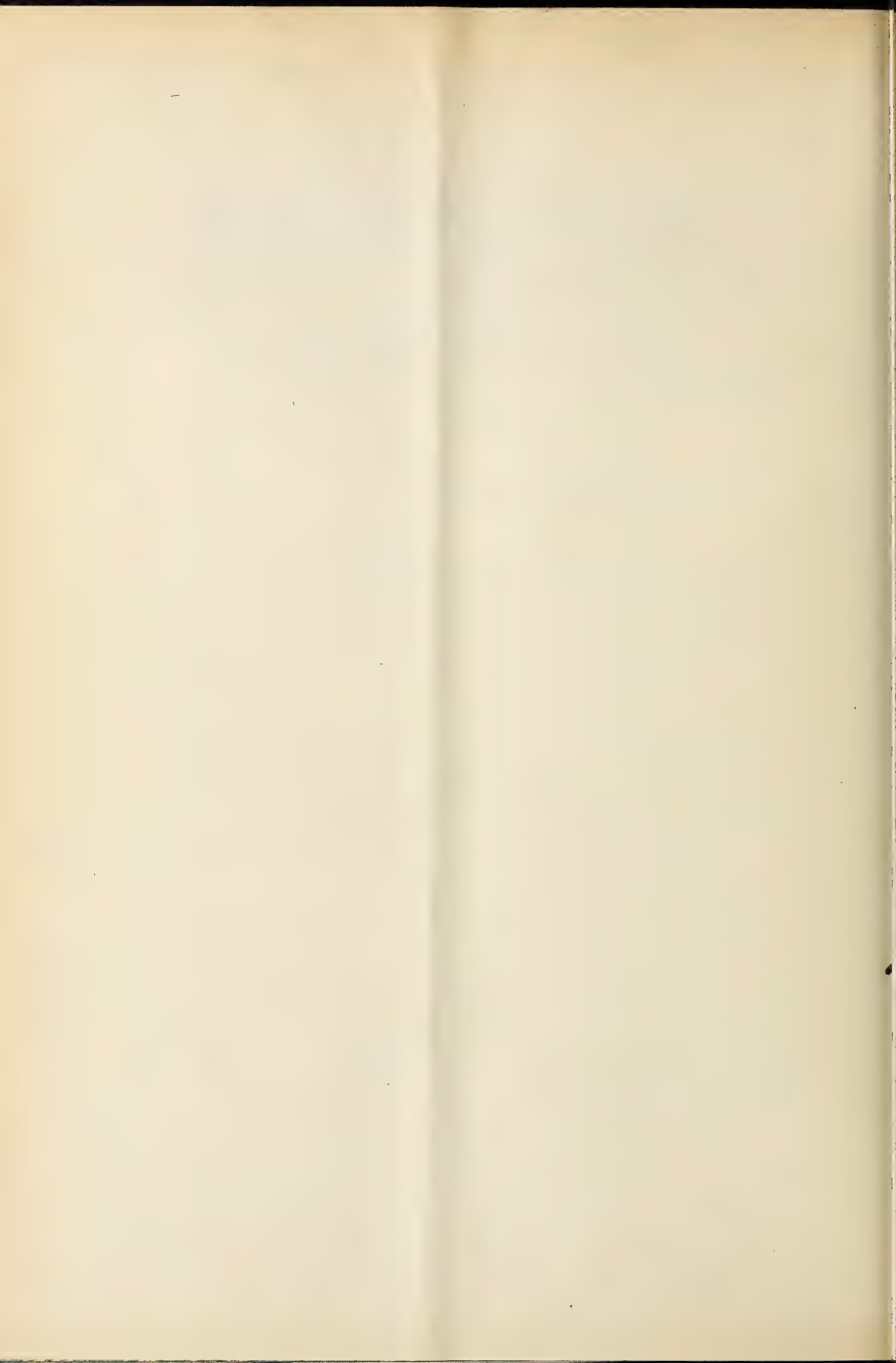
« L'anidride borica ed il fluorio stanno fra loro nello stesso rapporto molecolare corrispondente a quello delle basi bivalenti.

« A detta tormalina volendo assegnare una formola molecolare si arriverebbe al seguente tipo:

$$(5\,MgO.\ 2\ FeO.\ \tfrac{1}{2}\,Mn_2\,O_3.\ \tfrac{1}{2}\,CaO.\ 2\,NaO)\ Si_{10}\,O_{20}\ (35\,Al_2\,O_3.\ 3\ Fe_2\,O_3)$$

$$Si_{40}\,O_{80} + 10\,Bo_2\,O_3.\ 10\ Fl. + 16\ Si_2\,O_3.$$

« La stessa tormalina si presenta nel prolungamento della zona arcaica verso San Teodoro passando per Golfo Aranci ».

Paleontologia. — *Silicospongie plioceniche.* Nota del dott. Paolo Malfatti, presentata dal Socio Capellini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 febbraio 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

« Alla fine della mia Nota precedente (¹) ho già accennato ad ulteriori ricerche, relative alla equazione lineare a derivate parziali del 3° ordine:

$$(1)\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial u}{\partial z}+\delta u=0,$$

i cui coefficienti a, b, c, α, β, γ, δ siano funzioni di x, y, z assoggettate alla sola condizione di essere finite e continue in un dato spazio. I miei primi tentativi per applicare alla equazione generale (1) il metodo d'integrazione di Riemann mi fecero credere che soltanto in casi particolari ne fosse possibile la riuscita. Ma la limitazione supposta in effetto non ha luogo e in questa Nota appunto dimostrerò come debba estendersi il metodo di Riemann, per renderlo applicabile alla equazione generale (1). Indico brevemente le circostanze notevoli, che in tale estensione si presentano.

« Se rappresentiamo simbolicamente con $\Omega(u)$ il primo membro della (1), insieme a questa espressione differenziale del 3° ordine, siamo condotti a considerare tre espressioni del 2° ordine

$$\Omega_1(u)\,,\quad \Omega_2(u)\,,\quad \Omega_3(u)$$

(¹) Rendiconti del 6 gennaio 1895.

e tre del 1° ordine

$$\Omega_{23}(u)\,,\quad \Omega_{13}(u)\,,\quad \Omega_{12}(u)$$

che si deducono da $\Omega(u)$ nel modo seguente.

« Consideriamo in $\Omega(u)$ l'aggregato dei termini che contengono $\frac{\partial u}{\partial x}$ e le sue derivate; se in questo aggregato sostituiamo a $\frac{\partial u}{\partial x}$ la u stessa, otteniamo appunto $\Omega_1(u)$; così:

$$\Omega_1(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+b\frac{\partial u}{\partial z}+c\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha u$$

similmente

$$\Omega_2(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+c\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial z}+\beta u$$

$$\Omega_3(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma u.$$

Operando in modo analogo colle derivate seconde, otterremo

$$\Omega_{23}(u)=\frac{\partial u}{\partial x}+au\,,\quad \Omega_{13}(u)=\frac{\partial u}{\partial y}+bu\,,$$

$$\Omega_{12}(u)=\frac{\partial u}{\partial z}+cu.$$

« Ciò premesso, chiameremo *soluzione principale relativa al punto* $(x_0\,y_0\,z_0)$ della $\Omega(u)=0$ quella sua soluzione regolare che è perfettamente definita dalle condizioni seguenti:

« 1ª *di assumere nel punto* $P_0\equiv(x_0\,y_0\,z_0)$ il valore $u=1$;

« 2ª *di soddisfare lungo le tre parallele agli assi coordinati, condotte per* P_0, *alle rispettive equazioni di* 1° *ordine*

$$\Omega_{23}(u)=0\,,\quad \Omega_{13}(u)=0\,,\quad \Omega_{12}(u)=0.$$

« 3ª *di soddisfare sui tre piani condotti per* P_0 *parallelamente ai piani coordinati alle rispettive equazioni di* 2° *ordine*

$$\Omega_1(u)=0\,,\quad \Omega_2(u)=0\,,\quad \Omega_3(u)=0.$$

« Il problema fondamentale da porsi per la integrazione della (1) consiste ora nel ricercarne una soluzione regolare, che sui tre piani coordinati assuma valori arbitrariamente dati. Col metodo delle approssimazioni successive di Picard si dimostra facilmente che la soluzione cercata esiste; su ciò credo inutile insistere nella presente Nota, non essendovi alcuna circostanza nuova da rilevare.

« Mi diffonderò invece sulla estensione enunciata del metodo di Riemann, dimostrando come per calcolare il valore della soluzione cercata in un punto P_0 basterà che della equazione aggiunta della (1):

$$(2)\quad \Phi(v)=\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2(av)}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2(bv)}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2(cv)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial(\alpha v)}{\partial x}+\frac{\partial(\beta v)}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial(\gamma v)}{\partial z}-\delta v=0$$

si sappia determinare la *soluzione principale*, relativa appunto a P_0. Tale soluzione v si dirà anche il *moltiplicatore principale*.

§ 1.

« Se v è una soluzione dell'equazione aggiunta (2), si ha identicamente, qualunque sia u:

$$(3)\qquad 3v\Omega(u)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z},$$

essendo X, Y, Z espressioni lineari omogenee in u e nelle derivate prime e seconde della forma seguente:

$$(4)\qquad \begin{cases} X=v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+A\dfrac{\partial u}{\partial y}+B\dfrac{\partial u}{\partial z}+Cu \\ Y=v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+B'\dfrac{\partial u}{\partial x}+A'\dfrac{\partial u}{\partial z}+C'u \\ Z=v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+A''\dfrac{\partial u}{\partial x}+B''\dfrac{\partial u}{\partial y}+C''u. \end{cases}$$

« Basta infatti per ciò che A, B, C; A′, B′, C′; A″, B″, C″ soddisfino alle sei relazioni:

$$\begin{cases} A'+B''=3av-\dfrac{\partial v}{\partial x}, \quad A''+B=3bv-\dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad A+B'=3cv-\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ C+\dfrac{\partial B'}{\partial y}+\dfrac{\partial A''}{\partial z}=3\alpha v, \quad C'+\dfrac{\partial B''}{\partial z}+\dfrac{\partial A}{\partial x}=3\beta v, \quad C''+\dfrac{\partial B}{\partial x}+\dfrac{\partial A'}{\partial y}=3\gamma v. \end{cases}$$

« Ora indicando con λ, μ, ν tre funzioni affatto arbitrarie, si soddisfa nel modo più generale alle equazioni precedenti, ponendo

$$A=\frac{1}{2}\left(3cv-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+3\lambda, \quad A'=\frac{1}{2}\left(3av-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+3\mu,$$
$$A''=\frac{1}{2}\left(3bv-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+3\nu$$
$$B'=\frac{1}{2}\left(3cv-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-3\lambda, \quad B''=\frac{1}{2}\left(3av-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-3\mu.$$
$$B=\frac{1}{2}\left(3bv-\frac{\partial v}{\partial y}\right)-3\nu$$

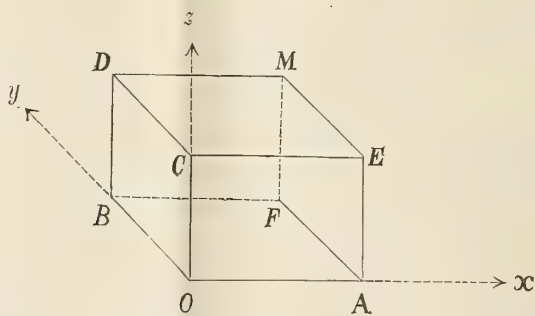
e ricavando dalle seconde di esse i valori di C, C′, C″. Conseguentemente alle espressioni (4) di X, Y, Z potremo dare la forma seguente:

$$
(5)\quad \begin{cases}
X = \dfrac{\partial^2(uv)}{\partial y\,\partial z} + \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(cv - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z}\left(bv - \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \\
\quad + 3u\left\{\alpha v - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}(cv) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}(bv)\right\} + 3\,\dfrac{\partial(\lambda u)}{\partial y} - 3\,\dfrac{\partial(\nu u)}{\partial z} \\
Y = \dfrac{\partial^2(uv)}{\partial x\,\partial z} + \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z}\left(av - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(cv - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + \\
\quad + 3u\left\{\beta v - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}(av) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}(cv)\right\} + 3\,\dfrac{\partial(\mu u)}{\partial z} - 3\,\dfrac{\partial(\lambda u)}{\partial x} \\
Z = \dfrac{\partial^2(uv)}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(bv - \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(av - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + \\
\quad + 3u\left\{\gamma v - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}(bv) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}(av)\right\} + 3\,\dfrac{\partial(\nu u)}{\partial z} - 3\,\dfrac{\partial(\mu u)}{\partial y}\,.
\end{cases}
$$

§ 2.

« Supponiamo ora che si cerchi una soluzione regolare u della $\Omega(u)=0$, la quale sui piani coordinati $x=0$, $y=0$, $z=0$ assuma valori prestabiliti. Di questa soluzione, la cui esistenza è accertata come si è detto dal metodo delle approssimazioni successive, vogliasi calcolare il valore in un punto $M \equiv (x_0, y_0, z_0)$. Conducendo per M i tre piani

$$x = x_0\,,\quad y = y_0\,,\quad z = z_0$$

paralleli ai tre piani coordinati, formeremo il parallelepipedo della figura.

Applichiamo allo spazio racchiuso da questo parallelepipedo la nota formola:

$$\iiint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = -\iint_\Sigma \left\{X \cos \widehat{nx} + Y \cos \widehat{ny} + Z \cos \widehat{nz}\right\} d\sigma.$$

« Se per X, Y, Z sostituiamo le espressioni (5), l'integrale triplo si si annulla e resta quindi

$$\text{(B)}\quad \iint\limits_{(x=x_0)} \mathrm{X}\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=y_0)} \mathrm{Y}\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=z_0)} \mathrm{Z}\,dx\,dy = \iint\limits_{(x=0)} \mathrm{X}\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=0)} \mathrm{Y}\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=0)} \mathrm{Z}\,dx\,dy.$$

« Una volta fissato il moltiplicatore v e le funzioni λ, μ, ν, tutto sarà noto nel secondo membro della (B) per mezzo dei valori assegnati ad u sulle faccie $x=0$, $y=0$, $z=0$. Per calcolare altresì il primo membro, disporremo di v e λ, μ, ν in guisa che per $x=x_0$ l'espressione X si riduca al suo primo termine $\frac{\partial^2(uv)}{\partial y\,\partial z}$ e similmente Y, Z si riducano rispettivamente per $y=y_0$, $z=z_0$ ai loro primi termini $\frac{\partial^2(uv)}{\partial x\,\partial z}$, $\frac{\partial^2(uv)}{\partial x\,\partial y}$.

« Ammessa la possibilità di una tale determinazione, che fra un momento effettueremo, il 1° membro della (B), effettivamente calcolato, è dato da

$$3\,(uv)_{\mathrm{M}} + \left\{(uv)_{\mathrm{A}} + (uv)_{\mathrm{B}} + (uv)_{\mathrm{C}}\right\} - 2\left\{(uv)_{\mathrm{D}} + (uv)_{\mathrm{E}} + (uv)_{\mathrm{F}}\right\},$$

le notazioni $(uv)_{\mathrm{M}}$, $(uv)_{\mathrm{A}}$, $(uv)_{\mathrm{B}}$ ... indicando i valori di uv nei pnnti rispettivi M, A, B.... La formola (B) si muta quindi nella seguente

$$\text{(6)}\quad 3\,(uv)_{\mathrm{M}} = 2\left\{(uv)_{\mathrm{D}} + (uv)_{\mathrm{E}} + (uv)_{\mathrm{F}}\right\} - \left\{(uv)_{\mathrm{A}} + (uv)_{\mathrm{B}} + (uv)_{\mathrm{C}}\right\} + \iint\limits_{(x=0)} \mathrm{X}\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=0)} \mathrm{Y}\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=0)} \mathrm{Z}\,dx\,dy,$$

che contiene già il risultato richiesto.

§ 3.

« Esaminiamo ora se si possono effettivemente assumere il moltiplicatore v e le funzioni λ, μ, ν in guisa da soddisfare sulle rispettive faccie $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ del parallelepipedo alle condizioni sopra enunciate. Dovremo avere per ciò:

$$\text{(7)}\quad \left.\begin{aligned} &\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - cv\right), \qquad \nu = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - bv\right) \\ &\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(bv) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(cv) - av \end{aligned}\right\}\ \textit{sulla faccia}\ x=x_0$$

$$(7'')\quad \left.\begin{aligned} &\mu=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-av\right), \qquad \lambda=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-cv\right)\\ &\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(cv)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(av)-\beta v\end{aligned}\right\}\ \textit{sulla faccia } y=y_0$$

$$(7'')\quad \left.\begin{aligned} &\nu=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-bv\right), \qquad \mu=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-av\right)\\ &\frac{\partial\nu}{\partial x}-\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(av)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(bv)-\gamma v\end{aligned}\right\}\ \textit{sulla faccia } z=z_0.$$

« Intanto dal confronto dei due valori di λ per $x=x_0$, $y=y_0$ simultaneamente, cioè lungo lo spigolo MF del parallelepipedo, segue che lungo di esso deve essere $\frac{\partial v}{\partial z}-cv=0$ e così

$$\frac{\partial v}{\partial x}=av \textit{ lungo } \mathrm{MD}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=bv \textit{ lungo } \mathrm{ME}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}=cv \textit{ lungo } \mathrm{MF}.$$

« Sostituendo poi nella terza della (7) i valori di λ, ν dati dalle prime due, deduciamo che *sulla faccia* $x=x_0$ il moltiplicatore v deve soddisfare alla equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}-c\frac{\partial v}{\partial y}-b\frac{\partial v}{\partial z}+\left(\alpha-\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)v=0.$$

« Similmente dovrà v soddisfare alle equazioni

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial z}-c\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\beta-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)v=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-b\frac{\partial v}{\partial x}-a\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\gamma-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)v=0$$

sulle rispettive faccie $y=y_0$, $z=z_0$.

« Disponendo in fine della costante moltiplicativa arbitraria, che le condizioni precedenti lasciano in v, in guisa che sia $v_M=1$, vediamo che la soluzione v così definita dell'equazione aggiunta è appunto il moltiplicatore principale, relativo al punto M. Basterà dopo ciò scegliere per λ una funzione di x, y, z che sulle faccie $w=x_0$, $y=y_0$ assuma i rispettivi valori dati dalle (7), (7′), restando del resto affatto arbitraria. Similmente disponendo di μ, ν, le condizioni imposte saranno tutte soddisfatte e sarà quindi applicabile la formola (6). Nel secondo membro della (6) compariscono per

altro i valori di λ, μ, ν sulle faccie $x=0$, $y=0$, $z=0$, valori che essendo in parte arbitrarii converrà opportunamente eliminare [1].

§ 4.

« Prendiamo dunque a trasformare i tre integrali doppî che figurano nel secondo membro della (6). Abbiamo

$$\int\!\!\int_{(x=0)} \mathrm{X}\, dy\, dz = \int\!\!\int_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz + \frac{3}{2}\int\!\!\int_{\mathrm{OCDB}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y}\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z}\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\left(2av - \frac{\partial}{\partial y}(cv) - \frac{\partial}{\partial z}(bv)\right)\right\} dy\, dz +$$

$$+ 3\int\!\!\int_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial(\lambda u)}{\partial y}\, dy\, dz - 3\int\!\!\int_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial(\nu u)}{\partial z}\, dy\, dz\,.$$

« Ora osservando che si ha:

$$\int\!\!\int_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz = (uv)_{\mathrm{O}} + (uv)_{\mathrm{D}} - (uv)_{\mathrm{B}} - (uv)_{\mathrm{C}}$$

$$\int\!\!\int_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial(\lambda u)}{\partial y}\, dy\, dz = -\int_{\mathrm{OC}} \lambda u\, dz + \int_{\mathrm{BD}} \lambda u\, dz$$

$$\int\!\!\int_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial(\nu u)}{\partial z}\, dy\, dz = \int_{\mathrm{OB}} \nu u\, dy - \int_{\mathrm{CD}} \nu u\, dy$$

ed operando nello stesso modo sugli altri due integrali $\int\!\!\int_{(y=0)} \mathrm{Y}dx\, dz$, $\int\!\!\int_{(z=0)} \mathrm{Z}dx\, dz$,

vediamo che gli integrali estesi agli spigoli OA, OB, OC, nei quali figurerebbero i valori non dati di λ, μ, ν, si distruggono. Se nei rimanenti integrali semplici sostituiamo a λ, μ, ν i loro valori dati sulle faccie $x = x_0$,

[1] Essendo identicamente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial(\lambda u)}{\partial y} - \frac{\partial(\nu u)}{\partial z}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial(\mu u)}{\partial z} - \frac{\partial(\lambda u)}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial(\nu u)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu u)}{\partial y}\right\} = 0,$$

se si applica la formola (A) si vede *a priori* che i valori di λ, μ, ν nelle faccie $x=0$, $y=0$, $z=0$ non hanno influenza sul secondo membro della (6).

$y = y_0$, $z = z_0$ in funzione del moltiplicatore principale v dalle (7), (7'), (7''), troviamo infine la formola:

$$\text{(B)} \quad u_M = (uv)_O + \{(uv)_D + (uv)_E + (uv)_F\} - \{(uv)_A + (uv)_B + (uv)_C\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint_{OCDB} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y}\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\left[2\alpha v - \frac{\partial}{\partial y}(cv) - \frac{\partial}{\partial z}(bv)\right]\right\} dy\,dz$$

$$+ \frac{1}{2}\iint_{OAEC} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + u\left[2\beta v - \frac{\partial}{\partial z}(av) - \frac{\partial}{\partial x}(cv)\right]\right\} dx\,dz$$

$$+ \frac{1}{2}\iint_{OBFA} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + u\left[2\gamma v - \frac{\partial}{\partial x}(bv) - \frac{\partial}{\partial y}(av)\right]\right\} dx\,dy$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{BD} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz + \frac{1}{2}\int_{AE} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz + \frac{1}{2}\int_{CE} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{BF} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{AF} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{1}{2}\int_{CD} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy\,.$$

« Questa ci esprime appunto, come si voleva, il valore di u in M per mezzo dei valori assegnati sulle faccie $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e per il moltiplicatore che supponiamo già calcolato.

« Alla formola (B) possiamo dare una nuova forma, facendo sparire dagli integrali doppî con integrazioni per parti le derivate della u, otteniamo così la nuova formola:

$$\text{(B}^\star\text{)} \quad u_M = (uv)_O + \{(uv)_D + (uv)_E + (uv)_F\} - \{(uv)_A + (uv)_B + (uv)_C\} +$$

$$+ \iint_{OCDB} u \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial}{\partial y}(cv) - \frac{\partial}{\partial z}(bv) + \alpha v \right\} dy\,dz +$$

$$+ \iint_{OAEC} u \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(av) - \frac{\partial}{\partial x}(cv) + \beta v \right\} dx\,dz +$$

$$+ \iint_{OBFA} u \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(bv) - \frac{\partial}{\partial y}(av) + \gamma v \right\} dx\,dy +$$

$$+ \int_{BD} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz + \int_{CE} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \int_{AF} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy +$$

$$+ \int_{AE} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz + \int_{BF} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \int_{CD} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy -$$

$$- \int_{OA} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx - \int_{OB} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy - \int_{OC} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz\,.$$

« Dall'una o dall'altra di queste formole risulta evidente che se una soluzione regolare u della nostra equazione $\Omega(u) = 0$ si annulla sui tre piani coordinati, è nulla dovunque e ne segue il teorema d'unicità:

« Esiste una sola soluzione regolare della $\Omega(u) = 0$ che sui piani coordinati assume valori prefissati.

§ 5.

« Come nel caso particolare considerato nella mia Nota precedente, e in perfetta analogia col teorema di Darboux [1] per il caso di due variabili, sussiste anche qui per le soluzioni principali di una equazione e della sua aggiunta una sorta di teorema di reciprocità, cioè: Se si considerano due punti qualunque M, M′ dello spazio e con u, v si indicano rispettivamente le soluzioni principali della $\Omega(u) = 0$ e della sua aggiunta $\Phi(v) = 0$, relativa la prima al punto M′ la seconda al punto M, si avrà la relazione

$$u_{\mathrm{M}} = v_{\mathrm{M}'} .$$

« Per la dimostrazione supponiamo semplicemente M′ nell'origine O, talchè lungo gli assi coordinati la u soddisferà alle rispettive equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} + au = 0 \,,\ \frac{\partial u}{\partial y} + bu = 0 \,,\ \frac{\partial u}{\partial z} + cu = 0$$

e sui piani coordinati alle altre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + b\frac{\partial u}{\partial z} + c\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} + c\frac{\partial u}{\partial z} + a\frac{\partial u}{\partial z} + \beta u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = 0 .$$

« Allora se ricorriamo alla formola (B), facendone questa volta sparire con integrazioni per parti le derivate della v, troviamo facilmente

$$u_{\mathrm{M}} = v_0 .$$

§ 6.

« Non sarà inutile osservare che se in luogo della equazione omogenea $\Omega(u) = 0$ si ha l'altra non omogenea

$$\Omega(u) = \mathrm{F}(x, y, z) ,$$

essendo F un'assegnata funzione di x, y, z, e si vuole nuovamente integrare

[1] Tome II, pag. 81.

in guisa che la u sui piani coordinati assuma valori dati, i calcoli verranno in ciò solo modificati che si avrà

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 3v\mathrm{F} .$$

« Perciò, onde rendere la formola (B), o la (B*), applicabile al caso attuale, basterà aggiungere al secondo membro l'integrale triplo

$$\int_0^{x_0}\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} v\,\mathrm{F}(x\,,y\,,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

« In particolare la soluzione u di $\Omega(u) = \mathrm{F}$, che si annulla sui piani coordinati è data semplicemente dalla formola

$$u(x_0\,,y_0\,,z_0) = \int_0^{x_0}\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} v\,\mathrm{F}(x\,,y\,,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

essendo v il moltiplicatore principale relativo al punto $(x_0\,,y_0\,,z_0)$. Da questa soluzione particolare, si ottiene ogni altra soluzione aggiungendovi una soluzione della equazione omogenea $\Omega(u) = 0$.

§ 7.

« Benchè non possa qui trovar posto la generalizzazione dei risultati ottenuti al caso di n variabili, possiamo indicare fin d'ora in qual modo tale generalizzazione si effettuerà. Essendo u una funzione incognita di n variabili $x_1\,,x_2\,,\ldots x_n$, le equazioni da considerarsi avranno la forma:

$$\Omega(u) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_n} + \sum_i a_i \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1 \ldots \partial x_{i-1}\,\partial x_{i+i} \ldots \partial x_n} + \sum_{i_1 k} a_{ik} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} +$$

$$+ \sum_{i_1 k_1 l} a_{ikl} \frac{\partial^{n-3} u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} + \cdots + a_{12\ldots n}\, u = 0\,,$$

i coefficienti $a_i\,,a_{ik}\,,a_{ikl}\ldots$ essendo funzioni date di $x_1\,,x_2\,,\ldots x_n$ e indicando in generale

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

il coefficiente di quella derivata $(n-r)^{ma}$ in cui si deriva una volta rispetto a ciascuna variabile eccetto le r:

$$x_{i_1}\,x_{i_2}\ldots x_{i_r}\,.$$

« Allora per definire la soluzione principale di $\Omega(u) = 0$, relativa per esempio al punto $x_1 = 0\,,x_2 = 0\ldots x_n = 0$, procederemo nel modo seguente.

« Separiamo da $\Omega(u)$ l'aggregato di quei termini che contengono una determinata derivata r^{ma} p. e.

$$\frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots \partial x_{i_r}}$$

e le sue derivate e sostituiamo in esso a questa derivata r^{ma} la u stessa. L'espressione differenziale che per tal modo risulta s'indicherà con

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

e si dirà una *componente* d'ordine $n - r$ di $\Omega(u)$. La soluzione principale di $\Omega(u) = 0$ verrà allora definita dalle condizioni seguenti: nel punto $(0, 0, 0 \dots 0)$ assumerà il valore 1; lungo gli assi coordinati $(x_1)(x_2) \dots (x_n)$ soddisferà alle rispettive equazioni componenti del 1° ordine

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_1 u = 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_2 u = 0 \dots \frac{\partial x_n}{\partial u} + a_n u = 0\,;$$

sui piani coordinati $(x_i x_k)$ soddisferà alle equazioni componenti del 2° ordine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_{ik} u = 0\,;$$

sopra gli spazii S_3 coordinati alle equazioni componenti del 3° ordine ecc. e infine sugli iperpiani coordinati S_{n-1} alle equazioni componenti d'ordine $n - 1$.

« Il problema di trovare una soluzione u della $\Omega(u) = 0$ che su ciascuno degli iperpiani coordinati $x_1 = 0\,, x_2 = 0\,, \dots x_n = 0$ si riduca ad una funzione arbitrariamente data delle rimanenti variabili, si risolverà quando della equazione aggiunta alla $\Omega(u) = 0$ si sappia determinare la soluzione principale relativa a quel punto, ove si vuole determinare il valore di u.

« Mi riservo di sviluppare in altro lavoro i risultati sommariamente qui indicati, e di proseguire inoltre anche in altro senso la ricerca, in analogia col noto metodo d'integrazione di Laplace pel caso $n = 2$.

Osservazione

« Nella Nota del dott. Niccoletti, che presento alla R. Accademia, si vedrà come il metodo di Riemann può estendersi senza difficoltà alcuna ai sistemi di equazioni del 2° ordine a due variabili della forma

$$[i = 1, 2, 3 \therefore n]\ \frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} = \sum_r \left(a_{ir} \frac{\partial z_r}{\partial x} + b_{ir} \frac{\partial z_r}{\partial y} + c_{ir} z_r \right).$$

« Non sarà inutile osservare come lo stesso possa ripetersi dei sistemi analoghi di grado superiore e così dei sistemi di 3° ordine:

$$[i = 1\, 2, 3 \dots n]\ \frac{\partial^3 u_i}{\partial x \partial y} +$$

$$\sum_k \left\{ a_{ik} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y \partial z} + b_{ik} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial z} + c_{ik} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y} + \alpha_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \beta_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y} + \gamma_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \delta_{ik} u \right\} = F_i(x, y, z) \text{ ».}$$

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine delle protuberanze solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano durante gli anni 1891-92-93-94.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Nei quattro anni, 1891-94, si osservarono 7616 protuberanze solari così ripartite: 1775 nel 1891, 2363 nel 1892, 2122 nel 1893 e 1356 nel 1894. Dalle osservazioni ricavai le latitudini eliografiche di tutte le protuberanze, e dalla serie delle latitudini la frequenza relativa delle protuberanze medesime nelle diverse zone di 10 gradi. I risultati ottenuti sono riuniti nelle seguenti quattro tabelle per trimestre e per anno, avendo preso per unità il numero totale delle protuberanze osservate in ciascun periodo.

Anno **1891**.

Latitudine	1° Trimestre	2° Trimestre	3° Trimestre	4° Trimestre	Anno
90° + 80°	0,003	0,003	0,001	0,000	0,002
80 + 70	0,000	0,006	0,000	0,007	0,004
70 + 60	0,006	0,003	0,003	0,024	0,009
60 + 50	0,053	0,052	0,122	0,173	0,100
50 + 40	0,115 } 0,453	0,134 } 0,486	0,133 } 0,552	0,088 } 0,533	0,117 } 0,506
40 + 30	0,073	0,105	0,076	0,072	0,082
30 + 20	0,115	0,087	0,120	0,068	0,097
20 + 10	0,050	0,073	0,055	0,059	0,059
10 0	0,038	0,023	0,042	0,042	0,036
0 — 10	0,018	0,017	0,020	0,018	0,018
10 — 20	0,050	0,052	0,038	0,066	0,052
20 — 30	0,112	0,087	0,077	0,085	0,090
30 — 40	0,079	0,122	0,111	0,083	0,099
40 — 50	0,206 } 0,547	0,078 } 0,514	0,112 } 0,448	0,101 } 0,477	0,124 } 0,494
50 — 60	0,067	0,125	0,085	0,096	0,093
60 — 70	0,003	0,015	0,004	0,018	0,010
70 — 80	0,009	0,009	0,001	0,000	0,005
80 — 90	0,003	0,009	0,000	0,000	0,003

Anno 1892.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
90° + 80°	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
80 + 70	0,000		0,013		0,007		0,015		0,009	
70 + 60	0,033		0,106		0,114		0,105		0,089	
60 + 50	0,080		0,065		0,044		0,049		0,059	
50 + 40	0,097	0,536	0,053	0,471	0,048	0,467	0,016	0,399	0,054	0,468
40 + 30	0,116		0,073		0,063		0,051		0,076	
30 + 20	0,097		0,084		0,083		0,078		0,085	
20 + 10	0,086		0,039		0,066		0,040		0,058	
10 0	0,027		0,038		0,042		0,045		0,038	
0 — 10	0,043		0,033		0,067		0,044		0,047	
10 — 20	0,050		0,062		0,055		0,082		0,062	
20 — 30	0,150		0,085		0,101		0,100		0,109	
30 — 40	0,070		0,106		0,109		0,138		0,106	
40 — 50	0,057	0,464	0,091	0,529	0,067	0,533	0,074	0,601	0,072	0,532
50 — 60	0,087		0,115		0,117		0,125		0,111	
60 — 70	0,007		0,037		0,015		0,036		0,024	
70 — 80	0,000		0,000		0,001		0,002		0,001	
80 — 90	0,000		0,000		0,001		0,000		0,001	

Anno 1893.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
90° + 80°	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
80 + 70	0,005		0,000		0,011		0,000		0,004	
70 + 60	0,017		0,011		0,011		0,000		0,010	
60 + 50	0,017		0,011		0,011		0,011		0,012	
50 + 40	0,052	0,339	0,045	0,345	0,042	0,426	0,016	0,394	0,039	0,376
40 + 30	0,055		0,092		0,111		0,069		0,082	
30 + 20	0,085		0,052		0,105		0,149		0,098	
20 + 10	0,068		0,062		0,069		0,091		0,072	
10 0	0,040		0,072		0,066		0,058		0,059	
0 — 10	0,046		0,102		0,057		0,061		0,066	
10 — 20	0,084		0,113		0,076		0,066		0,085	
20 — 30	0,095		0,094		0,107		0,121		0,105	
30 — 40	0,127		0,102		0,081		0,088		0,099	
40 — 50	0,127	0,661	0,056	0,655	0,021	0,574	0,028	0,606	0,058	0,624
50 — 60	0,111		0,075		0,110		0,063		0,090	
60 — 70	0,066		0,108		0,115		0,168		0,114	
70 — 80	0,003		0,005		0,007		0,011		0,006	
80 — 90	0,002		0,000		0,000		0,000		0,001	

Anno 1894.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
90° + 80°	0,000		0,005		0,000		0,000		0,001	
80 + 70	0,000		0,003		0,000		0,000		0,001	
70 + 60	0,003		0,003		0,016		0,000		0,006	
60 + 50	0,018		0,010		0,002		0,012		0,011	
50 + 40	0,008	0,324	0,046	0,355	0,059	0,430	0,045	0,439	0,040	0,387
40 + 30	0,039		0,086		0,093		0,037		0,064	
30 + 20	0,080		0,073		0,082		0,119		0,089	
20 + 10	0,088		0,078		0,080		0,148		0,096	
10 0	0,088		0,051		0,098		0,078		0,079	
0 — 10	0,057		0,071		0,100		0,074		0,076	
10 — 20	0,065		0,068		0,107		0,102		0,085	
20 — 30	0,111		0,137		0,141		0,143		0,133	
30 — 40	0,103		0,081		0,104		0,172		0,115	
40 — 50	0,013	0,676	0,035	0,645	0,014	0,570	0,021	0,561	0,021	0,613
50 — 60	0,015		0,000		0,000		0,033		0,012	
60 — 70	0,222		0,099		0,011		0,000		0,083	
70 — 80	0,080		0,106		0,070		0,008		0,066	
80 — 90	0,010		0,048		0,023		0,008		0,022	

« Da queste cifre emerge il fatto, che mentre nei due primi anni la frequenza delle protuberanze nelle zone è quasi eguale nei due emisferi solari, negli anni invece 1893 e 1894 è sempre assai maggiore al sud dell'equatore solare, con questo di particolare, che cioè un massimo secondario rilevante si manifestò e si mantenne nella zona (-60°-70°), mentre all'estremo nord le protuberanze furono sempre scarse. È chiaro così che nella sola rotazione solare non si può far risiedere la causa della formazione e distribuzione delle protuberanze alla superficie del sole, e che lo stato fisico degli strati sottoposti alla cromosfera e fotosfera non si possono riguardare omogenei, come si è supposto qualora si vollero formulare teorie sulla formazione dei diversi fenomeni, cioè macchie, facole e protuberanze solari.

« Se la frequenza invece di calcolarla per zone, ciò che obbliga talvolta a tener conto di una stessa protuberanza in più zone, si vuole fatto il cal-

colo col numero assoluto delle protuberanze, allora si ottiene il seguente risultato:

	frequenza al nord	frequenza al sud
1891	0,51	0,49
1892	0,47	0,53
1893	0,38	0,62
1894	0,39	0,61

cioè risultati identici a quelli trovati prima, e quindi confermanti il fatto della variazione nella distribuzione del fenomeno alla superficie del sole ».

Matematica. — *Sulle operazioni funzionali distributive.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sull'identità delle comete 1844 I e Ed. Swift 1894.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

« Nel Diario di Roma del 24 agosto 1844 è annunciata dalla Specola del Collegio Romano l'esistenza d'una cometa telescopica nell'Aquario, e nel n. 516 delle Astronomische Nachrichten leggesi una breve Nota del P. Francesco De-Vico, la quale comincia colle parole: « Mi affretto a comunicarle la notizia di una cometa telescopica, che qui *abbiamo scoperta* ecc. ecc. ». La cometa in questione è la così detta *periodica di Vico.* Che lo scopritore sia stato il P. Francesco De-Vico, allora Direttore dell'osservatorio del Collegio Romano, è ben poco probabile. Essa deve essere stata indicata dal F. Bernardino Gambara, che, in qualità di custode-assistente dell'osservatorio, si dilettava di esplorare il cielo, e di informare il suo Direttore delle novità. Nel n. 517 delle A. N. il medesimo P. De-Vico comunica le proprie osservazioni sulla cometa fra 23 agosto e 17 settembre 1844, nonchè gli elementi parabolici dedotti da 3 di esse. Frattanto l'astronomo Faye, colle osservazioni del 2, 10 e 19 settembre 1844, calcolò per primo gli elementi ellittici con un periodo rivolutivo di circa 5 anni $\frac{1}{4}$. In quell'epoca, una cometa a corto periodo era un fatto grosso per l'astronomia, e i periodici se ne occuparono, fra i quali uno politico ed autorevole in Francia insinuò che il gesuita Vico non sarebbe arrivato a tempo per rivedere dalla sua reggia scientifica il ritorno dell'astro; si vuole che l'autore dell'insinuazione

sia stato il grande Francesco Arago, e non è impossibile che ciò sia vero. Dopo Faye calcolarono elementi ellittici Nicolai, Hind, Goldschmidt, ma il lavoro più classico è quello di Brünnow.

« Noi possediamo un lavoro di lui, premiato dalla R. Accademia dei Paesi Bassi, il quale ha il titolo: *Mémoire sur la Comète elliptique de De-Vico* Amsterdam 1849. Discusse le osservazioni tutte del 1844 (22 agosto-31 dic. Roma-Poulkovo) egli fornì il sistema seguente osculante alla data 2 settembre 1844).

« Epoca 1844 Sept 2, 5 Parigi

longitudine perielio	342°	30′	47″. 8
longitudine nodo asc.	63	49	37. 6
inclinazione	2	54	45. 5
eccentricità	38	7	28. 1
anomalia media	0	0	10. 2
moto diurno			649″. 9362.

« Gli elementi sono riferiti all'eclittica e all'equinozio medio dell'epoca. Dal moto diurno risulta un periodo rivolutivo di cinque anni giuliani e mezzo meno 15 giorni.

« La cometa 1844 I per pochi dì fu ben visibile ad occhio nudo, con una piccola coda a ventaglio lunga da 5′ a 6′.

« È ben noto che parecchie comete, generalmente a corto periodo, con moto diretto e poco inclinate all'eclittica, hanno elementi orbitali poco differenti fra di loro, così che non è illogico pensare ad una comune origine quale si sia, così che possonsi fare aggruppamenti fra quelle, i cui elementi s'assomigliano di più.

« La cometa 1844 I^{ma} parve da principio essere quella di Lexell, ma il lavoro ingente fattone da Leverrier escluse l'identità. Laugier e Mauvais crederono che la cometa in questione fosse quella del 1585, ma il Leverrier stesso provò, quasi all'evidenza, che ciò non era vero, e che la cometa 1844 I^{ma} è identica a quella del 1678.

« Leverrier, calcolando approssimatamente le perturbazioni, fissò gli elementi orbitali della cometa 1844 I a sette diverse epoche dal 1753 al 1844. Esaminando i singoli valori della longitudine del perielio e del nodo, presto scorgesi che i primi aumentano lentamente col tempo, mentre rapidamente scemano i secondi, locchè il Calandreau ha dimostrato conforme alla teoria nel caso di una cometa periodica a moto diretto.

« Dacchè gli elementi ellittici, dedotti dalle osservazioni del 1844, assegnavano, senza dubbio, un periodo rivolutivo di 5 anni e $\frac{1}{2}$, era da prevedere che l'astro, specialmente nei passaggi futuri al perielio così detti favorevoli, sarebbe stato riveduto; e il Brünnow, calcolate con cura le per-

turbazioni dal 1844 al 1855, preparò tre effemeridi per la ricerca in quell'anno variando T di ± 4 dì.

« Le effemeridi apparvero nel N. A per il 1858, cioè nel 1854, ma le ricerche fatte in cielo riuscirono infruttuose, e neppure un'osservazione isolata di una cometa riferita dal Goldschmidt (16. V. 1855) parve agli astronomi che dovesse essere la cometa 1844 I, benchè ben prossima al luogo assegnato dal Brünnow. È bene notare che il passaggio al perielio del 1855 era favorevole alle osservazioni.

« Scorsero gli anni e l'interesse per l'astro andò mano mano scemando, le perturbazioni non vennero più calcolate, quando, quasi contemporaneamente, Berberich a Berlino e Schulhof a Parigi annunziarono che una debolissima cometa, osservabile soltanto con grandi oggettivi, scoperta il 20 novembre 1894 a California dall'astronomo Edoardo Swift, altro non era che la cometa 1844 I.

« È maravigliosa la rapidità colla quale l'illustre Berberich si accertò quattro dì dopo della scoperta che l'astro doveva essere la cometa 1844 I. Per le cose dette prima, gli elementi ellittici della Swift dovevano dare la longitudine del perielio alquanto, ma di poco, più forte del valore calcolato da Brünnow per il 1844, la longitudine del nodo notevolmente più piccola, l'inclinazione quasi identica, poco differenti gli altri due elementi, cioè eccentricità e moto medio. Ecco ora gli elementi di Brünnow, ridotti a 1894.0 approssimatamente, i quali spettano al 1844 e quelli in prima approssimazione di Schulhof per la Swift.

	Elementi Brünnow (1844 I)	Elementi Swift di Schulhof
longitudine del perielio	343° 22′	345° 20′
longitudine del nodo	64 31	48 35
inclinazione	2 55	2 59
eccentricità	38 7	34 40
moto medio	650″	612″

« Quando nel 1763, secondo i calcoli di Leverrier, l'eccentricità dell'orbita della cometa 1844 I era 34° 28′, il moto medio era 611″.3.

« Il Schulhof quindi e il Berberich si trovarono autorizzati ben giustamente ad annunziare che la cometa Swift altro non era che una riapparizione della cometa 1844 I.

« Perchè mai la cometa in questione non fu riveduta nel 1855 e in tutti gli altri passaggi al perielio accaduti in condizioni favorevoli, mentre l'ammirabile lavoro di Brünnow è oggi completamente confermato? Perchè l'isolata osservazione di Goldschmidt del 16 maggio 1855 venne respinta?

La ragione principale stava nella debolezza dell'oggetto nebuloso osservato da lui.

« L'osservazione di Goldsmidt trovasi nelle AN al N° 978.

1855 maggio 16 14^h Parigi α cometa $21^h\ 41^m, 8$
δ cometa — $15^\circ\ 38', 3$

« L'effemeride di Brünnow nel N. A. del 1858 comincia col 24 maggio 1844. Extrapolando approssimatamente per quella parte dell'effemeride che è basata sopra T + 4 dì si ha per il 16 maggio 12^h Gr. circa $21^h\ 36^m$; — $16^\circ\ 50'$.

« Per un'ascensione retta osservata $21^h\ 41^m, 8$, la declinazione avrebbe dovuto essere, secondo le effemeridi, circa — $16^\circ\ 25'$, che differisce di $47'$ dall'osservazione.

« Non è adunque il luogo che determinò gli astronomi a repellere l'osservazione di Goldschmidt a priori come non appartenente alla cometa 1844 I, ma bensì la debolezza dell'astro.

« Me oggi sappiamo che per le comete tale criterio non regge più, dacchè la legge della reciproca del prodotto dei quadrati delle distanze *cometa sole, cometa terra* vale per corpi opachi ed anche di eguale potere riflettente in tutte le loro parti, locchè non è il caso delle comete, della costituzione fisica e dei fenomeni intrinsechi delle quali poco o nulla sappiamo, ma almeno questo, che possono subire spegnimenti, riaccensioni e dispersioni delle loro parti nello spazio, e la debolezza dell'attuale cometa Swift, che è la 1844 I, è una nuova conferma, se ne avessimo avuto bisogno. E poi un ammaestramento sul modo minuzioso ed accurato col quale dovranno farsi in avvenire ricerche consimili, avendo presente il criterio che l'astro può apparire in quanto a luce e ad aspetto ben diverso dal presupposto ».

Matematica. — *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

Matematica. — *Su un sistema di equazioni a derivate parziali del 2° ordine.* Nota del dott. ONORATO NICOLETTI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla temperatura minima di luminosità.* Nota del dott. P. PETTINELLI, presentata dal Socio BLASERNA.

« I sigg. Kennelly e Fessenden (1), dopo di avere determinato la dipendenza dalla temperatura della resistenza elettrica del rame, scaldando con una corrente un filo di rame lungo $30^{cm},4$ di $0^{cm},0038$ di diametro chiuso in un tubo di vetro, in cui veniva fatto il vuoto, fino a che al buio il filo cominciava a divenire luminoso, deducendone la temperatura dalla misura della resistenza, hanno fissato la temperatura minima di visibilità a 493°.

« Draper (2) osservando all'oscuro una strisciolina di platino scaldata da una corrente elettrica e deducendo la temperatura della striscia dalla dilatazione prodotta dal riscaldamento, ammettendo per coefficiente medio di dilatazione quello ricavato dalle esperienze di Dulong e Petit, era arrivato a fissare la temperatura minima di visibilità a 525°. Correggendo tale temperatura coi dati recenti pel coefficiente di dilatabilità del platino (3) si trova esser ridotta secondo le determinazioni del Draper a 490°. Ed anche nei trattati più comuni viene data come minima temperatura di visibilità circa 500 gradi.

« Ma, ritornando alle determinazioni dei sigg. Kennelly e Fessenden, se si può, dietro la ben nota regolarità con cui procede l'aumento di resistenza elettrica di un metallo puro con la temperatura, ammettere che la temperatura del filino di rame fosse con sufficiente precisione determinata, viene il dubbio che la superficie illuminante vista fosse troppo piccola per permettere di distinguere raggi di debolissima intensità. E difatti precedentemente il Weber (4), scaldando lamine sottili di metalli differenti, accoppiate due a due, e deducendone la temperatura dalla f. e. di ciascuna coppia, aveva trovato che il ferro si mostrava luminoso a 377 gradi, il platino a 391 etc. L'Emden (5) riprese le determinazioni del Weber, variando la qualità delle coppie di lamine metalliche, e determinando con maggior precisione le variazioni della f. e. di ciascuna coppia con la temperatura, trovò che la superficie ossidata del ferro cominciava a divenir luminosa a 405 gradi, l'oro a 423, altri metalli a temperature vicine a 400°.

(1) *Some measurements of the temperature variation in the electrical resistance of a sample of Copper.* The physical review. V. I, n. 4. New-York, 1894.

(2) *On the production of light by heat.* Phil. Mag. 1847, XXX, pag. 345.

(3) J. R. Benoit, *Travaux et Mémoires du Bureau International de Poids et Mésures,* 1888, pag. 90.

(4) Weber, *Die Entwickelung der Lichtemission glühender fester Körper.* Wied. An. 1887.

(5) *Ueber den Beginn der Lichtemission glühender Metalle.* Wied. Ann. 1889.

« Il Gray [1], ripetendo l'esperienze del Draper, ma osservando in una camera oscura una striscia di platino larga 1 cm. lunga 10 cm., vista con l'occhio a 30 cm., di distanza; misurando la temperatura con metodo analogo a quello del Draper, ma prendendo per punti di confronto la fusione di perline di varie sostanze fondenti sulla superficie del platino a temperature diverse già note, ha trovato che la minima temperatura di visibilità è la stessa per una superficie lucida o annerita, e che varia molto con lo stato di preparazione dell'occhio, uno stesso occhio potendo in circostanze di massima sensibilità vedere a 370 gradi luminosa la striscia di platino e in circostanze di minima sensibilità a 470.

« Ho creduto utile di ripetere queste esperienze con apparecchi di precisione e vedendo una superficie illuminante assai grande, per levare qualsiasi dubbio intorno alla misura della temperatura a cui i varî corpi incominciano a divenire nettamente luminosi.

« Ho adoperato una stufa speciale a doppio tiraggio costituita da un cilindro cavo di ferro dello spessore di cm. 0,5 di 16 cm., di diametro e 30 cm. di altezza, munito di due coperchi per la parte superiore; la stufa conteneva nell'interno un cilindro massiccio di ghisa di 14 cm. di diametro e 20 cm. di altezza, nella base superiore pel quale erano state praticate due buchette cilindriche e simmetricamente poste, profonde 6 cm. e di cm. 3,2 di diametro. Tale stufa veniva scaldata con una grande lampada Bunsen o con un fascio di 6 becchi Bunsen simmetricamente disposti, interponendo un regolatore di pressione.

« In una delle buchette della stufa s'adattava un termometro ad aria, a volume costante, pressione ridotta a circa $^1/_3$ d'atmosfera alla temperatura dell'ambiente, acciocchè ad alta temperatura il vetro non sopportasse forti pressioni e fosse diminuita per comodità di lettura l'altezza della colonna di mercurio. Lo spazio nocivo era minimo e trascurabile l'errore che da esso derivava; le letture si facevano ad occhio nudo sulla scala di lastra da specchio millimetrata, che rifletteva la colonna di mercurio con errore non superiore al mezzo millimetro. Mi servivo inoltre, dopo di averli confrontati col termometro ad aria, di due termometri a mercurio, nei quali era utilizzata la compressione dell'azoto chiuso nell'asta per ritardare l'ebullizione del mercurio.

« M'assicurai che dopo di avere scaldata adagio la stufa, leggendo subito dopo spento il bruciatore Bunsen, il termometro ad aria ed un altro termometro, collocati nelle due buchette e circondati di limatura di rame ben pigiata, le temperature delle buchette non differivano più di un grado e mezzo nei limiti 200-460 centigradi. Ed avendo constatato che un termometro a bulbo piccolo, tenuto in una delle buchette senza l'interposizione della limatura di

[1] *The minimum temperature of visibility* by S. P. Gray. Phil. Mag. June, 1894.

rame, segnava nei limiti 200-460 non più di 4 gradi in meno del termometro ad aria fissato nell'altra buchetta, ammisi che per temperatura delle superfici delle buchette, in assai miglior connessione termica col blocco di ghisa del bulbo di un termometro circondato d'aria, si dovesse prendere quella segnata dal termometro ad aria circondato di limatura.

« Le determinazioni della temperatura minima di visibilità venivan fatte con gli apparecchi collocati in una stanza ben chiusa e di notte tempo. Scaldata la stufa sino a 460, spento il bruciatore Bunsen ed il debole lume, si toglievano i coperchi della stufa ed al disopra di questa veniva osservata la base superiore del cilindro di ghisa, tenendo l'occhio a circa 60 cm. da questa, guardando specialmente la buchetta, che rimaneva vuota, mentre nell'altra era fissato il termometro ad aria oppure uno a mercurio. Si vedeva, restando tutto il resto al buio perfetto, la base superiore del cilindro di ghisa risplendere tutta intera di una luce o meglio di un bagliore di colore indeciso ad una temperatura di circa 10 gradi maggiore di quella in cui svaniva, decisamente rossiccio a temperatura più alta. Per non essere ingannato da immagini soggettive l'osservatore girava gli occhi all'intorno della stanza e poi per confronto guardava se la superfice in esame era illuminata, oppure davanti a questa metteva e toglieva rapidamente uno schermaglio. La luce svaniva pressochè contemporaneamente tanto nella buchetta, quanto in tutta la base superiore del cilindro di ghisa, cosicchè la superficie illuminante vista veniva ad essere di 150 cm. quadrati.

« Richiedendo le letture un certo tempo, si calcolava il raffreddamento della stufa in questo tempo, o si leggeva il termometro un poco avanti che la luce svanisse del tutto. Del resto simili correzioni portavano una differenza non mai più grande di 3 gradi.

« Così constatai che vedendo la superficîe illuminante con l'occhio alla distanza di 60 cm. da essa, prima tutta intera, poi attraverso quattro fori tanto grandi ed a tal distanza posti da vedere col primo un quarantesimo dell'intera superficie, col secondo un duecentesimo, col terzo un quattrocentesimo, col quarto un ottocentesimo, non si distingueva più la luce attraverso il primo foro ad una temperatura di circa sei gradi superiore a quella con la quale svaniva vedendo tutta la parte superiore del cilindro di ghisa, attraverso il secondo foro ad una temperatura superiore a questa di circa 20 gradi, col terzo di circa 40 gradi, col quarto di assai più di 60 gradi. Peraltro vedendo superfici piccole era assai indeciso l'istante in cui la luce svaniva.

« Per provare come variava la temperatura osservata con la natura del corpo scaldato successivamente sparsi la superfice vista di tenui polveri metalliche, fasciai una buchetta con panierine assai aderenti di rame, ottone, ottone annerito col nerofumo, rame platinato ben terso.

« Ho constatato che le superfici che hanno un potere emissivo per i raggi oscuri assai elevato, come nerofumo, superfici ossidate di certi metalli, con-

tinuano tutte ad esser viste fino alla stessa temperatura, che è la minima. Le superficie ben lucide non si vedono nettamente luminose che almeno venti gradi sopra la temperatura minima di visibilità propria alle superfici nere.

« Il vetro lo cimentai in frammenti, chiusi in un tubo pure di vetro sottile aderente alla buchetta; spento il bruciatore ed il lume estraevo il tubo dalla stufa e l'esaminavo; ma non mi fu possibile vederlo menomamente luminoso a 460°.

« I raggi luminosi in esame attraversano il vetro e l'acqua, ma aumentando lo spessore dell'acqua e del vetro, l'assorbimento è più forte che per i raggi di media lunghezza d'onda.

« La reticella che serve per i becchi Auer, che ha un potere emissivo assai elevato per i raggi luminosi di media lunghezza d'onda, non si mostra affatto luminosa al disotto della temperatura minima di visibilità propria delle superfici nere. La temperatura minima di visibilità variava da persona a persona anche di 6 centigradi; la media delle numerose determinazioni fatte risultò di 404. Nelle mie esperienze non ho constatato differenze notevoli dipendenti da una lunga preparazione dell'occhio; anzi come prova di questo posso affermare che spesso, quando la luce stava per svanire, accendevo un lume, e poi, spentolo, dopo pochi istanti continuavo a vedere la base del cilindro di ghisa illuminata come se non avessi affatto disturbato l'occhio (1).

« Riassumendo i risultati di un centinaio di determinazioni, si può sta bilire che la temperatura minima alla quale si vede luminoso un corpo, diminuisce con l'aumentare fino ad un certo limite della superficie illuminante vista sempre ad una stessa distanza; che tale limite si può ritenere raggiunto, almeno per aree circolari e per distanze di 60 cm. dall'occhio alla superficie da una superficie di circa 150 cm. quadrati; che tale temperatura diminuisce con l'aumentare del potere emissivo per i raggi oscuri della superficie illuminante vista, varia di poco da individuo ad individuo, e che la minima temperatura di visibilità può ritenersi 404°. I raggi luminosi che partono dai corpi a tale temperatura hanno particolarità intermedie fra quelli oscuri e quelli luminosi emessi a più alta temperatura.

« È più che spiegata la differenza notevole di circa 90 gradi fra il valore da me dato, assai concorde coi numeri dati dal Weber e dal Gray, e pressochè identico a quello dato dall' Emden pel ferro, e quello trovato dai sigg. Kennelly e Fessenden stante la piccolezza della superficie illuminante vista nelle loro esperienze. E dopo esperienze fatte da varî sperimentatori con metodi assai diversi e risultati abbastanza concordi, si può stabilire con sicurezza che i corpi possono cominciare a divenire luminosi alla temperatura di circa 400 gradi.

(1) Resultati analoghi ottennero altri tre sperimentatori, dotati di una vista normale.

« Ringrazio il prof. A. Bartoli, direttore dell' Istituto Fisico della R. Università di Pavia, che ha messo a mia disposizione il materiale occorrente per tali misure ».

Meteorologia. — *I temporali in Italia.* Nota del dott. M. Sacchi, presentata dal Socio Tacchini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sopra alcuni minerali di Su Poru fra Fonni e Correboi in Sardegna.* Nota di D. Lovisato, presentata dal Socio Struever.

« Da vari anni nella zona di schisti cristallini uronici sulla destra della strada, che da Fonni conduce alla sella di Correboi, ho raccolto alcuni campioni di un minerale verde dalle splendide sfaldature e che per molti caratteri fisici e specialmente per essere fusibile in smalto nero, attirabile dalla calamita, avea collocato fra gli epidoti, tanto diffusi in Sardegna, particolarmente nelle sue numerosissime varietà di granuliti, microgranuliti, porfiriti, ecc. Senonchè esaminati meglio quegli esemplari ed avendo proceduto all'analisi quantitativa, mi sono convinto che si trattava di un minerale da ascriversi al gruppo dei pirosseni, senza allumina, mancando assolutamente questa nel minerale in questione, il quale però presenta una formola molecolare, che non coincide con alcuna delle specie finora conosciute.

« La regione ove trovasi la sostanza in esame si chiama *su Poru*. Vi si arriva da Fonni dopo poco più di un' ora e mezzo, attraversando prima la località di Ghistorrai, famosa per le sue granuliti a sferoidi, che costituiscono ancora oggi una specialità per la Sardegna, non coincidendo con quella granulite, includente gli sferoidi, neppure il *Kugelgranit* di Wirvik presso Borgå in Finlandia, trovato fino dal 1889 dal vescovo H. Råbergh, ma illustrato soltanto nel 1893 dal sig. Benj. Frosterus (1), e poi la località, ove si trova il famoso banco di quarzo contenente dei nuclei di quarzo fibroso-raggiato in forma di tronchi di cono, impernati l'uno nell'altro (2), che l'il-

(1) Ueber ein neues Vorkommniss von Kugelgranit unfern Wirvik bei Borgå in Finland nebst Bemerkungen über ähnliche Bildungen von Benj. Frosterus (Geologe der geologischen Commission in Finland). Mit zwei Tafeln und 4 Fig. in Text. Helsingfors 1893.

(2) *Spacialità rimarchevoli nella zona granitico-schistosa della Sardegna.* Nota di Domenico Lovisato. Estratto dal Vol. I, serie 4ª. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei. Roma. 1885.

lustre e compianto prof. vom Rath pur dichiarava di non aver mai visto in alcun altro luogo.

« Di questi interessantissimi sferoidi di Ghistorrai si è occupato recentemente ancora il conte dott. K. von Chrustschoff, il quale fin dal 1888 ci avea regalato un'interessante Nota sopra la granulite di Ghistorrai (1). Nello splendido lavoro recente (2), che da parecchie analisi delle varie specie di sferoidi che s'incontrano a Ghistorrai e ch'egli divide in cinque tipi distinti, a seconda specialmente dell'aspetto presentato dal nucleo interno, troviamo aggiunti ai minerali, già riconosciuti per questi meravigliosi sferoidi, l'anortite e la nefelina.

« Su Poru si trova sulla destra della strada, che conduce a Correboi, giù nel vallone, prima d'arrivare allo spartiacque, che permette spingere l'occhio giù negli avvallamenti, nei quali corre la strada per Orgosolo.

« Si veggono fatti degli scavi e principiate delle gallerie in quegli schisti uronici, lavorazioni che si fecero per avere forse osservato in quella formazione metamorfizzata dalle non lontane granuliti disseminata della blenda con pirite. È assieme a questi minerali ed in mezzo a quegli schisti che si trova la sostanza, che forma lo scopo precipuo di questa Nota. Essa si presenta in masse laminari più che in vene nelle formazioni schistose: le masse laminari qua e là tendono alla struttura fibrosa e talvolta anche granosa di color verde oscuro, che diviene un po' più chiaro e lucente nella frattura fresca e sono sfaldabili in due direzioni.

« La polvere della sostanza fresca è verde più pallido del minerale: alla superficie però si presenta questa sostanza, che è quasi opaca e tenace, molto decomposta ed ha un colore nero di ferro, ed a decomposizione molto inoltrata vi si osserva della limonite.

« In tubo chiuso decrepita, cangia colore facendosi più oscura e dà acqua. Al cannello fonde in scoria nera attirabile dalla calamita. Scaldata al rosso la polvere cangia colore, ma non s'agglutina. Non è attaccabile dagli acidi a freddo; è decomposta dall'acido cloridrico a caldo, colorendo la soluzione in giallo per la presenza del ferro, lasciando un residuo indecomposto e silice gelatinosa. Sulla lamina di platino fusa con carbonato di soda e con nitrato potassico, dà forte reazione verde del manganese, mentre la perla col borace è verde, presentando la reazione del ferro. Se noi trattiamo la sostanza a temperatura più elevata, capace a fonderla completamente, si ottiene scoria nera in forma di perla rotonda, non più attirabile dalla calamita,

(1) K. de Kroustschoff, *Notice sur la granulite variolitique de Fonni près de Ghistorrai (Sardaigne)*. Bulletin de la Société française de Minéralogie; nos 4 et 5. Avril-Mai 1888. Tome X, pag. 173-176.

(2) Dott. K. de Chrustschoff, *Ueber holokrystalline makrovariolithische Gesteine*. Avec 3 planches et 37 desseins dans le texte. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, série 7e. tome XLII, n. 3. 1894 (Da pag. 88 a p. 129).

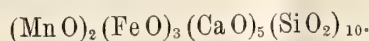
ciò che si spiega chiaramente collo stato di ossidazione nel quale trovasi il ferro, che durante il primo arroventamento si trasforma in ossido ferroso ferrico attirabile dalla calamita, ed alla temperatura più elevata in ossido ferrico, non attirabile dalla calamita, ed in ciò abbiamo una specie di conferma che il ferro nella composizione della nostra sostanza, come vedremo tosto nella composizione centesimale, si trova allo stato di ossido ferroso e non ferrico.

« La sua durezza è di poco superiore a 4 ed il p. s. = 3,446 alla temperatura di 10,2° C dell'acqua.

« L'analisi fatta, come le altre due della presente Nota, dal mio assistente, prof. Michelangelo Fasolo, ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	48,48
CaO	22,62
FeO	17,46
MnO	10,92
MgO	0,32
H_2O	0,32
	100,12

dai quali si può venire alla seguente formola molecolare:

$$(MnO)_2 (FeO)_3 (CaO)_5 (SiO_2)_{10}.$$

« La mancanza assoluta d'allumina strappa questa sostanza al gruppo degli epidoti e ci obbliga per gli altri componenti e per le altre proprietà chimiche e fisiche osservate a pensare a quello dei pirosseni senza allumina, e più precisamente ad una varietà della *Hedembergite*, mancante assolutamente d'allumina, più ricca di manganese e più povera di magnesia e specialmente di ferro, che nella nostra sostanza, come abbiamo già osservato si trova tutto allo stato ferroso: più ancora s'avvicinerebbe per la sua forte quantità di manganese alla *Jeffersonite* di Sparta e di Franklin Furnace della Nuova Jersey, che taluni riferiscono ancora alla *Hedembergite*, ma la mancanza dello zinco c'impedisce di avvicinare a questa varietà di pirossene la nostra sostanza, che potremo quindi considerare come una varietà di *Hedembergite*.

« Sempre a *Su Poru*, abbiamo già ricordato che assieme a questa sostanza nella sua massa si trova disseminata la *blenda* in massecole ed in mosche, ed in quantità minore la *pirite di ferro*, talvolta in netti cubetti. Qua e là nella sostanza divenuta granosa corrono venuzze e piccole lenti di *granato*, che alle volte presenta netto il rombododecaedro in alcune cavità, di color verde chiaro o giallo melato e qualche volta anche rossigno; non manca neppure l'*idocrasia*, che presentasi in prismi non finiti e del colore

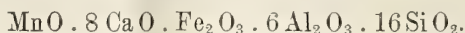
del granato. Più rara apparisce la *calcopirite* in mosche, ma più frequente, particolarmente nella massa granosa, abbiamo la calcite assieme al quarzo.

« La calcite ancora disseminata finamente nello stesso giacimento forma assieme al quarzo e ad altre sostanze uno strato con predominanza di un minerale leggermente verdognolo, tendente al giallo, che alla parte superiore presentasi in lunghi aghi intrecciantisi fra loro in tutte le direzioni e talvolva raggruppantisi a ventaglio e sfaldabili nettamente in due direzioni parallele al loro allungamento e dalla lucentezza vitrea tendente alla madreperlacea o resinosa. È fragilissimo e talvolta mescolato a grossi elementi di quarzo e di calcite si trova in cristalli quasi perfetti. Il colore della polvere è bianco sporco, leggermente cinereo. Gli aghi sono translucidi, alle volte quasi trasparenti. Colla durezza eguale a 6 ha il peso specifico $= 3,126$ alla temperatura dell'acqua di 10,2° C. Scaldato in tubo chiuso da poca acqua, cangia colore, divenendo molto oscuro, rossastro raffreddandosi. Ridotto in polvere fina e scaldato al rosso si agglutina e diviene di colore giallo verdastro. Al cannello fonde in scoria bruna giallastra in forma di cavolo fiore, ma non è attirabile dalla calamita. Non è decomponibile dagli acidi a freddo; a caldo si decompone in parte nell'acido cloridrico: la polvere calcinata si decompone più facilmente colorando la soluzione cloridrica in giallo con un residuo non decomposto e silice gelatinosa. Col nitrato potassico e col bicarbonato di soda mescolata la polvere e fusa in capsulina di platino dà reazione leggera del manganese colla colorazione verde caratteristica: col borace si ha la reazione del ferro con scheletro siliceo.

« L'analisi chimica quantitativa avrebbe dato:

SiO_2	41,97
Al_2O_3	28,60
Fe_2O_3	5,48
MnO	3,10
CaO	19,55
MgO	traccie
H_2O	0,71
perdite	0,59
	100,00

che conduce alla composizione molecolare:

$$MnO . 8\,CaO . Fe_2O_3 . 6\,Al_2O_3 . 16\,SiO_2.$$

« Evidentemente trattasi di un *epidoto* raro pel suo colore e distinto dall'epidoto normale per l'abbondanza in allumina e specialmente manganese,

nonchè per la sua povertà in calce e particolarmente in ferro, pei quali rapporti si avvicinerebbe ad una *Zoisite*.

« Questa sostanza minerale, prodotta per causa di azioni secondarie o metamorfiche, si presenta in una quantità di roccie sarde come risultato della decomposizione di silicati ferro-magnesiaci. Lo troviamo quindi in tutte le granuliti a formare bei nidi, alle volte riconoscibili in distanza pel loro colore verde pistacchio e l'abbiamo visto anche in quella famosa a sferoidi di Ghistorrai (1); lo rinveniamo anche negli schisti uronici, nelle roccie secondarie e nelle roccie vulcaniche antiche, si da potersi dire una delle specie minerali più frequenti in Sardegna.

« E qui credo importante il segnalarlo nel vulcanico antico, che s'incontra poco dopo la fermata ferroviaria di Uta e che passando per Siliqua continua fin oltre Villamassargia, che noi brevemente diremo di Siliqua. Il Lamarmora lo mette nell'eocene (2) ed il De Stefani (3) addirittura nel quaternario, mentre io l'ascrivo nettamente al miocene, come lo proverò a tempo opportuno con spaccati coll'aiuto della stratigrafia, dopo che avrò compito lo studio micrografico delle roccie, che costituiscono quell'interessante gruppo, nel quale troviamo le vere *trachiti* sarde, essendo per lo più *andesiti* le forme litologiche, che nell'isola da quasi tutti son conosciute invece col nome di trachiti. In una delle forme litologiche di questo gruppo, ricca di pirite, contenente anche dell'arsenico, si veggono dei bei sferoidi che dalla grossezza di un uovo di gallina vanno a quella del diametro maggiore di 22 millimetri: dentro una buccia dello spessore di 10 mm. e nettamente isolabile nei più grossi sferoidi in decomposizione, si trova una massa d'epidoto cristallino granuloso.

« La sostanza è verde pistacchio, splendente, translucida, fragile. La polvere finissima di color verde più chiaro del minerale è incompletamente solubile nell'acido cloridrico concentrato: si discioglie il 17,70°/₀ ed il residuo di 82,30°/₀ consta di SiO_2 libera e silicato d'alluminio, ferro e calcio, non decomposto. La parte solubile nell'acido cloridrico contiene in proporzione maggiore quantità di ferro ferrico della porzione, che rimane indecomposta, per determinazione approssimativa.

« La polvere perde gradatamente 2,83°/₀ d'acqua dalla temperatura di 210° al rosso vivo. La durezza è = 6 e pel peso specifico di alcuni frammenti si sarebbe ottenuto 3,044 e per altri 3,164 alla temperatura di 14°C dell'acqua.

(1) *Sopra il granito a sferoidi di Ghistorrai presso Fonni in Sardegna.* Nota II, Rendiconti R. Accademia dei Lincei. Roma 1885, pag. 823.

(2) *Voyage en Sardaigne,* troisième partie, tome I.

(3) C. De Stefani, *Cenni preliminari sui terreni cenozoici della Sardegna.* Rendiconti R. Accademia dei Lincei. Estratto dal vol. VII, 1° sem., serie 4ª. Roma, 1891.

« La parte centrale dei noduli seccata a 105° C avrebbe dato per composizione centesimale:

SiO_2	42,25	
Al_2O_3	20,35	
Fe_2O_3	11,87	
FeO	0,31	
CaO	18,65	
MgO	2,13	
Na_2O	1,47	
TiO_2	0,02	(0,05)
H_2O	2,83	
perdite	0,12	
	100,00	

con traccie di manganese ed assoluta mancanza di potassio, essendo riuscita negativa la prova collo spettroscopio.

« Questi noccioli ricordano gli altri già da me accennati vari anni fa in un dicco di roccia porfirica di Capo Carbonara [1], colla differenza che in questi ultimi l'epidoto è raggiato-fibroso, mentre nei noduli del vulcanico di Siliqua l'epidoto è confusamente riunito.

« Il Jervis [2] cita per la Sardegna l'epidoto compatto nel Monte Oro di Arzana in un filone metallifero, associato alla magnetite a Pattada, a Pula ed a Talana, nel porfido a Perdas de Fogu a mezzogiorno di Seui; ma da quanto ho detto precedentemente possiamo concludere che, dovunque troviamo roccie cristalline, abbiamo l'epidoto ».

Paleontologia. — *Silicospongie plioceniche.* Nota del dott. Paolo Malfatti, presentata dal Socio Capellini.

« Nelle formazioni argillose del pliocene di Borzoli presso Sestri Ponente nel Genovesato, il signor Razzore ebbe già a raccogliere alcuni esemplari fossili, che, ravvisati dal prof. De Stefani quali preziosi avanzi di Silicospongiarî, mi furono concessi in istudio dietro le cortesi istanze del mio maestro. A quanti

(1) *Specialità rimarchevoli nella zona granitico-schistosa della Sardegna.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Estratto dal vol. I, serie 4ª, 1885.

(2) G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia.* Parte terza. Regione delle isole (Sardegna e Sicilia).

coltivano fra noi gli studî paleontologici tale scoperta dovrà apparire davvero di grande momento, ond'è che facciamo voti che il prof. Razzore continui con eguale perseveranza le sue indagini in quella formazione e che a lui spetti il vanto di aver per primo contribuito a riempire là grave lacuna che tuttora ci si appresenta nella spongiofauna pliocenica.

« Ed anzitutto m'incorre di render noto che le notizie illustrative di questo piccolo materiale fanno parte di altro mio scritto di maggior lena che col titolo « *Contribuzione alla Spongiofauna del cenozoico italiano* » confido sarà presto dato alle stampe. Non ho peraltro creduto disacconcio stralciare quella parte di indicazioni che si riferiva alle poche forme plioceniche, poichè l'argomento rappresentando un nuovo acquisto della paleontologia meritava, almeno a mio avviso, di esser reso tosto di pubblica cognizione. Ne consegue che in questa Nota mi limito a dare delle forme dei cenni diagnostici sommarî, riservando l'illustrazione più dettagliata accompagnata dai disegni e dai rilievi microfotografici delle lamine d'osservazione, al lavoro cui ebbi ad accennare più sopra.

« Si tratta è ben vero di pochi esemplari, in parte frantumati, ma questi spongiarî si presentano in uno stato di conservazione della trama scheletrica così perfetta che ci concedono di venire a determinazioni precise.

« I due campioni meglio conservati appartengono ad una *Dictionina euretide* e già all'aspetto esterno essi rammentano notevolmente le forme mioceniche di *Craticularia*. Non possono infatti nascere dubbî ed incertezze di sorta intorno alla determinazione generica di questa forma: il sistema acquifero, il tipo spiculare, la foggia dell'intreccio scheletrico dictionale e la stessa configurazione macroscopica esterna, che, giova qui il rammentarlo, è in certi tipi fattore eloquentissimo di ricognizione sistematica, non ci lasciano in forse nell'assegnarla a quel gruppo di spongiarî che tanto svariati ed abbondanti nel giurese superiore, ma segnatamente nel cretaceo, si continuano con forme non meno cospicue e per il numero e per la forma negll strati terziarî di Orano e dell'Emilia; giova anzi ricordare in proposito che in quest'ultima località le *Craticularie* assumono una tale strabocchevole varietà di forme, da lasciare a tutta prima assai perplesso l'osservatore che si sia accinto a classarle specificatamente.

« Queste forme plioceniche si differenziano peraltro dalle *Craticularie* emiliane per una evidente riduzione di dimensioni negli elementi spiculari, riduzione che non è da ascriversi invero a ragioni di età, ma che appare ben palese doversi interpretare quale pecüliarità della forma stessa. Di questa prima forma mi limito per ora a dare dei cenni diagnostici; allo scopritore di questi preziosi spongiarî è dedicata questa nuova specie.

« *Craticularia Razzorei* nov. sp.

« Lo spongiario appare di forma infundibulare, con cratere profondo, con ostioli disposti in serie longitudinali e trasversali incrociantisi. Lo spongoforo

è foggiato ad infundibulo naturalmente compresso e presenta nella cavità craterale la superficie cuticulare liscia e continua, interrotta solo di tanto in tanto dalle aperture ostiali di foggia spiccatamente rotonda, fra loro equidistanti: sulla superficie esterna gli ostioli appaiono depressi e quasi incorniciati da un risalto quadrangolare assai tipico, donde appunto il nome di questo genere. La porzione radicale si differenzia nettamente dalla spongoforale per un leggero strozzamento anullare, essa si espande largamente assumendo forme turgide-mammillari. Il sistema acquifero è quello tipico per la famiglia delle *Euretidi* di Zittel e cioè canali radiali diritti, discretamente larghi, ciechi e cioè con ostioli aprentisi alternativamente sulla parete esterna dello spongiario o nella cavità craterale.

« L'intreccio dictionale della porzione mediana e profonda è costituito da elementi spiculari esaradiati, a cladi brevi e tozzi, spesso contorti, con superficie esterna liscia, con nodo d'incrociamento pieno, con canali assili molto ampî. I cladi spiculari s'intrecciano fra di loro assai irregolarmente, dando all'insieme della compage dictionale l'aspetto di maglie aggrovigliate e contorte. Non vi ha indizio deciso di involucro corticale in alcuna parte dello spongiario, abbenchè nella porzione superficiale dell'ipoforo i cladi spiculari appaiano sensibilmente appiattiti.

« In un altro esemplare, il quale, benchè frammentario, è da riferirsi indiscutibilmente ad una *Craticularia*, è dato di riconoscere il fusto cilindrico colonnare di uno spongiario; non vi hanno traccie decise di cavità craterale, ma la sommità del corpo spongoforale cilindroide accenna a svasarsi ed assume quella foggia tanto frequente in una specie di *Craticularia* miocenica (*C. Manzonii*) da me studiata e descritta nel lavoro di revisione del ricco materiale di spongiarî emiliani testè acquistato dal R. Museo Paleontologico di Firenze. Quella forma, che dapprima fui incerto se doveva riguardarsi come una varietà rappresentativa di un' altra specie pur essa molto frequente, dopo un attento esame del sistema acquifero mi apparve come specie distinta, e pur convenendo che somme cautele s'abbiano ad usare nel giudicare della specie dai caratteri macroscopici, non credo nel caso in parola di essermi male avvisato. Il corpo cilindroide anzidetto è frantumato nella porzione radicale, ma ben si ravvisa che la porzione radicale doveva avere un impianto meno robusto ed espanso di quello appresentatoci dalla forma precedente: in questo esemplare il sistema acquifero non appare molto evidente e palese, ma la superficie esterna, benchè usurata, mostra qua e là degli ostioli tondeggianti in serie incrociantisi; a convalidare del resto la diagnosi anzidetta si prestano in modo convincente i tipici solchi canalari vermicolati che appaiono, benchè alquanto obliterati, sulla superficie esterna dello spongiario.

« E vengo ora alla terza forma per determinare la quale ho dovuto servirmi di esemplari frammentarî, frammenti di spongiario che a tutta prima

non rivelavano gran che di buono dato lo stato di somma compenetrazione dell'argilla sabbiosa involucrante i singoli esemplari. E non fu che dopo aver sottoposto i varî frammenti all'azione protratta di acido cloridrico diluitissimo e quindi ad un prolungato lavaggio in acqua fluente, che riuscii ad ottenere la friabilissima massa spongiaria in istato di possibile determinazione. È detta forma una *Rizomorina* che per i caratteri del tipo spiculare presenta somme analogie con il genere cretaceo *Scytalia* (cf. Zittel, *Studien üb. fossilen Spongien*: II Abth., tav. V, fig. 4*b*); però se per la foggia delle spicule e dell'intreccio scheletrico questo esemplare rammenta sensibilmente il genere cretaceo predetto, se ne discosta poi e per la configurazione macroscopica esterna e per l'insieme del sistema acquifero. Con le forme attuali sinora descritte non mi è stato possibile di ravvicinarla con certezza ad alcuna, però più che ad ogni altra questa *Rizomorina* si rassomiglia al genere *Arabescula* forma descritta da Carter per primo, genere accettato da Zittel, ma che è stato posto in dubbio successivamente da O. Schmidt. Ne consegue che non essendomi stato possibile di ravvicinare lo spongiario in parola ad alcuna forma sinora descritta, ho ritenuto necessario assegnarlo ad un genere nuovo cui proporrei il nome di *Donatispongia*, in memoria del nostro Donati che fu il primo a scoprire ed illustrare le formazioni spiculari dei Poriferi. A qualificare la specie si converrebbe il vocabolo *patellaris* che sta ad indicare la configurazione macroscopica di detta spugna. Darò per ora di questa forma alcuni cenni diagnostici sommarî, sembrandomi per non dire oziosa, poco opportuna, una diagnosi dettagliata di forma nuova, se non venga accompagnata dalle necessarie figure illustrative.

« *Donatispongia patellaris* nov. sp.

« Lo spongiario si appresenta quale forma appiattita, patellimorfa, con ambe le superficî ondulate e gibbosette; verso il lembo marginale tondeggiante la lamina si assottiglia alquanto. Dall'insieme poi dei frammenti si comprende che questa spugna doveva impiantarsi sul suolo per una breve prominenza laterale, a somiglianza di quanto ci presentano certe forme indicate già dagli antichi spongiologi col nome di *Manon Peziza* Goldf. e delle quali Quenstedt figura un buon numero alla tavola 132 del pregevolissimo atlante annesso alla sua opera: *Petrefaktenkunde-Deutschlands*, questa purtroppo alquanto antiquata per quanto riguarda i criterî tassonomici con i quali sono raggruppati e descritti gli Spongiarî. Raffrontata con quelle forme, la nostra si ravvicina, anche sensibilmente per le dimensioni, a quella designata come *Manon Peziza baptismalis* (cf. tav. CXXXII, fig. 32, op. cit.).

« Le due faccie dello spongiario e la lamina fra esse compresa sono attraversate da numerosi canali, di breve calibro, sparsi irregolarmente nella massa e che si suddividono ulteriormente quasi rete mirabile.

« La superficie superiore, ancorchè irregolare, è leggermente concava ed è ricoperta da una periteca silicea esilissima, ma non continua; in essa stanno

sparse numerose ragadi vermiformi che sono appunto dovute a discontinuità dell'involucro predetto; nei solchi vermicolati che ne conseguono si può scorgere gli ostioli rotondi che menano all'interno dello spongiario. La superficie esterna è invece leggermente convessa ed appare anch'essa rivestita di un esilissimo invoglio siliceo, ma in questa gli ostioli di forma tondeggiante sboccano direttamente, cosicchè anche su un minimo frammento dello spongiario è dato di riconoscere facilmente la pagina superiore dall'inferiore.

« Il tipo spiculare è decisamente da *Rizomorina;* le spicule assai minute (150 μ. 240 μ.), polimorfe, di dimensioni variabili, possono però tutte riportarsi ad una forma tipica comune, rappresentata da un asse più o meno breve ed incurvato donde si dipartono dei bracci anch'essi corti, ramosetti e spinosi all'estremo. Il corpo del desma in questa forma è confrontato col tipo cretaceo meno ornato di escrescenze; ad onta di ciò, ripeto, l'impressione che se ne ritrae è di una forte rassomiglianza con le forme della Creta media e superiore.

« La cuticola silicea involucrante resulta di elementi dello stesso tipo, ma assai più ravvicinati fra di loro; non vi ha indizio sicuro di megaschlere o microschlere sarcodiche, ancorchè in una delle sezioni microscopiche sia dato ravvisare alcuni monaxoni del tipo *dioxea*; ma a parer mio queste spicule debbonsi essere introdotte fortuitamente nelle lacune scheletriche o nei canali acquiferi dello spongiario, tanto più che oltre all'apparire in parte rotte, vi stanno disposte del tutto irregolarmente, contrariamente a quanto suole avvenire per le spicule sarcodiche che appaiono, in generale, orientate con una certa regolarità.

« Dall'intrecciarsi delle espansioni terminali delle singole spicule resulta la compage scheletrica che si appresenta a tutta prima come un aggrovigliamento abbastanza difficile a decifrarsi. Si aggiunga poi che tutta la trama essendo assai friabile, nell'atto di assottigliare le lamine di osservazione, molti degli esilissimi elementi spiculari si spostano, si contorcono e si frantumano, venendo così a mentire una struttura ancor più intricata di quello che realmente essa sia. Ond'è che per lo studio particolareggiato dei singoli elementi spiculari mi sono servito di spicule convenientemente separate fra di loro, con un metodo che non è qui luogo di ricordare.

« Gli esemplari studiati e qui brevemente descritti non istanno dunque a rappresentare che tre sole forme; ma nella penuria di notizie in proposito l'acquisto non è per questo meno pregevole, tanto più che abbiamo ragione di ritenere che ulteriori ricerche aumenteranno sensibilmente il numero delle forme. Ne danno argomento a ben sperare i numerosi elementi spiculari intatti o frammentarî che stanno sparsi nell'argilla sabbiosa che involge i singoli esemplari; spicule da ascriversi a diverse forme di *Esattinellidi* e *Desmospongie Tetrattinellidi*, come ce lo mostra del resto un esame microscopico del tutto superficiale.

« Inoltre, per quanto brevi, le notizie rivelateci da questo materiale pliocenico servono anch' esse a mostrarci quel carattere di spiccata continuità morfologica che presenta la spongiofauna cenozoica rispetto alle forme del Cretaceo medio e superiore ».

Petrografia. — *Osservazioni sulle serpentine del Rio dei Gavi e di Zebedassi (Appennino Pavese)* (1). Nota di L. Brugnatelli, presentata dal Socio Struever.

« Come è noto, il professore Cossa nella sua importantissima opera *Ricerche chimiche e microscopiche su Roccie e Minerali d'Italia* (2) ha fatto conoscere la composizione mineralogica di parecchie serpentine dell'Appennino pavese e propriamente di quella della valle della Prella a sud di Varzi, di quella brecciata di Varzi, di Rovegno, di S. Colombano presso Bobbio e del Rio dei Gavi. Dalle sue osservazioni egli dedusse che « quantunque in alcune serpentine del territorio di Bobbio si trovino, in uno stato di più o meno avanzata alterazione i componenti della Lherzolite, pure essi non si rinvennero riuniti *simultaneamente* in modo da poter ritenere certa l'esistenza di questa roccia.....».

« Per gentile concessione del professore Cossa io potei studiare i suoi preparati e constatare l'esattezza delle sue osservazioni. Tempo fa però avendo io avuto occasione di esaminare delle sezioni sottili di nuovi campioni della serpentina del Rio dei Gavi, vi riscontrai oltre agli elementi già notati dal Cossa e da me nelle sue sezioni, la bastite in piccola quantità e quasi completamente serpentinizzata, ed inoltre un pirosseno monoclino (diopside) che in sezione sottile appare incoloro; in una sezione poi potei notare una laminetta di diallagio. La serpentina di Rio dei Gavi deve dunque considerarsi come derivata dall'alterazione di una vera Lherzolite.

« L'origine lherzolitica è poi ancora più evidente in un'altra serpentina dell'Appennino pavese, e cioè in quella di Zebedassi e Cà di Bruno che costituisce l'affioramento ofiolitico più settentrionale del detto Appennino. Siccome questa serpentina non fu ancora descritta, così credo di far cosa opportuna riassumendo qua le osservazioni che sopra di essa io potei eseguire.

« Le località di Zebedassi e Cà di Bruno si trovano sulla destra della valle del Curone che quivi separa la provincia di Pavia da quella di Alessandria. Scendendo il Monte Brianzone verso sud, appena a ponente di Zebe-

(1) Lavoro eseguito nel gabinetto di Mineralogia della R. Università di Roma.

(2) Torino 1881, pag. 162-168. Vedi pure Taramelli, *Descrizione geologica della provincia di Pavia.* Milano 1882, pag. 93-97.

dassi, si incontra la serpentina poco sopra di Cà Clementina e la si segue fino oltre Cà di Bruno, verso la valle della Serena. Per quanto riguarda la sua giacitura ed i rapporti stratigrafici colle altre rocce che l'accompagnano, credo di non potere far meglio che rimandando il lettore a quanto ne dice il professore Taramelli [1].

« La serpentina di Zebedassi è molto compatta; in una massa di colore verde nerastro, con chiazze più chiare, si osserva disseminato un minerale lamellare dotato di perfetta sfaldatura e di lucentezza che varia tra la metallica e la grassa resinosa. Le lamine di questo minerale presentano i caratteri della bastite in istato di alterazione. Colla lente non è difficile scorgere altresì delle piccole granulazioni nere lucenti che furono poi riconosciute per picotite. Più raro e soltanto osservando molto attentamente si riscontra anche un minerale dotato di perfetta sfaldatura e di colore verde-chiaro.

« In sezione sottile ed al microscopio la serpentina di Zebedassi mostra per la massima parte la caratteristica struttura a maglia delle serpentine peridotiche; questa derivazione dall'olivina è resa poi ancora più evidente dal trovarsi fra le maglie del serpentino in gran numero dei granuli incolori di olivina inalterata.

« La bastite, già determinata macroscopicamente, si osserva in grande quantità nella roccia; è sempre in larghe lamine che frequentemente racchiudono degli avanzi del minerale pirossenico trimetrico (enstatite) dal quale ebbe origine. Generalmente è in istato di inoltrata serpentinizzazione e qualche volta completamente serpentinizzata.

« Oltre all'olivina e la bastite, nella massa si osserva in notevole quantità un minerale pirossenico monoclino incoloro. Certamente si tratta del diopside caratteristico delle roccie lherzolitiche, e devono attribuirsi a questo minerale le laminette di color verde-chiaro riscontrate nell'esame macroscopico della roccia. Frequentemente nel diopside si osservano delle inclusioni disposte tutte parallelamente alla direzione d'allungamento nelle sezioni verticali e la cui natura non potè essere determinata. Associati col diopside si notano dei granuli e delle laminette di un minerale che si distingue per un marcatissimo pleocroismo dal rosso-bruno all'incoloro. È dotato di perfetta sfaldatura in due direzioni che fanno tra loro l'angolo caratteristico delle sfaldature degli anfiboli. La estinzione è generalmente inclinata e nelle sezioni longitudinali raggiunge un maximum di circa 14°; le direzioni di assorbimento corrispondono perfettamente con quelle date per l'anfibolo, quindi per tutti questi caratteri credo che i granuli e le laminette in questione debbano essere riferite a questo minerale. Questa specie di anfibolo sembra essere comune nelle lherzoliti e nelle serpentine da queste derivate; infatti io ebbi l'occasione di osser-

[1] Loco cit., ed anche *Sulle formazioni serpentinose dell'Appennino pavese.* Memorie della R. Accad. dei Lincei, vol. II, serie 3ª, 1878.

varlo in parecchie di queste roccie e in modo speciale poi in una del Monginevra.

« La picotite è in granuli irregolari di color bruno, qualche volta circondati da prodotti di alterazione neri o rossastri.

« Fra le maglie del serpentino si osservano qualche volta delle minutissime granulazioni nere di magnetite. Oltre che in questo stato, la magnetite si trova nella roccia anche in cristallini ottaedrici perfetti. Questi cristallini non sono però diffusi irregolarmente entro tutta la massa, ma si trovano riuniti entro vene o plaghe di una materia serpentinosa che si distingue dal resto, per una struttura molto uniforme e per una doppia rifrazione debolissima. Credo che questa localizzazione dei cristallini di magnetite sia di grande importanza, perchè ritengo che sia in istretta relazione coi fenomeni magnetici presentati da questa roccia ed ai quali accennerò più avanti.

« Sembra che la roccia abbia subìto delle forti azioni meccaniche: e ciò lo si può desumere dal fatto che la bastite è sempre pieghettata e contorta; inoltre non è raro il caso di osservare che dei frammenti, specialmente di pirosseno, appartenenti evidentemente ad uno stesso cristallo, sono scostati l'uno dall'altro ed in generale non in direzione parallela.

« La serpentina di Zebedassi è fortemente magnetica e presenta numerosi *punti distinti*. Pare che nessuna regolarità esista nella distribuzione di questi punti. È però naturale il pensare che essi siano in corrispondenza colle plaghe sopra descritte di concentrazione dei cristallini di magnetite. Anche in piccoli frammenti la roccia mostra la polarità magnetica, e non è raro di riscontrare sopra di essi più centri magnetici di nome contrario. Sopra alcune lamine abbastanza sottili si potè osservare sulle facce parallele, che ad un centro magnetico esistente sopra una delle facce, corrisponde sulla faccia parallela un centro di nome contrario. Questo fatto però non si manifesta sempre, anzi nella maggior parte dei casi non si ha alcuna regolarità nella distribuzione dei centri magnetici, sopra le faccie parallele della medesima lamina o sulle superficie opposte dei frammenti.

« La serpentina di Zebedassi per la sua composizione mineralogica, come per le proprietà magnetiche, rassomiglia moltissimo a quella del Colle di Cassimoreno nella Valle del Nure, studiata e descritta dal dottor Montemartini (1) Nella roccia del Colle di Cassimoreno però non esistono le plaghe di concentrazione dei cristalli di magnetite, ma questo minerale trovasi solo sparso irregolarmente nella roccia.

« Da quanto è riferito sopra, rimane accertato che tanto la serpentina del Rio dei Gavi, come quella di Zebedassi devono la loro origine all'alterazione di roccie lherzolitiche. Se anche le altre serpentine dell'Appennino pa-

(1) C. Montemartini, *Sulla composizione chimica e mineralogica delle roccie serpentinose del Colle di Cassimoreno e del monte Ragola* (*Valle del Nure*). Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. IV, 1888, pag. 369.

vese abbiano la stessa origine, noi per ora non possiamo asserirlo, anzi le ricerche del professore Cossa ci proverebbero il contrario. Io però ritengo che non sia improbabile, che dalle ricerche estese a più campioni di queste roccie scelti in punti diversi della stessa massa, si possa essere condotti ad ammettere, come appunto avvenne per quella del Rio dei Gavi, anche per esse la stessa origine lherzolitica. Avendo io l'intenzione di occuparmi delle formazioni ofiolitiche dell'Appennino pavese, spero in un prossimo lavoro di poter decidere in modo definitivo la questione ».

Chimica. — *Sulla costituzione della nicotina.* Nota di V. OLIVERI, presentata dal Socio PATERNÒ.

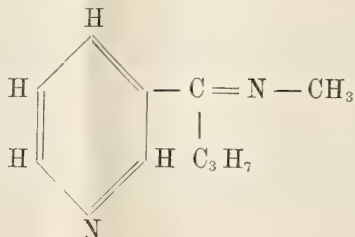
« Tra le formole proposte per la nicotina sono oggi maggiormente discusse quella di Etard, quella del Pinner e l'altra del Blau. Ciascuno di questi sperimentatori dà ragione della propria formola per i seguenti fatti.

« Etard ammette quella di un etil-dipiridile-idrogenato con un lato comune, per avere ottenuto un prodotto di sostituzione con il cloruro di benzoile. Pinner propone quella di una piridil-pirrolidina-metilata, perchè la nicotina, per azione del bromo, si trasforma in bromo-cotinina ed in bromo-ticonina.

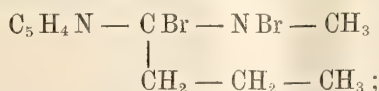
« Blau infine modifica la formola del Pinner, il quale ammette il nucleo pirrolidinico, nell'altra a catena laterale trimetileniminica-metilata, e ciò per la facile decomponibilità della nicotina per mezzo della riduzione; fatto che rende poco probabile la presenza del gruppo pirrolidinico.

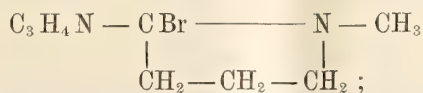
« Avendo io da molto tempo intrapreso alcune ricerche sulla costituzione della nicotina, mi ero accorto sin d'allora che nessuna delle formole assegnate alla nicotina era adatta a spiegare i fatti osservati, e per interpretare alcune reazioni si doveva ricorrere all'ipotesi di una profonda modificazione subìta nella sua struttura atomica.

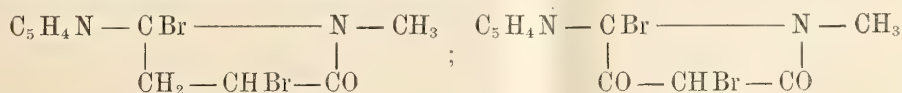
« Ora nel proporre una formola che rappresenti l'aggruppamento atomico di una data sostanza, quella deve soddisfare alla principale condizione di potere cioè spiegare nel modo più semplice le trasformazioni che il corpo rappresentato subisce quando è cimentato con i varî reagenti.

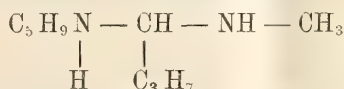
« Sotto questo punto di vista e tenuto conto di tutte le trasformazioni fatte subire alla nicotina, la formola, che meglio si adatta a rappresentarla, sarebbe:

« Infatti con essa si spiega che la nicotina all'ossidazione fornisce: acido nicotinico, azoto, anidride carbonica, acido acetico ed acido lattico, che per ulteriore ossidazione si converte in acido ossalico ed acido carbonico.

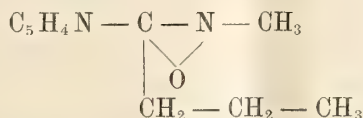
« Con questa formola si ha la ragione della instabilità della bibromonicotina, che avrebbe la seguente struttura

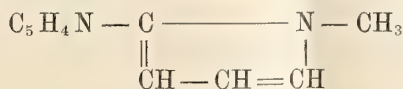
$$\begin{array}{l} C_5H_4N - CBr - NBr - CH_3 \\ \qquad\qquad\;\, | \\ \qquad\qquad CH_2 - CH_2 - CH_3\,; \end{array}$$

e per cui sotto l'azione degli alcali, perde acido bromidrico e si trasforma nella bromonicotina

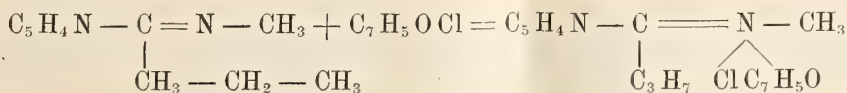
$$\begin{array}{l} C_3H_4N - CBr \text{———} N - CH_3 \\ \qquad\qquad\;\, | \qquad\qquad\;\; | \\ \qquad\qquad CH_2 - CH_2 - CH_2\,; \end{array}$$

e di conseguenza la dibromo-cotinina e la dibromo-ticonina del Pinner sarebbero rappresentate dai seguenti schemi

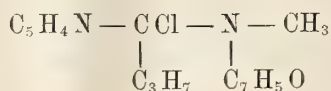
$$\begin{array}{l} C_5H_4N - CBr \text{———} N - CH_3 \\ \qquad\qquad\;\, | \qquad\qquad\;\; | \\ \qquad\qquad CH_2 - CHBr - CO \end{array} \;;\; \begin{array}{l} C_5H_4N - CBr \text{———} N - CH_3 \\ \qquad\qquad\;\, | \qquad\qquad\;\; | \\ \qquad\qquad CO - CHBr - CO \end{array}$$

Con questa formola, l'ottoidro-nicotina sarebbe

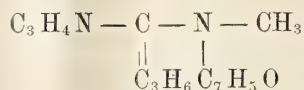
$$\begin{array}{l} C_5H_9N - CH - NH - CH_3 \\ \quad\;\;\, | \qquad\; | \\ \quad\;\; H \qquad C_3H_7 \end{array}$$

e l'ossinicotina di Cahours ed Etard

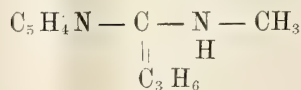
$$\begin{array}{l} C_5H_4N - C - N - CH_3 \\ \qquad\qquad\;\, | \diagdown\;\diagup \\ \qquad\qquad\;\, |\;\; O \\ \qquad\qquad CH_2 - CH_2 - CH_3 \end{array}$$

la quale per ulteriore ossidazione perderebbe quattro atomi d'idrogeno allo stato di acqua secondo l'equazione $C_{10}H_{14}N_2O + O = C_{10}H_{10}N_2 + 2H_2O$, per trasformarsi nella iso-dipiridina di Cahours ed Etard, o nicotirina di Blau alla quale spetterebbe la formola

$$\begin{array}{l} C_5H_4N - C \text{———} N - CH_3 \\ \qquad\qquad\;\, \| \qquad\quad\;\; | \\ \qquad\qquad CH - CH = CH \end{array}$$

cioè di un gruppo pirrolico attaccato ad un gruppo piridico, come ammette il Blau; finalmente la reazione, per la quale la nicotina a 200°, eliminando acido cloridrico dal suo prodotto di addizione con il cloruro di benzoile, si trasforma in benzoil-derivato, si spiega naturalmente con la formola da me proposta. Così

$$\begin{array}{l} C_5H_4N - C = N - CH_3 \\ \qquad\qquad\;\, | \\ \qquad\qquad CH_3 - CH_2 - CH_3 \end{array} + C_7H_5OCl = \begin{array}{l} C_5H_4N - C \text{===} N - CH_3 \\ \qquad\qquad\;\, | \qquad\;\; \diagup\diagdown \\ \qquad\qquad C_3H_7 \quad ClC_7H_5O \end{array}$$

che facilmente si trasforma in

$$\begin{array}{l} C_5H_4N - CCl - N - CH_3 \\ \qquad\quad\;\; | \qquad\;\; | \\ \qquad\;\; C_3H_7 \quad C_7H_5O \end{array}$$

« Questo composto intermedio per eliminazione di acido cloridrico fornisce il benzoil-derivato

$$\begin{array}{l} C_3H_4N - C - N - CH_3 \\ \qquad\quad\;\; \| \quad\;\; | \\ \qquad\;\; C_3H_6\,C_7H_5O \end{array}$$

« Alla sua volta il benzoil-derivato per saponificazione dà la nicotina isomera del Pinner

$$\begin{array}{l} C_5H_4N - C - N - CH_3 \\ \qquad\quad\;\; \| \quad\;\; H \\ \qquad\;\; C_3H_6 \end{array}$$

Parte sperimentale.

« 1.° Ossidando trenta grammi di nicotina in soluzione alcalina con trenta grammi di permanganato potassico in soluzione diluita, dopo di aver disposto l'apparecchio in modo da raccogliere tutti i prodotti dell'ossidazione, si sono ottenuti: acido nicotinico, acido carbonico, acido acetico, acido ossalico, azoto e tracce di acido lattico.

« Ossidando nello stesso modo il cloruro di benzil-nicotina, i prodotti dell'ossidazione sono stati: acido nicotinico, acido benzoico, acido cloridrico, anidride carbonica, acido acetico, acido ossalico ed azoto.

« 2.° Facendo reagire sopra 10 grammi di nicotina sciolta in etere anidro, grammi 12 di cloruro di acetile, si osserva, dietro riscaldamento a bagno maria, un debole sviluppo di acido cloridrico. Lasciando poi il miscuglio in riposo per 24 ore, acidificando con acido cloridrico ed estraendo con etere a varie riprese e decomponendo poi la soluzione acquosa con potassa ed estraendo di nuovo con etere, quest'ultimo lascia un olio bruno che si decompone tentando di distillarlo. Esso fornisce un cloroplatinato sotto forma di polvere cristallina rossastra che contiene il 29,59°/₀ di platino ed il 6,49 di acido acetico. Questi risultati non si accordano con la composizione del cloroplatinato della mono-acetil-nicotina che richiederebbe il 23,58 di platino ed il 14,59 di acido acetico per cento.

« Questa discordanza e la presenza dell'acetile, che non può ritenersi un'impurezza, fa dubitare che la sostanza analizzata fosse stata un miscuglio di cloroplatinati di nicotina e di mono-acetil-nicotina; infatti un miscuglio a

parti uguali di queste sostanze fornirebbero il 28,95 di platino ed il 7,29 di acide acetico per 100.

« Nel dubbio che la nicotina contenga un atomo di azoto imidico, si è ripetuta l'esperienza con il cloruro di benzoile e poi con l'acido nitroso, ma in ambo le reazioni si sono ottenuti risultati negativi. Da questo fatto pare che il cloruro di acetile, in date condizioni possa trasformare la nicotina in modo tale, da poter formare un acetil-derivato, nell'identica maniera del prodotto di addizione con il cloruro di benzoile che l'Etard trasforma alla temperatura di 200° in benzoil-nicotina; la quale poi, secondo Pinner, colla saponificazione fornisce la meta-nicotina e non più la base originaria.

« 3.° Per conoscere se nella catena laterale fossero contenuti atomi di carbonio legati tra di loro con doppia valenza, ho tentato la bromurazione della nicotina nei seguenti modi:

a) Sopra 40 grammi di bromidrato di nicotina ben secco si fece gocciolare a poco a poco 20 grammi di bromo puro; si ottenne un liquido spesso, bruno, che dopo cinque giorni cristallizzò in aghi rosso-bruni, che purificati per lavaggio con etere anidro e compressione tra carta ed analizzati fornirono il 65,76°/₀ di bromo; mentre il composto $C_{10}H_{14}N_2 . HBr . Br_3$ ne vuole il 66,11°/₀. Decomposta con ammoniaca acquosa ed estratta la soluzione con etere si riottenne la nicotina inalterata. Questo fatto dimostra essere il composto bromurato semplicemente il perbromuro della nicotina.

b) Un'altra porzione di questo perbromuro essendo stata riscaldata prima a 70° e poi decomposta con soluzione diluita di potassa, fornì un precipitato oleoso, che raccolto, lavato cun acqua e disciolto nell'acido cloridrico venne trasformato in picrato, ch'è una massa rosso-bruna fusibile a 103°. Questo picrato contiene il 16,65 di bromo ed il 15,28 di azoto per cento.

« Il picrato della mono-bromo-nicotina $C_{10}H_{13}BrN_2 . C_6H_3N_3O_6OH$ richiede in 100

Bromo	16,98
Azoto	14,86

c) In un'altra esperienza, sopra grammi 31,7432 di bromidrato di nicotina ben seccato si fecero gocciolare grammi 31,50 di bromo purissimo; il prodotto fu abbandonato a sè stesso per 15 giorni sotto campana con calce viva, ove si mantenne sempre sotto forma di massa semifluida, di color rosso-bruno intenso. Fu purificato lavandolo parecchie volte con solfuro di carbonio e disseccandolo poi nel vuoto sopra la calce. Analizzato mostrò contenere il 73,19°/₀ di bromo. Il perbromuro del bromidrato di nicotina bibromurato $C_{10}H_{14}Br_2N_2 . HBr . HBr_3$ ne richiede °/₀ 74,53.

d) Questo perbromuro decomposto con soluzione alcoolica di potassa si resinifica in gran parte, ed una piccolissima quantità si trasforma in un composto bromurato cristallino che forma un cloro-platinato che non fonde

sino a 340° e contiene il 18.11 per 100 di platino. Probabilmente può essere la dibromo-ticonina del Pinner.

« 3.° Versando una soluzione concentrata di jodio nel joduro di potassio sopra una soluzione di jodidrato di nicotina si ottiene un abbondante precipitato rosso-bruno. Questo precipitato disseccato, se si riscalda in una storta alla temperatura vicina ai 200°, si decompone, si sviluppano vapori di jodio e distilla joduro di metile. Se lo stesso precipitato si riscalda assieme ad una soluzione concentrata di potassa allora assieme alle altre basi volatili si forma della metilammina.

« 4.° Volendo staccare dalla nicotina il gruppo $= N - CH_3$ e sostituirvi l'ossigeno per ottenere il β-propil-piridil-chetone, ho riscaldato in tubi di vetro resistentissimi un miscuglio di nicotina e di soluzione di potassa al 10 per 100 per la durata di ore 24 alla temperatura variabile dai 250° ai 280°. Indi il contenuto dei tubi fu distillato a vapor d'acqua, raccogliendolo frazionatamente. Dalle porzioni più volatili si è potuto separare un gas, che fu raccolto in soluzione cloridrica ed evaporato a secco: il cloridrato formatosi venne trasformato in cloroplatinato. Esso aveva tutti i caratteri del cloroplatinato di metilammina ed all'analisi ha formato il 41,18°/₀ di platino: mentre la teoria vi esige il 41,53°/₀.

« La massima parte del prodotto dà nicotina inalterata. La presenza di un chetone non potè constatarsi.

« 5.° La nicotina s'idrogena facilmente trasformando i suoi due atomi di azoto terziarî in secondarî. Questo fatto depone contro le formole del Pinner e del Blau, che non potrebbero sussistere senza ammettere la rottura dei nuclei.

« Disciogliendo 10 grammi di nicotina in 300 c. c. di alcool amilico, riscaldando a 100° ed aggiungendo a poco a poco sino all'estinzione 30 grammi di sodio, dopo raffreddamento, si ottiene una massa solida che lisciviata con acqua si separa in due strati: soluzione alcalina e soluzione amilica. Quest'ultima ripresa con acqua acidulata, con acido cloridrico, cede a questo il prodotto di riduzione in essa contenuto. Svaporando a secco la soluzione cloridrica e riprendendo il residuo con soluzione potassica, si ricava un olio che decantato e disseccato nella potassa pura distilla tra i 260°-281°. Di questo distillato si possono ottenere due frazioni: una tra 260°-263° e l'altra lra 266°-281°; entrambe formano lo stesso cloroaurato fus. a 132° e lo stesso cloroplatinato fus. a 201°.

« A dimostrare poi che i due atomi di azoto della nuova base vi si trovano allo stato imidico, sono stati preparati i seguenti derivati:

a) Dinitroso composto $C_{10}H_{20}N_2 . 2NO$. Si ottiene versando sopra una soluzione acquosa di solfato della nuova base, resa leggermente acida con acido solforico un leggiero eccesso di nitrato potassico: si separa un olio, che raccolto si lava ripetutamente con acqua fredda e si dissecca nel vuoto sopra l'acido solforico. È un liquido oleoso, giallastro, più spesso della nicotina e

con odore più debole: all'analisi ha mostrato contenere il 51,90 di carbonio, il 9,50 di idrogeno ed il 24,35 di azoto per cento. Il dinitroso derivato ed il mono-nitroso derivato richiedono rispettivamente:

$C_{10}H_{20}N_2 . 2NO$		$C_{10}H_{19}N_2 . NO$	
Carbonio	52,62	Carbonio	60,92
Idrogeno	8,78	Idrogeno	9,64
Azoto	24,56	Azoto	21,31

b) Dibenzoil-derivato $C_{10}H_{20}N_2 . 2(C_7H_5O)$. È stato preparato con il metodo di Baumann. È un olio denso e gialliccio, insolubile nell'acqua, solubilissimo nella soluzione cloridrica, dalla quale il cloruro platinico e l'acido picrico lo precipitano allo stato di un olio che difficilmente cristallizzza. All'analisi ha dato i seguenti numeri:

trovato		calcolato per $C_{10}H_{20}N_2 . (C_7H_5O)_2$	
Carbonio	75,60	Carbonio	76,19
Idrogeno	8,55	Idrogeno	7,93
Azoto	7,05	Azoto	7,41

c) Diurea composta $C_{10}H_{20}\left\langle\begin{matrix} N - CO - NH_2 \\ N - CO - NH_2 \end{matrix}\right.$. Si ottiene versando sopra una soluzione concentrata di solfato di ottoidro-nicotina, altra soluzione acquosa contenente da quantità calcolata (due molecole per una molecola) di cianato potassico. Il miscuglio si svapora quasi a secco sul bagno maria ed il residuo si riprende parecchie volte con alcool assoluto e bollente; questo, dietro evaporamento, lascia un estratto, che si purifica disciogliendolo in alcool e precipitandolo con acqua. Il nuovo composto è una sostanza del colore e della consistenza del miele, incristallizzabile. Riscaldata in un tubicino di assaggio, si decompone emettendo vapori di carbonato di ammonico.

« Si scioglie nell'acido cloridrico concentrato e la sua soluzione diluita precipita con cloruro platinico. Il cloro-platinato è una polvere amorfa di colore giallo-sporco e fonde verso i 171° con decomposizione. Una determinazione di cloro ed un'altra di platino hanno dimostrato contenere il 32,15 di cloro ed il 29,60 di platino.

« Questi numeri corrispondono al cloroplatinato della diurea, che richiede per la formola $C_{10}H_{20}N_2 . (CO\,NH_2)_2 . HCl . PtCl_4$

Cloro	31,88
Platino	19,41 ».

Chimica. — *Nuovo processo di sintesi degl'idrocarburi del gruppo del difenile. — Sul p- ed o-feniltolile.* Nota di G. Oddo e A. Curatolo, presentata dal Socio Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Socî Taramelli, Fergola, Pincherle, Virchow e del sig. Traverso. Richiama inoltre l'attenzione dei Socî su di un trattato di Agronomia del marchese Carega di Muricce; su di una Carta pubblicata dalla Direzione Generale della Statistica, relativa alla mortalità per infezione malarica nei vari Comuni d'Italia durante gli anni 1890-91-92, e su di una raccolta di carte dell'Ufficio Idrografico della R. Marina.

CORRISPONDENZA

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; l'Accademia di scienze naturali di Filadelfia; la Società di scienze naturali di Emden; la Società Reale di Edimburgo; il R. Istituto geodetico di Potsdam; la Scuola politecnica di Delft.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il Ministero dell'agricoltura, dell'industria e del commercio, di Rumenia; l'Ufficio Idrografico della R. Marina Italiana, di Genova.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nell'adunanza del 3 febbraio 1895.

Angelitti F. — Determinazioni assolute della declinazione magnetica nel R. Osservatorio di Capodimonte, eseguite nell'anno 1891. Napoli, 1893. 4°.

Id. — Variazioni della declinazione magnetica, osservate nella R. Specola di Capodimonte nell'anno 1891. Napoli, 1894. 4°,

Barbera L. — Teorica delle equazioni differenziali duple. Bologna, 1895. 8°.

Bosniaski S. de. — Nuove osservazioni sulla Flora fossile del verrucano nel monte Pisano. Pisa, 1894. 8°.

Brioschi C. — Distanze zenitali circummeridiane del Sole, osservate nell'anno 1821. Memoria di F. Angelitti. Napoli, 1894. 4°.

Id. — Riassunti decadici e mensili delle osservazioni meteoriche, fatte nel R. Osservatorio di Capodimonte nell'anno 1892. Napoli, 1893. 4°.

Carega di Maurice F. — Agronomia. 3ª ed. (Man. Hoepli). Milano, 1895. 16°.

Contarino F. — Sulla determinazione della latitudine col metodo di Döllen. S. l. 1894. 4°.

Dei A. — Gl'insetti e gli uccelli considerati per sè stessi, e per i loro rapporti con l'Agricoltura. Siena, 1894. 8°.

Elenco dei fari e fanali ecc. 1895. Genova, 1895. 4°.

Fergola E. — Osservazioni del pianeta Vittoria e di 41 stelle di paragone, nell'opposizione del 1889 ecc. Napoli, 1893. 8°.

Gambera P. — Teoria meccanica dell'acciarino pneumatico. Lecce, 1894. 8°.

Meli R. — Breve relazione delle escursioni geologiche eseguite alle Paludi Pontine, a Terracina ed al Circeo, con gli allievi ingegneri della R. Scuola di Applicazione di Roma, 1893-4. Roma, 1894. 16°.

Mollame V. — Sulle equazioni abeliane reciproche, le cui radici si possono rappresentare con x, θx, $\theta^2 x$, $\theta^{n-1} x$. Napoli, 1894. 4°.

Morandi L. — Instrucciones para la observacion de las estrellas errantes. Montevideo, 1894. 8°.

Id. — La lluvia en el clima de Montevideo. Montevideo, 1893. 4°.

Pincherle S. — Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti. Napoli, 1894. 4°.

Sella Q. — Inaugurazione del monumento a Q. Sella. XIV marzo 1894. Torino, 1894. 8°.

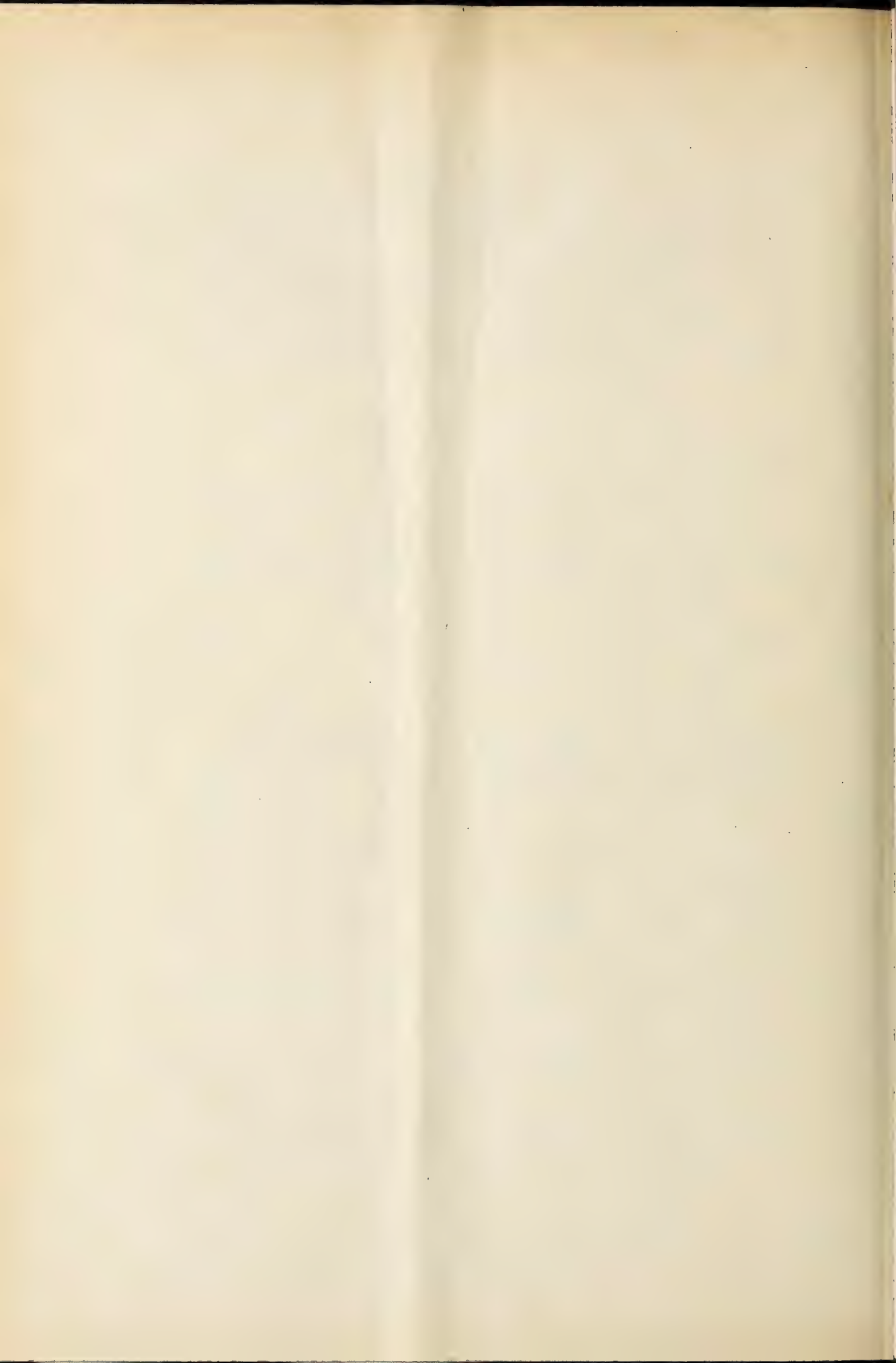
Silvestri E. de — Contributo allo studio dell'etiologia della dissenteria. Torino, 1895. 8°.

Statistica delle biblioteche. Vol. II. Roma, 1894. 4°.

Taramelli T. — Sulle aree sismiche italiane. Rovereto, 1895. 8°.

Traverso S. — Geologia dell'Ossola. Genova, 1895. 8°.

Virchow R. — Die Ergebnisse der Serumbehandlung bei diphterischen Kindern im Kaiser und Kaiserin Friedrich-Kinderkrankenhause. Berlin, 1894. 8°.

Zinno S. — Analisi qualitativa e quantitativa dei principî aeriformi (gassosi) dell'acqua di Fiuggi di Anticoli in Campagna. Napoli, 1894. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 febbraio 1895.

F. BRIOSCHI Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore* (1). Nota III^a del Socio LUIGI BIANCHI.

« Ai risultati contenuti nelle mie due Note precedenti si può giungere con semplicità e rapidità molto maggiore, come di poi ho osservato, facendo uso di una formola generale relativa agli integrali multipli. E poichè, applicando questa formola, si trattano con grande facilità non solo i casi già precedentemente discussi ma ben anche il caso generale delle equazioni d'ordine n, credo conveniente far conoscere questo nuovo metodo.

I.

« La formola di cui si tratta è una formola di integrazione per parti che si ottiene nel modo seguente.

« Indichiamo con u, v due funzioni delle r variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots x_r$ finite e continue insieme alle loro derivate parziali *miste* fino all'ordine r e prendiamo a trasformare con successive integrazioni per parti l'integrale r^{plo}.

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\dots\dots\int_{\alpha_r}^{\beta_r} v\,\frac{\partial^r u}{\partial x_1\,\partial x_2 \dots \partial x_r}\,dx_1\,dx_2 \dots\, dx_r\,,$$

dove i limiti (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2) \dots (\alpha_r, \beta_r)$ sono costanti. Per esprimere concisamente il risultato faremo uso delle notazioni seguenti. Indichiamo con

$$i_1\ i_2 \dots i_r$$

(1) Vedi Rendiconti del 6 gennaio e 5 febbraio.

una qualunque permutazione degli r indici 1, 2, ... r ed essendo φ una qualunque funzione di $x_1\, x_2 \dots x_r$, col simbolo

$$(\varphi)_{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_s}}$$

denotiamo la funzione di

$$x_{i_{s+1}}\, x_{i_{s+2}} \dots x_{i_r}$$

che nasce da φ ponendovi

$$x_{i_1} = \alpha_{i_1}\,,\ x_{i_2} = \alpha_{i_2} \dots x_{i_s} = \alpha_{i_s}\,.$$

Allora la formola generale accennata si scrive:

$$\text{(I)}\quad (uv)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} + \sum_{i_1} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}\right)_{\alpha_{i_2} \alpha_{i_3} \dots \alpha_{in}} +$$

$$+ \sum_{i_1 i_2} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2}}\right)_{\alpha_{i_3} \dots \alpha_{in}} dx_{i_1}\, dx_{i_2} + \cdots$$

$$+ \sum_{i_1 \dots i_{r-1}} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} \cdots \int_{\alpha_{i_{r-1}}}^{\beta_{i_{r-1}}} \left(v \frac{\partial^{r-1} u}{\partial x_{i1} \dots \partial x_{i_{r-1}}}\right)_{\alpha_{ir}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{r-1}} +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \int_{\alpha_r}^{\beta_r} v \frac{\partial^r u}{\partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_r}\, dx_1\, d x_2 \dots dx_r =$$

$$= (uv)_{\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_r} - \sum_{i_1} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_i} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_{i_1}}\right)_{\beta_{i_2} \dots \beta_{ir}} dx_{i_1} +$$

$$+ \sum_{i_1 i_2} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2}}\right)_{\beta_{i_3} \dots \beta_{ir}} dx_{i_1}\, dx_{i_2} - \cdots$$

$$+ (-1)^{r-1} \sum_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} \cdots \int_{\alpha_{i_{r-1}}}^{\beta_{i_{r-1}}} \left(u \frac{\partial^{r-1} v}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{r-1}}}\right)_{\beta_r} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots x_{i_{r-1}} +$$

$$+ (-1)^r \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \int_{\alpha_r}^{\beta_r} u \frac{\partial^r v}{\partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_r}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_r\,.$$

« Per dimostrarla si osservi che per $r = 1$, $r = 2$ sussiste certamente, come subito si verifica; onde basterà, col solito metodo di induzione, concludere da r ad $r+1$. Perciò supponiamo verificata la (I) e passando al caso di $r+1$ variabili $x_1 x_2 \dots x_r x_{r+1}$, cangiamovi u in $\frac{\partial u}{\partial x_{r+1}}$ e integriamo rispetto a x_{r+1} da α_{r+1} a β_{r+1}. Se in ciascun integrale del 2° membro eseguiamo un' integrazione per parti rapporto a x_{r+1} e all' integrale r^{plo} che allora vi figura:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\dots\int_{\alpha_r}^{\beta_r}\left(u\frac{\partial^r v}{\partial x_1\,\partial x_2\dots\partial x_r}\right)_{\alpha_{r+1}} dx_1\,px_2\dots dx_r$$

sostituiamo il valore che si trae dalla (I) stessa, ritroviamo la formola medesima cangiatovi r in $r+1$. Così la nostra formola è dimostrata in generale.

II.

« Consideriamo ora una espressione lineare alle derivate parziali miste d'ordine n della forma

$$\Omega(u) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1\,\partial x_2\dots\partial x_n} + \sum_{i_1} a_{i_1}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{in}} + \sum_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2}\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x_{i_3}\dots\partial x_{i_n}} + \cdots$$

$$+ \sum_{i_1 i_2\dots i_r} a_{i_1 i_2\dots i_r}\frac{\partial^{n-r}u}{\partial x_{i_{r+1}}\dots\partial x_{i_x}} + \cdots + a_{12\dots n}u,$$

dove i coefficienti a_{i_1}, $a_{i_1 i_2}\dots$ sono funzioni finite e continue, nel campo a n dimensioni delle variabili $x_1, x_2\dots x_n$ che si considera, insieme alle loro derivate parziali miste (¹). Come nella Nota precedente definiamo come *componenti* di $\Omega(u)$ e indichiamo col simbolo $\Omega^{(u)}_{i_1 i_2\dots i_r}$ le espressioni che si ottengono da $\Omega(u)$ nel modo seguente. Separiamo in $\Omega(u)$ l'aggregato dei termini che contengono una determinata derivata r^{ma}

$$\frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_r}}$$

(¹) Propriamente, perciò che segue, basta che il coefficiente a r indici $a_{i_1 i_2\dots i_r}$ ammetta le derivate parziali miste rispetto alle variabili $x_{r+1}\dots x_n$ fino all'ordine $n-r$.

e le sue derivate; sostituendo in questo aggregato a quella derivata r^{ma} la u stessa si avrà l'espressione che indichiamo con $\Omega^{(u)}_{i_1 i_2 \dots i_r}$ e diciamo una componente d'ordine $n-r$ di $\Omega(u)$.

« Introduciamo inoltre l'espressione *aggiunta* $\Phi(v)$ di $\Omega(u)$ definita dalla formola:

$$\Phi(v) = \frac{\partial^n v}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} - \sum_{i_1} \frac{\partial^{n-1}(a_{i_1} v)}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_n}} + \sum_{i_1 i_2} \frac{\partial^{n-2}(a_{i_1 i_2} v)}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_n}} + \cdots$$

$$+ (-1)^r \sum_{i_1 i_2 \dots i_r} \frac{\partial^{n-r}(a_{i_1 i_2 i_r} v)}{\partial x_{i_{r+1}} \dots \partial x_{i_n}} + \cdots + (-1)^n a_{12\dots n} v$$

e della $\Phi(v)$ consideriamo altresì le componenti $\Phi^{(v)}_{i_1 i_2 \dots r}$ dei varî ordini.

« Supponiamo ora che u, v siano funzioni finite e continue delle variabili, insieme alle derivate parziali miste fino alle n^{me}, entro il parallelepipedo a n dimensioni

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2 \dots x_n = \alpha_n$$
$$x_1 = \beta_1, \quad x_2 = \beta_2 \dots x_n = \beta_n .$$

« Prendiamo allora a trasformare, coll'aiuto della nostra formola (I), l'integrale n^{plo}

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} v \Omega(u)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n ,$$

deducendo il valore del termine generale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \int_{\alpha_r}^{\beta_r} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-r}} v \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} dx_{i_1}\, dx_{i_2} \dots dx_{i_r}$$

appunto dalla (I), ove si cangi v in

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{n-r}} \cdot v .$$

Otterremo così la formola:

$$\text{(II)}\qquad \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n} v\Omega(u)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n + (uv)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} +$$

$$+\sum_{i_1}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} (v\Omega_{i_2 i_3\ldots i_n}(u))_{\alpha_{i_2}\alpha_{i_3}\ldots\alpha_{i_n}}\,dx_{i_1} +$$

$$+\sum_{i_1 i_2}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}\int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} (v\Omega_{i_3\ldots i_n}(u))_{\alpha_{i_3}\ldots\alpha_{i_n}}\,dx_{i_1}dx_{i_2} + \cdots$$

$$+\sum_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}\int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}}\cdots\int_{\alpha_{i_{n-1}}}^{\beta_{i_{n-1}}} (v\Omega_{i_n}(u))_{\alpha_{i_n}}\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_{n-1}} =$$

$$= (uv)_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} - \sum_{i_1}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} (u\Phi_{i_2 i_3\ldots i_n}(v))_{\beta_{i_2}\beta_{i_3}\ldots\beta_{i_n}}\,dx_{i_1} +$$

$$+\sum_{i_1 i_2}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}\int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} (u\Phi_{i_3\ldots i_n}(v))_{\beta_{i_3}\ldots\beta_{i_n}}\,dx_{i_1}\,da_{i_2} - \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_{i_1 i_2\ldots\, n-1}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}\int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_3}}\cdots\int_{\alpha_{i_{n-1}}}^{\beta_{i_{n-1}}} (u\Phi_{i_n}(v))_{\beta_{i_n}}\,dx_{i_1}\,dx_{i_2}\ldots dx_{i_n} +$$

$$+(-1)^n\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n} u\Phi(v)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,.$$

III.

« Vogliasi ora trovare la soluzione regolare u della equazione

$$\Omega(u) = \mathrm{F}(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n),$$

(essendo F una funzione data delle x variabili) che sopra ciascuno degli iperpiani coordinati

$$x_{i_1} = \alpha_{i_1}$$

si riduca ad una funzione arbitrariamente data delle rimanenti variabili $x_{i_2}\ldots x_{i_n}$.

« L'esistenza di una tale soluzione risulta subito, come più volte abbiamo ripetuto in queste Note, dall'applicare il metodo di Picard delle approssimazioni successive. La formola (B) dà poi il modo di estendere alle n variabili il metodo di Riemann e in particolare di dimostrare così l'unicità della soluzione domandata.

« Perciò, volendo calcolare il valore di questa soluzione u in un punto qualsiasi $(\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n)$, si cominci dal determinare la *soluzione principale relativa al punto* $(\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n)$ della equazione aggiunta

$$\Phi(v) = 0,$$

cioè la soluzione regolare di questa equazione che viene definita dalle condizioni seguenti:
essa deve soddisfare sugli iperpiani coordinati

$$x_{i_1} = \beta_{i_1}$$

alla rispettiva componente d'ordine $n-1$

$$\Phi_{i_1}(v) = 0,$$

sopra gli S_{n-2} coordinati

$$x_{i_1} = \beta_{i_1} \quad x_{i_2} = \beta_{i_2}$$

alle rispettive componenti di ordine $n-2$

$$\Phi_{i_1\, i_2}(v) = 0$$

e in generale sopra gli S_{n-r} coordinati

$$x_{i_1} = \beta_{i_1} \dots x_{i_r} = \beta_{i_r}$$

alla componente d'ordine $n-r$

$$\Phi_{i_1\, i_2 \dots i_r}(v) = 0,$$

in fine sopra gli assi (S_1) coordinati alle rispettive componenti di 1° ordine

$$\Phi_{i_2\, i_3 \dots i_n}(v) = 0\,;$$

da ultimo deve assumere il valore *uno* nel punto $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ [1].

« Supposto noto questo *moltiplicatore principale* v e sostituendolo nella (II) avremo immediatamente

$$\text{(III)} \quad (u)_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = (uv)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} v F(x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n + \dots$$

$$+ \sum_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_{n-1}}} \dots \int_{\alpha_{i_{n-1}}}^{\beta_{i_{n-1}}} (v\, \Omega_{i_n}(u))_{\alpha_{i_n}}\, dx_{i_1}\, dx_{i_2} \dots dx_{i_{n-1}} + \cdots$$

$$+ \sum_{i_1 i_2} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_1}} (v\, \Omega_{i_3}{}^{(u)}{}_{\dots i_n})_{\alpha_{i_3} \dots \alpha_{i_n}}\, dx_{i_1} dx_{i_2} + \sum_{i_1} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_i} (v \Omega_{i_2}{}^{(u)}{}_{i_3 \dots i_n})\, dx_{i_1}\,.$$

[1] Si osserverà che, per la simmetria di queste condizioni, la soluzione principale di $\Phi(v) = 0$ è altresì soluzione principale di tutte le componenti $\Phi_{i_1 i_2 \dots i_r}(v) = 0$ nel rispettivo spazio coordinato S_{n-r}.

« Questa formola ci fa conoscere appunto il valore di u in $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ in funzione dei valori che u assume sugli iperpiani coordinati. Ne risulta che se $u = 0$ sugli iperpiani coordinati, sarà

$$(u)_{\beta_1 \beta_3 \dots \beta_n} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_1}^{\beta_2} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} v\mathrm{F}(x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

e però se $\mathrm{F} = 0$ sarà dovunque $u = 0$, onde: Una soluzione regolare di $\Omega(u) = \mathrm{F}$ è perfettamente individuata dai valori che u assume sugli iperpiani coordinati uscenti da un punto.

« Suppongasi ora che nella (III) u sia la soluzione principale di $\Omega(u) = 0$ relativa al punto $(\alpha_2 \alpha_2 \dots \alpha_n)$; la (III) diventa allora

$$(u)_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = (v)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

e ci dà il *teorema di reciprocità* di Darboux esteso alle n variabili.

« Ne segue che: I due problemi di integrare l'equazione $\Omega(v) = 0$ o la sua aggiunta $\Phi(v) = 0$ si equivalgono perfettamente.

IV.

« La formola generale (I) si applica egualmente ai sistemi di equazioni simultanee precisamente come nel caso del 2° ordine considerato nella Nota del dott. Niccoletti.

« Essendo $u_1, u_2 \dots u_m$, m funzioni delle n variabili $x_1, x_2 \dots x_n$ consideriamo m espressioni lineari $\Omega^{(r)}$ della forma

$$\Omega^{(r)}(u_1 u_2 \dots u_m) = \frac{\partial^n u_r}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=m} \left\{ \sum_{i_1} a_{i_1}^{(k)} \frac{\partial^{n-1} u_k}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} + \sum_{i_1 i_2} a_{i_1}^{(k)}{}_{i_2} \frac{\partial^{n-2} u_k}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_n}} + \dots + a_{12\dots n}^{(k)} u_k \right\}$$

e supponiamo di volere integrare il sistema

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \Omega^{(1)}(u_1 u_2 \dots u_m) = \mathrm{F}_1(x_1 x_2 \dots x_n) \\ \Omega^{(2)}(u_1 u_2 \dots u_m) = \mathrm{F}_2(x_1 x_2 \dots x_n) \\ \Omega^{(m)}(u_1 u_2 \dots u_m) = \mathrm{F}_m(x_1 x_2 \dots x_n), \end{cases}$$

essendo le F funzioni assegnate di $x_1 x_2 \dots x_n$, colla condizione che le solu-

zioni regolari $u_1 u_2 \ldots u_m$ assumano ciascuna sopra ciascuno degli iperpiani coordinati

$$x_r = \alpha_r$$

valori dati ad arbitrio. Definiamo perciò le componenti dei varî ordini delle $\Omega^{(r)}$ separando in $\Omega^{(r)}(u_1 u_2 \ldots u_m)$ l'aggregato dei termini che contengono le derivate s^m

$$\frac{\partial^s u_k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_s}} \quad (k = 1, 2, \ldots m)$$

essendo $i_1 i_2 \ldots i_s$ indici fissi fra $1, 2 \ldots n$ e le loro derivate, e sostituendo poi a ciascuna di quelle derivate s^{me} la u_k corrispondente; l'espressione che così otteniamo sarà la componente

$$\Omega^{(r)}_{i_1 i_2 \ldots i_s} .$$

« Similmente definiamo le espressioni aggiunte

$$\Phi^{(r)}(v_1 v_2 \ldots v_m)$$

e le loro componenti

$$\Phi^{(r)}_{i_1 i_2 \ldots i_s}(v_1 v_2 \ldots v_m)$$

« Il sistema di *moltiplicatori principali* $v_1 v_2 \ldots v_m$ relativo al punto $(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$ sarà definito dal dover soddisfare in tutto lo spazio al sistema aggiunto

$$\Phi^{(r)}(v_1 v_2 \ldots v_m) = 0$$

e sopra gli spazî coordinati S_{n-3} uscenti da $(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$ alle rispettive componenti

$$\Phi^{(r)}_{i_1 i_2 \ldots i_s}(v_1 v_2 \ldots v_m) = 0 \; (s = 1, 2, \ldots n - 1),$$

in fine di assumere in $(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$ un sistema prefissato di valori non tutti nulli. Per determinare la soluzione del dato sistema (A) colle assegnate condizioni ai limiti si dedurrà dalla (I) una formola che è la generalizzazione della (III) e da questa si ottiene cangiandovi u, v, F rispettivamente in u_r, v_r, F_r e sommando da $r = 1$ a $r = m$. Così sarà nota in $(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$ la somma

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_m v_m$$

e basterà scegliere m sistemi di moltiplicatori principali il cui determinante in $(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$ sia diverso da zero per calcolarne linearmente $u_1 u_2 \ldots u_m$.

V.

« Un complemento di qualche interesse al metodo di Riemann è dato dalle osservazioni seguenti.

« Se della equazione $\Omega(u) = 0$ conosciamo la soluzione principale relativa ad ogni punto dello spazio, potremo per quanto precede trovarne l'integrale generale colle n funzioni arbitrarie di $n-1$ variabili ciascuna. Questo è ad esempio il caso della equazione

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = u$$

considerato nella mia prima Nota.

« Supponiamo invece di sapere determinare soltanto la soluzione principale di $\Omega(u) = 0$ relativa ad ogni punto dell'iperpiano $x_n = \alpha_n$: allora del moltiplicatore principale relativo a qualsiasi punto dello spazio $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ sapremo determinare, pel teorema di reciprocità, i valori che assume sull'iperpiano $x_n = \alpha_n$. Se ci limitiamo adunque a ricercare quelle soluzioni di $\Omega(u) = 0$ che si annullano sugli altri iperpiani coordinati

$$x_1 \pm \alpha_1 \,,\, x_2 = \alpha_2 \,,\, x_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

la formola (III) ci darà evidentemente:

$$(u)_{\beta_1 \beta_1 \dots \beta_n} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_1}^{\beta} \dots \int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}} v\, \Omega_n(u)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}$$

e avremo un integrale della proposta con una funzione arbitraria di $n-1$ variabili assegnando ad arbitrio i valori di u sull'iperpiano $x_n = \alpha_n$.

« Come esempio, consideriamo l'equazione

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} - p x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - q u = 0$$

con p, q costanti. Possiamo facilmente determinarne la soluzione principale relativa ad un punto qualunque dell'iperpiano $x_1 = 0$. E invero se poniamo

$$\tau = x_1 (x_2 - \alpha_2) \dots (x_n - \alpha_n),$$

essendo $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ costanti qualunque, potremo determinare una trascendente intera in τ:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{J}(\tau) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} c_r \tau^r,$$

che coincida colla soluzione principale della (1) relativa al punto $(0, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Poichè infatti nel caso attuale essa deve ridursi $= 1$ sopra ciascuno degli iperpiani coordinati uscenti dal punto $(0, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, basterà determinare nella serie (2) i coefficienti c_r dalla relazione ricorrente

$$r^n c_r = \{ p(r-1) + q \} c_{r-1},$$

onde

$$c_r = \frac{q(q+p)(q+2p)\ldots(q+(q-1)p)}{2^n 3^n \ldots r^n}.$$

« La serie

$$J(x) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q(q+p)(q+2p)\ldots(q+(r-1)p)}{2^n 3^n \ldots r^n} x^r$$

converge effettivamente in tutto il piano. Si osserverà che nel caso $n=2$ l'equazione (1) è il tipo a cui può ridursi la equazione più generale a invarianti costanti

$$h = q - p \qquad k = q.$$

« Particolarmente notevole è il caso $q = -p$ ovvero $h = 2k$ ove la equazione può integrarsi col metodo di Laplace. In tal caso la soluzione principale relativa ad un punto qualsiasi $(\alpha_1 \alpha_2)$ è data dalla formola

$$u = e^{p\alpha_1(x_2-\alpha_2)} \{ 1 - p(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2) \}.$$

« Dopo l'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, è questo, per quanto io so, il caso più semplice in cui la determinazione della soluzione principale riesce completamente ».

Matematica. — *Sulle operazioni funzionali distributive.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

« Molte fra le più importanti operazioni che, eseguite sopra una funzione analitica di una variabile, danno pure come risultato una funzione analitica, godono della proprietà distributiva; se cioè A ci rappresenta una tale operazione ed $A(\varphi)$ il risultato che si ottiene eseguendola sopra alla funzione φ, si ha, indicando con ψ una seconda funzione

$$A(\varphi + \psi) = A(\varphi) + A(\psi) \tag{1}$$

cui va unita l'uguaglianza

$$A(c\varphi) = cA(\varphi),$$

dove c indica una costante. Tali operazioni verranno chiamate *operazioni funzionali distributive*, e la presente Nota ha per oggetto di esporre alcuni dei principî del loro calcolo.

« 1. L'operazione A si applichi ad una funzione analitica $\varphi(t)$: il risultato $A(\varphi)$ sarà funzione analitica di una variabile che, per non togliere nulla alla generalità, denoteremo con lettera diversa da t ed indicheremo con x; il che non esclude che per molte classi speciali di operazioni funzionali x si possa riguardare come coincidente con t.

« 2. Talvolta una data operazione funzionale A andrà applicata non a qualunque funzione analitica ma soltanto a quelle di una determinata classe; questa classe si dirà allora costituire un *Campo funzionale*, e l'operazione A si dirà applicabile in questo campo.

« 3. Un'operazione A che, applicata ad una determinata funzione $\varphi(t)$, dà come risultato una unica funzione di x, si dirà *ad un valore*; quando invece l'operazione, applicata alla $\varphi(t)$, è suscettibile di più determinazioni, cioè può rappresentare più funzioni di x, essa si dirà *a più valori*. Una operazione a più valori quando si applichi alla totalità delle funzioni analitiche, può benissimo essere ridotta ad un valore qualora ci si limiti ad applicarla in un conveniente campo funzionale.

« Nei §§ 4, 5 e 6 seguenti, si tratterà sia di operazioni ad un valore, sia di operazioni applicate in un campo funzionale in cui siano ridotte ad un valore.

« 4. Essendo A, B due operazioni che applicate alla funzione φ danno rispettivamente come risultato le funzioni f ed f_1, indicherò con $A+B$ l'operazione che applicata a φ dà per risultato $f+f_1$. Questa nuova operazione si dirà *somma* delle operazioni A e B; essa è ad un valore se A e B sono tali, e gode della proprietà commutativa ed associativa. Manifestamente $A+B$ è un'operazione distributiva al pari di A e di B.

« 5. Eseguendo sulla funzione φ l'operazione A, quindi sul risultato ottenuto l'operazione B, si dirà di avere eseguito su φ l'operazione BA, *prodotto* di A e B. Si scriverà dunque

$$B(A(\varphi)) = BA(\varphi) .$$

« L'operazione BA è manifestamente distributiva al pari di A e B.

« Il prodotto ... CBA di più operazioni funzionali distributive A, B, C, ... gode della proprietà associativa, ma non in generale della commutativa.

« Sono evidenti le uguaglianze

$$A(B+C) = AB + AC , \quad (A+B)\,C = AB + BC .$$

« Applicando al risultato dell'operazione A la stessa operazione A, si avrà l'operazione A^2, applicando al risultato di A^2 l'operazione A e così

di seguito, si giungerà all'operazione A^m, potenza (intera positiva) di A. È chiaro che

$$A^m A^n = A^{m+n}.$$

« Si indicherà con 1 l'operazione *identità*, l'operazione C cioè tale che

$$C(\varphi) = \varphi\,;$$

ne risulta per ogni operazione A

$$AC = CA = A.$$

« 6. Operazione *inversa* di A è una operazione A^{-1} tale che se $A(\varphi)=f$, sia $A^{-1}(f) = \varphi$, cioè tale che

$$A^{-1} A = 1.$$

« Da ciò il significato dell'operazione A^m anche per m intero negativo, come pure l'eguaglianza

$$A^0 = 1.$$

« In generale, anche se l'operazione A è ad un valore, la sua inversa sarà a più valori. Basta a ciò che l'operazione A abbia qualche *radice*, che esista cioè una funzione $\omega(t)$ tale che sia $A(\omega) = 0$; poichè se è $A(\varphi) = f$, sarà anche $A(\varphi + \omega) = f$ e l'operazione $A^{-1}(f)$ darà come risultato le funzioni φ, $\varphi + \omega$, ed in generale $\varphi + c\omega$, essendo c una costante arbitraria. Reciprocamente, quando l'operazione A^{-1} ammette più determinazioni, la differenza di due di esse è radice di A, cioè soluzione di $A(\varphi) = 0$.

« L'operazione A^{-1} è distributiva, nel senso che fra le determinazioni possibili per $A^{-1}(f + f_1)$ si trova la somma di una qualunque delle determinazioni di $A^{-1}(f)$ con una qualunque di quelle di $A^{-1}(f_1)$. Ma se il campo funzionale delle φ si limita opportunamente, potrà avvenire che anche l'operazione A^{-1} si riduca ad un valore ed allora vale senz'altro, per essa, la legge distributiva [1].

« 7. Essendo A un'operazione funzionale distributiva, si chiamerà *derivata funzionale* di questa operazione e si indicherà con A' l'operazione definita da

$$A'(\varphi) = A(t\varphi) - x\,A(\varphi). \tag{2}$$

[1] Un esempio mi sembra opportuno a fare intendere in quale modo possa essere fatta l'accennata limitazione del campo funzionale. L'operazione A sia tale che le sue radici siano funzioni analitiche regolari entro il cerchio di centro $t = 0$ e di raggio r; è facile determinare una simile operazione A, prendendola p. e. sotto la forma del primo membro di un'equazione differenziale lineare in t. Il campo funzionale in cui si prende φ sia costituito dall'insieme delle funzioni analitiche regolari entro cerchi di centro $t = 0$ e di raggi maggiori di r. Allora l'operazione $A^{-1}(f)$, se ha per una data f una determinazione nel campo funzionale indicato, ne avrà una sola, e per tali soluzioni A^{-1} gode della proprietà distributiva.

« Indicando con C il prodotto dell'operazione A per B, cioè $C = BA$, si avrà

$$C' = B'A + BA',$$

cioè alla derivazione funzionale è applicabile il teorema di Leibniz. Sia infatti

$$A(\varphi(t)) = \psi(z) \ , \ B(\psi(z)) = f(x);$$

sarà C' dato da

$$\begin{aligned} BA(t\varphi(t)) - xBA(\varphi(t)) = B\{A(t\varphi(t)) - zA(\varphi(t))\} \\ + B(z\psi(z)) - xB(\psi(z)), \end{aligned}$$

ossia

$$C' = BA' + B'A. \tag{3}$$

« In modo analogo si potrà definire la *derivata seconda funzionale* A'', o derivata della derivata prima, e si troverà

$$A''(\varphi) = A'(t\varphi) - xA'(\varphi) = A(t^2\varphi) - 2xA'(t\varphi) + x^2A(\varphi),$$

ed in generale la derivata funzionale n^{sima}, che sarà data da

$$A^{(n)} = A(t^n\varphi) - nxA(t^{n-1}\varphi) + \binom{n}{2} x^2 A(t^{n-2}\varphi) - \dots + (-1)^n x^n A(\varphi). \tag{4}$$

Essendo $C = AB$, si avrà

$$C'' = B''A + 2B'A' + BA''$$

ed in generale

$$C^{(n)} = B^{(n)}A + nB^{(n-1)}A' + \binom{n}{2} B^{(n-2)}A'' + \cdots + BA^{(n)},$$

come per la derivazione ordinaria.

« 8. Dalle relazioni (4) è facile di ricavare l'espressione di $A(t^n\varphi)$ in funzione di $A(\varphi)$ e delle sue derivate, e si ottiene

$$\left\{ \begin{aligned} A(t\varphi) &= xA(\varphi) + A'(\varphi), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A(t^n\varphi) &= x^nA + nx^{n-1}A' + \binom{n}{2} x^{n-2}A'' + \cdots + A^{(n)}. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Sia ora una serie di potenze di t

$$\pi = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu,$$

e si formi $A(\pi\varphi)$; si avrà per le formule precedenti

$$A(\pi\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu A(t^\nu\varphi) = \sum c_\nu (x^\nu A + \nu x^{\nu-1}A' + \binom{\nu}{2} x^{\nu-2}A'' + \dots + A^{(\nu)})$$

ed ordinando per A, A', A'', .. si ottiene *formalmente* il risultato

$$A(\pi\varphi) = \pi A(\varphi) + \pi' A'(\varphi) + \frac{\pi''}{1 \cdot 2} A''(\varphi) + \cdots + \frac{\pi^\nu}{\nu!} A^{(\nu)}(\varphi) + \cdots \tag{6}$$

che si può riguardare, nel calcolo funzionale, come l'analogo del teorema di Taylor nell'ordinaria teoria delle funzioni.

« Ripetiamo che questo risultato è qui ottenuto come meramente formale; per ogni singola operazione A sarà però sempre possibile di determinare campi funzionali per π e φ, tali che in essi la formula precedente sia effettivamente applicabile.

« Da questa formula facendo $\varphi = 1$ e cambiando π in φ, funzione arbitraria, risulta l'altra

$$(7)\quad A(\varphi) = A(1)\varphi + A'(1)\frac{\varphi'}{1} + A''(1)\frac{\varphi''}{1.2} + \cdots + A^{(\nu)}(1)\frac{\varphi^{(\nu)}}{\nu!} + \cdots,$$

analoga allo sviluppo di Maclaurin. Da essa risulta come ogni operazione distributiva A sia, nel campo funzionale in cui è valida la formula precedente, rappresentabile mediante una serie a coefficienti funzioni di x e procedente per le derivate successive della funzione arbitraria φ.

« 9. Veniamo ora a passare in rassegna alcune delle operazioni distributive più semplici, ed applichiamo le cose dette alla ricerca di una proprietà caratteristica per ciascuna di esse.

« *a*) Moltiplicazione. — L'operazione che consiste nel moltiplicare una funzione arbitraria φ di t per una funzione data $\mu(t)$, è evidentemente distributiva; la chiameremo col nome di *moltiplicazione* per $\mu(t)$ o semplicemente di *moltiplicazione*; l'indicheremo poi con M_μ quando vorremo porre in evidenza la funzione moltiplicatrice, e quando ciò non sia necessario, semplicemente con M. In questo caso la variabile x coincide con t. Le operazioni M_{a_1} M_{a_2}, ... formano evidentemente un *gruppo*. La derivata di M sarà

$$M'(\varphi) = M(t\varphi) - t\,M(\varphi)$$

e poichè $M(\varphi) = \mu\varphi$, viene $M' = 0$.

« Inversamente, se A è una operazione la cui derivata è nulla, sarà

$$A(t\varphi) - x\,A(\varphi) = 0,$$

onde, posto $A(1) = \varepsilon(x)$, risulterà

$$A(t) = x\varepsilon(x)\ ,\ A(t^n) = x^n\varepsilon(x),$$

e per una funzione $\varphi(t)$ rappresentata da una serie di potenze di t,

$$A(\varphi(t)) = \varphi(x)\,\varepsilon(x);$$

l'operazione A non differirà quindi dalla *moltiplicazione*.

« L'operazione M gode pure della proprietà che $(MA)' = MA'$, come segue subito dal teorema espresso dalla (3).

« *b*) Derivazione. — Indicheremo con D l'operazione di derivazione, in modo che

$$D(\varphi) = \frac{d\varphi}{dt}$$

Applicando la (2), troveremo per derivata funzionale di D la

$$D'(\varphi) = D(t\varphi) - t\,D(\varphi) = \varphi\,;$$

talchè si può scrivere $D' = 1$. La derivata seconda funzionale di D sarà zero.

« Considerando il prodotto MD, si vede, applicando la (3), che la sua derivata è la *moltiplicazione* M.

« Se si cerca l'operazione A più generale la cui derivata seconda funzionale sia zero, si trova senza difficoltà che essa è

$$A = MD + M_1\,,$$

essendo M ed M_1 operazioni di moltiplicazione.

« *c*) Forme differenziali lineari. — L'operazione

$$F = M_{a_0} + M_{a_1}D + M_{a_2}D^2 + \cdots M_{a_r}D^r\,,$$

dove $a_0, a_1, \ldots a_r$ sono funzioni date, si chiamerà *forma differenziale lineare dell'ordine* r. Essa è manifestamente distributiva. Formando la derivata funzionale di F per mezzo della (2), e notando che

$$D^m(t\varphi) - t\,D^m(\varphi) = m\,D^{m-1}(\varphi)\,,$$

si ottiene

$$F' = M_{a_1} + 2M_{a_2}D + 3M_{a_3}D^2 + \cdots + r\,M_{a_r}D^{r-1}\,.$$

Perciò la derivazione funzionale delle forme differenziali lineari si eseguisce colla stessa regola della derivazione ordinaria nelle funzioni razionali intere.

« Applicando alla F la formola (6), si ottiene

$$F(\pi\varphi) = \pi\,F(\varphi) + \pi'\,F'(\varphi) + \cdots + \frac{\pi^{(r)}}{r!}\,F^{(r)}(\varphi)\,,$$

la quale, sviluppata che sia, dà una identità che, sotto un'altra forma, è nota fino dallo scorso secolo, e si trova spesso usata dal D'Alembert (*Théorie des vents, théorie de la lune*).

« Si noti che la derivata funzionale $r + 1^{sima}$ di F è nulla. Reciprocamente, se si cerca una operazione A tale che $A^{(r+1)}$ sia nulla, si trova senza difficoltà che A è una forma differenziale lineare dell'ordine r al più.

« *d*) L'operazione θ. — Con θ si rappresenta la operazione definita da

$$\theta(\varphi(t)) = \varphi(t+1).$$

Formandone la derivata funzionale, si ottiene

$$\theta' = \theta\,,$$

ossia l'operazione θ ha per derivata funzionale sè stessa (1). Reciprocamente

(1) In tutti i trattati si nota la formula simbolica $e^{\frac{d}{dt}}$ per l'operazione θ; ossia, colle nostre notazioni, $\theta = e^D$. È notevole il fatto che a questa stessa espressione simbolica conduce la proprietà espressa da $\theta' = \theta$, tenuto conto dell'altra $D' = 1$.

l'operazione più generale che abbia per derivata se stessa è la $M\theta$. Sia infatti

$$A' = A\,, \text{ ossia } A(t\varphi) - xA(\varphi) = A(\varphi)\,,$$

posto $A(1) = \varepsilon(x)$, ne risulta

$$A(t) = (x+1)\,\varepsilon(x)\,, \ldots A(t^n) = (x+1)^n\,\varepsilon(x)\,,$$

e quindi, essendo $\varphi(t)$ una funzione presa in un campo funzionale conveniente [1],

$$A(\varphi) = \varepsilon(x)\varphi\,(x+1)\,.$$

« Per l'operazione θ^a si ha

$$(\theta^a)' = a\theta^a\,;$$

per l'operazione Δ (differenza finita) si ha $\Delta' = \theta$; per la forma lineare alle differenze

$$M_{a_0} + M_{a_1}\,\theta + M_{a_2}\,\theta^2 + \cdots + M_{a_r}\,\theta^r\,,$$

la derivata funzionale è

$$M_{a_1}\theta + 2M_{a_2}\theta^2 + \cdots + rM_{a_r}\,\theta^r\,.$$

« *e*) La sostituzione. — L'operazione che consiste nel sostituire, in una funzione arbitraria φ di t, alla t una funzione data $\mu\,(t)$, è evidentemente distributiva. La chiameremo col nome di *sostituzione* e l'indicheremo con S_μ o semplicemente S, secondo che sarà o no necessario di porre in evidenza la funzione $\mu(t)$ che si sostituisce a t. Le operazioni $S_{\mu_1}, S_{\mu_2}, \ldots$ formano evidentemente un gruppo.

« Si ha

$$S(\varphi\psi) = S(\varphi)\,S(\psi),$$

cioè l'operazione S è distributiva oltre che rispetto all'addizione, anche rispetto alla moltiplicazione; e questa proprietà è caratteristica per l'operazione S. Infatti, se A è tale che $A(\varphi\psi) = A(\varphi)\,A(\psi)$, ne risulterà, posto $A(t) = \omega(x)$, che $A(t^n) = \omega^n\,(x)$ e quindi, essendo $\varphi(t)$ serie di potenze di t,

$$A(\varphi(t)) = \varphi(\omega(x))\,.$$

« L'operazione S non può avere radici, onde segue che S^{-1} è pure ad un valore.

« La derivata funzionale di S_μ è data immediatamente da

$$S'_\mu = (\mu(t) - t)\,S_\mu\,;$$

onde l'operazione S soddisfa ad una relazione della forma

$$S' = \lambda S \tag{8}$$

[1] Il campo funzionale è qui l'insieme delle funzioni regolari in un cerchio di centro $t=0$ e di raggio superiore all'unità.

dove λ è una funzione data; una tale relazione si può chiamare un'*equazione differenziale funzionale.* Inversamente, ogni operazione soddisfacente ad un'equazione (8) è della forma MS; infatti dalla (8) risulta

$$S(t\varphi) = (\lambda(x) + x)\, S(\varphi),$$

posto dunque $S(1) = \varepsilon(x)$, viene

$$S(t) = (\lambda(x) + x)\, \varepsilon(x), \ldots S(t^n) = (\lambda(x) + x)^n\, \varepsilon(x)$$

ed essendo $\varphi(t)$ una serie di potenze di t,

$$S(\varphi) = \varphi(\lambda(x) + x)\, \varepsilon(x),$$

c. d. d.

« 10. Si può proporre la ricerca delle operazioni funzionali commutabili colla derivazione. Queste operazioni formano evidentemente un gruppo. Sia A una tale operazione; posto $A(1) = \varepsilon(x)$, verrà per la proprietà ammessa:

$$DA(1) = \varepsilon'(x) = A(o)$$

e supposta l'operazione A ad un valore e quindi $A(o) = 0$, risulta $\varepsilon(x) = c$, indicando c una costante. Ne segue

$$A(t) = cx + c_1,$$

come si vede subito applicando la proprietà $DA = AD$, indi

$$A(t^2) = \frac{cx^2}{2} + c_1 x + c_2;$$

in generale $A(t^n)$ sarà un polinomo razionale intero in x, tale che

$$\frac{dA(t^n)}{dx} = nA(t^{n-1}).$$

« Tali polinomi sono quelli già studiati dal prof. Appell [1], e pertanto l'operazione $A(\varphi)$ non è altro che quella che egli definisce nel § 12 della citata sua Memoria. Si ottiene dunque questo risultato, che il gruppo delle operazioni funzionali distributive commutabili colla derivazione è il gruppo delle operazioni di Appell [2] ».

Matematica. — *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

« Delle superficie (e in particolare delle superficie algebriche) con infinite trasformazioni projettive in sè stesse si è occupato il sig. Enriques in una Memoria presentata al R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti

(1) Annales de l'École Normale Sup., S. II, T. IX, 1880.

(2) Cfr. la mia Memoria *Sur certaines opérations* etc. Acta Math., T. X, 1887.

nel luglio del 1893 ([1]); e poco dopo (settembre-ottobre) esciva anche il 3° volume della *Theorie der Transformationsgruppen* del sig. Lie, nella quale (cfr. pp. 190-198) sono determinate tutte le superficie (dello spazio ordinario) che ammettono un gruppo continuo almeno ∞^3 di trasformazioni projettive, ed è anche accennata una via per fare l'analoga determinazione nel caso di un gruppo ∞^2. — In questa Nota io mi propongo di studiare le superficie algebriche di uno spazio qualunque, che ammettono un gruppo continuo (una o più volte infinito) di trasformazioni projettive ([2]), estendendo le diverse considerazioni anche al caso di omografie con punti uniti multipli, e completando così i risultati importantissimi già ottenuti (per lo spazio ordinario) dal sig. Enriques.

« 1. Sia F una superficie algebrica appartenente a uno spazio S_r, la quale ammetta un gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni projettive. Questo gruppo si potrà ritenere generato da una determinata trasformazione infinitesima ([3]), e si comporrà quindi di omografie aventi tutte gli stessi punti uniti (punti che potranno essere in numero finito o infinito, tutti distinti, ovvero anche coincidenti in vario modo) ([4]). Le *trajettorie* dei singoli punti dello spazio S_r, e in particolare dei punti della superficie F, saranno *Curve W* ([5]); queste ultime contenute in detta superficie. La projettività (più generale) che ha gli stessi punti uniti del gruppo in discorso, e che fa corrispondere fra loro due punti qualunque P e P′ dello spazio S_r, muta anche la trajettoria di uno di questi punti in quella dell'altro ([6]). Se questi due punti stanno in particolare sulla superficie F, la stessa projettività (supposto che

([1]) È inserta in quegli Atti, t. IV, serie 7ª. Cfr. anche la Nota sullo stesso argomento inserta nel successivo t. V (1893-94).

([2]) Rimane quindi implicitamente compreso anche il caso di un gruppo *misto* di trasformazioni projettive (di un gruppo costituito cioè da un numero discreto di schiere continue di tali trasformazioni), perchè fra queste schiere certo una (e una sola) sarebbe di per sè un gruppo (continuo) (cfr. Lie, op. cit., vol. III, p. 180; e anche vol. I, cap. 18). Resterebbe solo da vedere quali fra i gruppi continui che a noi si presenteranno potrebbero essere opportunamente ampliati (*erweitert*).

([3]) Infatti il gruppo delle trasformazioni projettive di uno spazio qualunque, che mutano in sè una data superficie contenuta in questo spazio, si compone evidentemente di trasformazioni a due a due inverse, e contiene perciò la trasformazione identica. Se è continuo, esso si potrà dunque generare con trasformazioni infinitesime (cfr. Lie, op. cit., vol. I, p. 75); se è misto, vi sarà, fra le diverse schiere che lo compongono, *un* gruppo (di trasformazioni a due a due inverse) generabile in questo modo (loc. cit., pp. 315-16).

([4]) I gruppi continui ∞^1 di trasformazioni projettive dello spazio S_r furono già da tempo ridotti ad alcuni tipi fondamentali, nei casi di $r=1$ e $r=2$ (cfr. Lie, op. cit., vol. III; opp. Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen*...; Leipzig, 1893). Per $r=3$, la riduzione (a 13 tipi) fu data recentemente dal prof. Pittarelli (Ann. di Mat., ser. 2ª, t. XXII),

([5]) Cfr. Klein-Lie, Compt. Rend., t. LXX (1870); e Math. Ann., vol. IV, p. 50-84.

([6]) Cfr. Klein-Lie, Compt. Rend., t. LXX, p. 1226.

muti precisamente P in P′) dovrà mutare F in una superficie algebrica contenente la trajettoria di P′. Ma se le diverse trajettorie sono curve trascendenti, se cioè è *trascendente* il gruppo ∞^1 proposto (secondo la denominazione usata dal sig. Enriques: Mem. cit., p. 5) è chiaro che nessuna di queste curve potrà stare su due diverse superficie algebriche; epperò la projettività considerata dovrà anch'essa mutare F in sè medesima. E poichè i punti P e P′ sono affatto arbitrarî, se ne trae facilmente che:

« *Se una superficie algebrica (appartenente a uno spazio qualsiasi) ammette un gruppo continuo* ∞^1 TRASCENDENTE *di trasformazioni projettive, essa ammetterà anche un intero gruppo transitivo* ∞^2 *di tali trasformazioni, tutte fra loro permutabili (aventi cioè gli stessi punti uniti di quel gruppo* ∞^1).

« 2. Nello spazio S_3, queste superficie sono *superficie W* di Klein-Lie (Compt. Rend., t. LXX). In uno spazio superiore S_r, sarebbero superficie projettantisi in queste da ogni S_{r-4} che sia unito per le ∞^2 omografie. Ma se le trajettorie considerate poc'anzi sono effettivamente trascendenti, queste superficie non potranno essere algebriche che nel solo caso in cui i punti uniti siano tutti distinti (o meglio, formino un gruppo *appartenente* allo spazio S_r — non contenuto cioè in uno spazio inferiore —) (1).

« D'altra parte, se il gruppo ∞^1 proposto è *algebrico*, se sono cioè algebriche, quindi *razionali*, le diverse trajettorie, la superficie F conterrà un fascio di curve razionali (senza però che sia necessariamente razionale il fascio). Ma se i punti uniti delle ∞^1 omografie sono in numero finito, essi saranno o ancora tutti distinti (e indipendenti), oppure tutti coincidenti (e le trajettorie saranno in quest'ultimo caso curve normali di ordine r); se vi sono infiniti punti, e quindi anche infiniti iperpiani e spazi inferiori uniti, bisognerà ancora che i diversi *spazi di punti uniti* o siano tutti distinti (e perciò indipendenti), oppure a due a due *si appartengano* (ciascuno di essi contenga cioè quelli di dimensione inferiore, e sia contenuto in quelli di dimen-

(1) Infatti, per $r=3$, i sigg. Klein e Lie hanno osservato (Compt. Rend., t. LXX, p. 1223) che le equazioni di queste superficie si ottengono collo stabilire un'equazione lineare fra certe funzioni delle coordinate, caratterizzate dal comportarsi additivamente rispetto alle omografie del gruppo ∞^2, e che sono o funzioni algebriche, o logaritmi di tali funzioni (e precisamente di rapporti fra quelle funzioni lineari che, eguagliate a zero, rappresenterebbero le facce del tetraedro unito). L'equazione risultante non potrà dunque essere algebrica che quando dette funzioni siano o tutte algebriche, o tutte logaritmi. Ma nel primo di questi due casi le trajettorie dei diversi sottogruppi ∞^1 si trovano essere curve algebriche, e precisamente cubiche sghembe, coniche, o rette (cfr. Pittarelli, l. c., § 2, nn. 5, 9, 11, 13), mentre il secondo caso si presenta appunto quando vi sono quattro punti uniti distinti e indipendenti. E se $r>3$, dovrà presentarsi il caso analogo per tutte le omografie subordinate nelle forme ∞^3 di iperpiani che hanno per assi i diversi S_{r-4} uniti, sicchè qui pure si verificherà quanto sopra abbiamo asserito.

sione superiore — e, in particolare, coincida con quelli di eguale dimensione —) (¹).

« Riassumendo dunque, abbiamo: *I soli gruppi continui projettivi semplicemente infiniti di uno spazio* S_r, *che possono trasformare in sè stessa una superficie algebrica appartenente a questo spazio, sono quelli in cui i diversi spazi di punti uniti* (o in particolare *i diversi punti uniti*, se questi sono in numero finito) *sono tutti indipendenti* (distinti — formano cioè un sistema appartenente ad S_r —), *oppure a due a due si appartengono* (sono tutti coincidenti). *In quest'ultimo caso il gruppo è certamente algebrico; nel primo caso può essere trascendente, ma allora la superficie ammetterà tutto un gruppo transitivo* ∞^2 *di omografie permutabili.*

« Queste superficie con ∞^2 trasformazioni projettive in sè stesse si potranno projettare su di ogni S_3, che sia unito per dette trasformazioni, in superficie di equazione:

$$x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, x_3^{\alpha_3}\, x_4^{\alpha_4} = \text{Cost.}$$

dove $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, e i diversi esponenti α sono proporzionali a numeri interi (e si possono ritenere anzi essi stessi interi). Dette superficie sono anche *razionali* (cfr. Enriques, l. c., pp. 13 e 33).

« Invece sulle superficie con un gruppo algebrico ∞^1 di trasformazioni

(¹) Se i punti uniti sono in numero finito (e le trajettorie appartengono perciò allo spazio S_r) questo segue dalle note proprietà delle curve razionali con infinite trasformazioni projettive in sè stesse (cfr. ad es. la mia Nota, *Sopra certe curve razionali*....; questi Rend. p. 51 e seg.). Se invece le trajettorie sono contenute in spazi inferiori S_k ($k<r$), bisognerà analogamente che in ciascuno di questi S_k vi siano $k+1$ punti uniti o tutti distinti (e indipendenti), o tutti coincidenti. Nel primo caso, al variare dello spazio S_k, varieranno alcuni almeno dei $k+1$ punti doppi in altrettanti spazi di punti uniti; e il gruppo di questi stessi spazi, compresi eventualmente quei punti fra i $k+1$ che risultassero fissi, dovrà certo appartenere allo spazio S_r, perchè, se fosse contenuto in uno spazio inferiore, in questo dovrebbe anche esser contenuta la varietà costituita dagli ∞^1 spazi S_k, e quindi la superficie F, la quale invece si è supposta appartenere allo spazio S_r. Se invece in ogni S_k i $k+1$ punti doppi coincidono (le trajettorie sono quindi curve normali di ordine k), per le diverse posizioni di quest'unico punto unito (forse variabile da un S_k all'altro) passerà un sistema di spazi di punti uniti, che a due a due si apparterranno; ma non potrà all'infuori di questi esservene nessun altro, perchè se no la varietà degli ∞^1 spazi S_k sarebbe contenuta nello spazio conjugato di quest'uno, e non potrebbe quindi la superficie F appartenere ad S_r. L'equazione (di grado $r+1$), che si ha eguagliando a zero il *determinante caratteristico* di un'omografia generale del gruppo, dovrà dunque esser tale che ogni sua radice h^{pla} annulli anche i minori di ordine $r-h+2$ di questo determinante, oppure dovrà avere essa stessa una sola radice $(r+1)^{pla}$. Per la stessa omografia generale, il simbolo di Segre (Mem. di quest'Acc., ser. 3ª, vol. XIX) sarà costituito o da sole cifre 1, o da cifre qualunque riunite in un sol gruppo; quello di Predella (Ann. di Mat., ser. 2ª, t. XVII) da cifre qualunque, ma non riunite a gruppi, oppure anche tutte riunite in un sol gruppo.

projettive le trajettorie saranno curve razionali, su ciascuna delle quali saranno noti razionalmente uno o (ciascuno di) due punti: i punti uniti comuni alle ∞^1 projettività su di esse. (Anzi, se le collineazioni considerate in S_r non hanno infiniti punti doppi, questi punti saranno gli stessi per tutte le trajettorie). In forza dei risultati ottenuti dal sig. Noether (1), queste superficie saranno dunque riferibili *birazionalmente* a superficie rigate, o in particolare a coni (se già esse non sono tali) (2). Concludiamo perciò:

« *Le superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo* ∞^1 *di trasformazioni projettive sono tutte razionali, rigate, o riferibili a rigate* (3).

« 3. Passiamo alle superficie (algebriche) con un gruppo continuo ∞^2 di trasformazioni projettive. Anche a queste si applicherà naturalmente il risultato testè ottenuto per le superficie con un gruppo ∞^1 di tali trasformazioni. In particolare dunque, queste superficie saranno certo razionali, se fra le ∞^2 trarformazioni ve ne sono ∞^1 formanti un (sotto)gruppo trascendente. Che se poi i sottogruppi ∞^1 sono tutti algebrici, e il gruppo proposto si suppone *transitivo*, la rigata a cui la superficie potrebbe riferirsi (se già non è tale) conterrebbe, oltre le generatrici, infinite curve razionali, e sarebbe perciò essa stessa razionale. Dunque:

« *Le superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo* (*due o più volte infinito*) *di trasformazioni projettive in sè stesse sono tutte razionali* (4).

(1) Cfr. la Mem.: *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Ann., vol. III, p. 161-227).

(2) Ad es., se le trajettorie sono curve razionali normali, e le ∞^1 projettività su di esse hanno i due punti doppi coincidenti, basterà costruire una rigata le cui generatrici siano riferibili biunivocamente al sistema delle stesse trajettorie (il che è possibile in infiniti modi), e projettare poi ciascuna trajettoria sulla generatrice corrispondente da uno spazio osculatore di opportuna dimensione nell'unico punto unito.

(3) Per lo spazio ordinario, e nel caso di omografie coi punti uniti distinti, questo stesso risultato era stato ottenuto appunto dal sig. Enriques (Mem. cit., pp. 13-15).

(4) Le superficie di uno spazio qualunque S_r con gruppo *intransitivo*, due o più volte infinito, di trasformazioni projettive contengono come trajettorie *un* sistema ∞^1 di curve razionali normali, appartenenti, come è facile riconoscere, a spazi inferiori (perchè le omografie di un sottogruppo ∞^1 generico devono avere certo infiniti punti doppi, quindi anche infiniti iperpiani uniti, nei quali le singole trajettorie dovranno esser contenute). Nello spazio S_3 queste superficie si riducono ai soli coni (i quali ammettono un gruppo ∞^4 di omologie, gruppo che è appunto intransitivo) e alle quadriche (che ammettono due gruppi intransitivi ∞^3 di trasformazioni projettive, ciascuno dei quali muta in sè stesse tutte le generatrici di un dato sistema — va da sè però che questi due sono contenuti in uno stesso gruppo più ampio (∞^6) e transitivo —). Nello spazio S_4 vi è ad es. la rigata cubica, che ammette un gruppo intransitivo ∞^3 di omografie aventi in generale il simbolo [(11) (111)] secondo Segre, ovvero [12] secondo Predella; e così via. E dalle rigate si possono anche ottenere altre superficie che ammettono un gruppo intransitivo di omografie,

« Fermiamoci ora sul caso di sole ∞^2 trasformazioni projettive. Se i punti uniti di queste omografie sono tutti fissi (le omografie quindi fra loro permutabili) avremo, nello spazio ordinario, le *superficie W* di Klein-Lie; negli spazi superiori, superficie di cui queste possono considerarsi come projezioni. Ma abbiamo già veduto (cfr. la 1ª nota al n. 2) che, fra le possibili disposizioni dei punti uniti, non vi sono che alcuni casi determinati, in cui queste superficie possono essere algebriche (1).

« Se invece qualcuno dei punti uniti (che supporremo per il momento in numero finito) è variabile, esso descriverà una certa linea, trasformata in sè stessa dalle ∞^2 omografie del gruppo proposto (quindi una retta, o una curva razionale normale di ordine $\leq r$ (2) — supposto che si tratti di superficie appartenente a uno spazio S_r —); e quel punto sarà in ogni sua posizione unito per le omografie di un sottogruppo ∞^1 contenuto nel gruppo proposto. Ma, se questo sottogruppo è trascendente, la superficie considerata, supposta algebrica, dovrà ammettere tutto un gruppo ∞^2 di omografie permutabili, con quegli stessi punti uniti; complessivamente dunque, infiniti gruppi ∞^2 formanti una serie continua, e perciò almeno ∞^3 trasformazioni projettive. Volendo dunque restare nel caso di sole ∞^2 omografie, ciascuno di quei sottogruppi ∞^1 dovrà essere algebrico, e avrà perciò i punti uniti o tutti distinti, o tutti coincidenti. Ma anche quest'ultimo caso è da escludersi, perchè uno almeno dei punti uniti deve essere fisso (e allora si ricadrebbe nel caso dei punti uniti fissi, tutti coincidenti); rimane dunque il solo caso dei punti uniti distinti.

« Nessuna difficoltà poi nel caso in cui vi siano, per ogni trasformazione del gruppo, infiniti punti uniti (omografie assiali, ecc.). Se i punti uniti variabili sono isolati, si può ripetere ancora lo stesso ragionamento. Se invece vi è un S_k di punti uniti variabile, esso descriverà una serie razionale ∞^1 di S_k, sulla quale le ∞^2 omografie del gruppo opereranno come sui punti di una curva. Vi dovrà dunque essere un S_k unito fisso, comune alle ∞^2 trasformazioni, e distinto perciò (in un'omografia generale) da quello

applicando ad esse trasformazioni *birazionali,* le quali mutino il gruppo di omografie relativo alla rigata in un gruppo di omografie dello spazio a cui appartiene la nuova superficie (e per questo è necessario e sufficiente che le omografie considerate nel primo spazio mutino in sè stesso il sistema lineare di curve segato sulla rigata dalle varietà che corrispondono agli iperpiani del secondo spazio).

(1) È notevole, nello spazio ordinario, il caso di un solo punto unito (quadruplo); troviamo allora la rigata cubica colle due direttrici rettilinee infinitamente vicine (cfr. Klein-Lie, Compt. Rend., t. LXX, p. 1224). Sappiamo però che questa superficie (rigata di Cayley) ammette tutto un gruppo ∞^3 di trasformazioni projettive (cfr. Lie, op. cit., vol. III, p. 196; Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. V).

(2) E su questa retta o curva razionale vi dovrà sempre essere anche un punto unito *fisso,* comune cioè a tutte le ∞^2 omografie (cfr. Enriques, Mem. cit., p. 18).

variabile; e ciò richiede appunto (i sottogruppi ∞^1 dovendo qui pure essere algebrici) che il sistema di tutti i punti uniti appartenga allo spazio S_r (cfr. n. 2).

« Concludiamo dunque: *Se una superficie algebrica appartenente a uno spazio qualsiasi ammette un gruppo ∞^2 (e non più) di trasformazioni projettive a punti uniti variabili* (ovvero anche: *se ammette un gruppo ∞^2 di trasformazioni projettive, e non è una superficie W o una delle superficie analoghe negli spazi superiori*), *un' omografia generale di questo gruppo dovrà sempre avere i punti doppi tutti distinti* (o, più generalmente, *il gruppo costituito da questi punti doppi, in numero finito o infinito, dovrà sempre appartenere allo stesso spazio della superficie proposta*).

« Il solo caso possibile è dunque l'analogo di quello che il sig. Enriques ha già trattato per $r=3$, e non sarebbe difficile estendere le sue considerazioni a uno spazio superiore qualsiasi (vi sarebbe solo, naturalmente, un numero corrispondentemente maggiore di casi da esaminare) (¹). Per $r=3$ quindi, *tutte* le superficie algebriche con (sole) ∞^2 trasformazioni projettive rientrano nelle categorie seguenti (Mem. cit., p. 44):

a) *Superficie di Klein-Lie;*

b) *Rigate* (*di ordine* ≥ 4) *con due direttrici rettilinee infinitamente vicine;*

c) *Superficie contenenti un fascio di coniche,* segate dai piani per una retta;

d) *Superficie di 6° ordine a sezioni ellittiche,* rappresentabili sul piano con un sistema lineare di cubiche aventi a comune un flesso e la relativa tangente.

« 4. Le superficie dello spazio ordinario con ∞^3 o più trasformazioni projettive sono state già determinate *tutte* nell'op. cit. del sig. Lie e nella Memoria del sig. Enriques (compresa la Nota successiva cit.). Astrazion fatta dal *piano* e dai *coni* (che ammettono tutti almeno ∞^4 trasformazioni omologiche), non vi sono che le tre superficie seguenti:

a) *Sviluppabile* (*di 4° ordine*) *circoscritta a una cubica sghemba;*

b) *Rigata cubica di Cayley;*

entrambe con ∞^3 trasformazioni projettive; e infine:

(¹) Bisognerebbe però limitarsi, per il momento, alle sole superficie algebriche, mentre le ricerche del sig. Enriques, nel caso di almeno ∞^2 trasformazioni projettive, comprendono anche le superficie trascendenti. Però il gruppo ∞^2 di omografie che si considera deve sempre avere qualche punto unito fisso, e da questo punto (o dal sistema di questi punti) la superficie proposta si potrà projettare in altra di uno spazio inferiore, che ammetterà pure ∞^2 trasformazioni projettive. E questa considerazione, che qui non intendo sviluppare, ma che certo deve riescire assai utile, permetterebbe di comprendere nella ricerca anche le superficie trascendenti (prendendo le mosse dai casi già noti nello spazio ordinario).

c) *La quadrica* (*superficie di* 2° *ordine*), con ∞^6 trasformazioni projettive in sè stessa.

« Per uno spazio qualunque S_r la ricerca analoga riescirebbe piuttosto lunga, essendo molti i casi che possono presentarsi. Così p. e. è chiaro, che le diverse superficie rappresentabili sul piano col sistema lineare di tutte le curve di un dato ordine qualsiasi, devono ammettere tutte un gruppo continuo ∞^8 di trasformazioni projettive.

« Abbiamo veduto però (cfr. n. 3) che ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive, si può rappresentare sul piano; e in questa rappresentazione le sue sezioni piane daranno luogo a un sistema lineare di curve algebriche, che verrà trasformato in sè stesso da un certo gruppo continuo di trasformazioni *Cremoniane*. Inversamente, ogni sistema lineare almeno ∞^3 di curve algebriche piane, che sia unito rispetto a un gruppo continuo di trasformazioni Cremoniane, potrà assumersi come rappresentante di una superficie algebrica (razionale) con un gruppo continuo di trasformazioni projettive in sè stessa.

« Il sig. Enriques ha dimostrato (1) che i gruppi continui di trasformazioni Cremoniane (dipendanti da un numero finito di parametri) possono ridursi birazionalmente a uno dei *tipi* seguenti:

1°) *Gruppo* ∞^8 *delle omografie, e suoi sottogruppi;*

2°) *Gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè due fasci di raggi* (ovvero: *gruppo delle inversioni rispetto ai circoli del piano*), *e suoi sottogruppi;*

3°) *Gruppo* ∞^{n+5} (*con n arbitrario*) *delle trasformazioni di Jonquières* (*d'ordine n*) *che mutano in sè il sistema lineare* ∞^{n+1} *delle curve d'ordine n con un punto base* $(n-1)^{\text{plo}}$ *e le* $n-1$ *tangenti fisse , e suoi sottogruppi.*

« Possiamo dunque dire, in generale, che ogni gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive, il quale muti in sè stessa una superficie algebrica, deve essere SIMILE *a un gruppo di omografie nel piano, oppure a un gruppo di omografie che muta in sè stessa una quadrica dello spazio* S_3, *o un cono razionale normale di uno spazio qualsiasi.*

« Fra questi gruppi, quelli che rientrano nei primi due casi sono già stati tutti assegnati e più volte studiati. Del gruppo 3°) (gruppo ∞^{n+5} di trasformazioni di Jonquières) lo stesso sig. Enriques ha assegnata la *composizione* in una Nota successiva (2), dimostrando in particolare ch'esso contiene *tre* (e tre soli) sottogruppi *eccezionali* (di cui uno ∞^{n+2} composto di sole omologie, e un altro ∞^{n+1} composto di sole omologie *speciali*) ».

(1) Cfr. questi Rend., vol. II, 1° sem., p. 468.
(2) Ibid., p. 532.

Elettricità. — *Sulla costante dielettrica di alcune sostanze e particolarmente del vetro.* Nota di D. MAZZOTTO, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meteorologia. — *I temporali in Italia.* Nota del dott. M. SACCHI, presentata dal Socio TACCHINI.

« Incaricato dal Direttore dell'Ufficio Centrale di Meteorologia di eseguire uno studio completo sui temporali in Italia, dal punto di vista della climatologia, poichè troppo poco erasi fatto in Italia in questo campo, riconobbi dapprima la necessità di studiare separatamente gli elementi che concorrono a fornire il concetto di attività temporalesca, essendo essi disparatissimi e quindi non assimilabili fra loro; e credetti di incominciare con uno studio accurato della *frequenza*, riservando a successivi lavori di associare a questo gli studî degli altri elementi.

« Lo studio della frequenza è di già compiuto per un novennio per la Liguria e per la provincia di Cuneo, ed è già molto avanzato per il resto del Regno, ed estendibile a un decennio almeno. La suddivisione del territorio è in provincie o in piccoli gruppi di provincie, quando queste siano limitrofe e troppo scarsi i dati per qualcuna di esse; e la suddivisione del tempo, fatta per determinare l'andamento annuo medio, è in settimane.

« Il lavoro venne diviso in due parti; nella prima si ebbe di mira la determinazione, per le singole annate, della frequenza media nei vari territorî, e, per tutto il novennio (1880-1888), la media dei precedenti valori e quelle spettanti ai luoghi più e meno colpiti di ciascun territorio; nella seconda parte si ebbe di mira la determinazione dell'andamento annuo medio della frequenza mediante valori settimanali.

« Per la prima determinazione servirono solo le notizie delle stazioni che fecero, durante un anno almeno, servizio regolare; e si limitò la ricerca ai soli temporali definiti da tuoni, accompagnati o no da precipitazione, e da lampi, quando questi siano contemporanei alla precipitazione. Per la seconda servirono tutte quante le notizie comunque raccolte; e poichè stante la variazione di anno in anno subìta dal numero e dalla diligenza degli osservatori, non erano confrontabili fra loro i valori settimanali ed annui delle diverse annate, e tanto meno quelli di territorî diversi, venne applicata ai numeri relativi ad ogni annata una correzione dipendente dai valori della frequenza precedentemente calcolati per i singoli anni. Questa correzione fu

fatta sostituendo ai valori rappresentanti le somme di osservazioni fatte nei singoli anni, i corrispondenti valori calcolati per la frequenza, ed alterando in proporzione quelli rappresentanti le somme settimanali. Per tal modo l'unità viene a rappresentare una osservazione fatta da una stazione arbitrariamente scelta, o, per meglio dire, da una stazione ipotetica nella quale la frequenza dei temporali sia la media dei valori che la frequenza ebbe realmente nei varî punti della regione considerata e nei singoli anni; così un valore settimanale espresso dal numero 1 potrà corrispondere al caso che tutta la regione sia stata, in quella settimana, colpite una volta, oppure la metà della regione due volte, e così via; e un valore settimanale espresso da un numero frazionario, come 0,5, si potrà interpretare nel modo più ovvio dicendo che una metà del territorio venne, in quella settimana, colpito. Inoltre la seconda determinazione riguardò non già, come la prima, la sola frequenza dei temporali complessivamente, ma anche quella dei temporali con precipitazione, che sono i più, e quella dei temporali con grandine sul luogo d'osservazione.

« Si aggiunga ancora che, valendosi dei numeri di questa seconda determinazione, si potè stabilire anche la *grandinosità relativa media* per ciascun anno, quella per tutto il novennio o normale, e l'andamento annuo per settimane di essa; intendendo, per grandinosità relativa, il rapporto fra il numero delle notizie di grandine e quello dei temporali con precipitazione per lo stesso luogo e nel medesimo intervallo di tempo.

« Ecco i risultati principali, che nel lavoro giacente nell'Ufficio sono esposti con ordine diverso:

I. — *Valori annui medî della frequenza e valori normali.*

	1880	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	normale	per cento
					Liguria						
Temporali. . . .	18.6	22.0	27.3	30.7	28.6	28.8	30.3	26.4	27.4	26.7	100.0
Temp. con prec.	17.5	19.6	24.8	25.3	26.1	24.9	27.2	23.3	24.1	23.6	88.6
Grandine	4.75	3.93	3.31	5.54	5.47	5.93	7.43	6.50	5.36	5.36	20.09
					Provincia di Cuneo						
Temporali. . . .	25.5	27.8	29.2	27.8	33.6	22.7	24.6	22.3	23.8	26.4	100.0
Temp. con prec.	24.6	23.1	24.4	24.2	30.4	20.5	22.9	21.3	20.8	23.6	89.4
Grandine	5.54	5.56	4.68	4.92	7.06	4.75	6.37	5.54	6.69	5.66	21.47

II. — *Grandinosità relativa media dei temporali in valori percentuali.*

	1880	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	normale
Liguria	27.1	20.0	13.4	21.9	20.9	23.9	27.4	27.8	22.3	22.7
Prov. di Cuneo	22.6	24.1	19.2	19.9	23.2	22.3	27.8	26.1	32.1	24.0

« La frequenza media normale dei temporali è adunque poco diversa nei due territorî, ed è circa 27 temporali con cinque o sei grandinate all'anno; e i temporali della provincia di Cuneo appaiono un po' più grandinosi di quelli della Liguria; ma, come è facile rilevare dalle forti diversità che presentano i valori annui, occorre certamente un numero di annate alquanto maggiore per stabilire dei valori normali buoni. Ai dati ora esposti è bene aggiungere quelli ottenuti prendendo, per ciascun anno, il numero di osservazioni della stazione che fu in quell'anno maggiormente colpita; la media di tali numeri massimi fu per la Liguria di 44,6 temporali, e per la provincia di Cuneo fu di 39,1; la stessa operazione fatta coi numeri minimi diede per la Liguria 14,0 e per la prov. di Cuneo 17,2; la maggior differenza, che mostrano tali valori estremi per la Liguria in confronto di quella dei valori relativi all'altro territorio, è ben naturale a motivo della molto maggiore estensione che la Liguria occupa (da W a E), e della sua più varia struttura ed esposizione.

III. — *Valori settimanali medî e andamento annuo normale.*

Num. d'ordine delle settimane	Liguria				Prov. di Cuneo			
	temporali	temporali con precipitaz.	grandine	grandino-sità	temporali	temporali con precipitaz.	grandine	grandino-sità
1	0.03	0.03	0.000	0.0	0.00	0.00	0.000	—
2	0.17	0.16	0.040	25.5	0.01	0.01	0.000	0.0
3	0.11	0.10	0.065	65.6	0.00	0.00	0.000	—
4	0.17	0.16	0.090	55.9	0.03	0.03	0.000	0.0
5	0.00	0.00	0.000	—	0.00	0.00	0.000	—
6	0.00	0.00	0.000	—	0.01	0.01	0.000	0.0
7	0.23	0.17	0.043	25.0	0.03	0.01	0.000	0.0
8	0.17	0.13	0.022	17.1	0.01	0.01	0.000	0.0
9	0.27	0.26	0.105	39.7	0.15	0.12	0.072	59.9
10	0.13	0.13	0.000	0.0	0.02	0.01	0.000	0.0
11	0.04	0.04	0.026	61.0	0.01	0.01	0.010	100.0
12	0.26	0.24	0.134	55.8	0.35	0.28	0.100	35.8
13	0.30	0.25	0.151	60.4	0.16	0.11	0.041	37.1
14	0.23	0.20	0.103	52.6	0.53	0.48	0.199	41.4
15	0.51	0.46	0.269	58.7	0.44	0.38	0.138	36.4
16	0.41	0.34	0.128	37.3	0.74	0.62	0.379	61.1
17	0.13	0.11	0.038	34.0	0.28	0.24	0.065	27.1
18	0.37	0.33	0.148	44.7	0.48	0.42	0.160	38.0
19	0.41	0.40	0.063	15.9	0.42	0.41	0.151	36.9
20	0.60	0.51	0.197	38.4	0.71	0.62	0.264	42.6
21	0.68	0.64	0.196	30.9	1.24	1.12	0.369	33.0
22	0.68	0.64	0.078	12.2	1.08	0.94	0.197	21.0
23	1.24	1.17	0.295	25.1	2.37	2.09	0.609	29.1
24	1.03	0.92	0.131	14.3	1.10	1.01	0.228	22.5
25	0.71	0.67	0.208	30.9	1.06	0.96	0.199	20.6
26	1.45	1.25	0.148	11.9	2.21	1.93	0.393	20.4
27	0.43	0.35	0.028	8.2	1.18	1.08	0.137	12.7
28	0.61	0.49	0.023	4.7	1.36	1.29	0.211	16.3
29	1.00	0.80	0.205	25.6	1.26	1.12	0.273	24.3
30	0.81	0.70	0.183	26.0	0.93	0.80	0.209	26.2
31	1.11	0.94	0.203	21.7	1.31	1.18	0.234	19.8
32	0.51	0.32	0.085	27.0	0.63	0.54	0.067	12.4
33	1.06	0.86	0.113	13.1	1.03	0.92	0.155	16.8
34	0.99	0.81	0.098	12.0	0.64	0.58	0.074	12.8
35	1.56	1.45	0.195	13.5	1.21	1.15	0.203	17.7

Num. d'ordine delle settimane	Liguria				Prov. di Cuneo			
	temporali	temporali con precipitaz.	grandine	grandino-sità	temporali	temporali con precipitaz.	grandine	grandino-sità
36	1.37	1.27	0.152	12.0	0.92	0.83	0.085	10.2
37	1.05	0.96	0.067	7.0	0.63	0.55	0.084	15.2
38	0.84	0.72	0.040	5.6	0.17	0.16	0.025	15.6
39	0.83	0.77	0.111	14.5	0.40	0.34	0.026	7.5
40	0.79	0.72	0.194	27.0	0.29	0.24	0.091	37.9
41	0.95	0.88	0.302	34.5	0.35	0.35	0.125	35.7
42	0.33	0.33	0.145	43.5	0.11	0.11	0.050	45.7
43	0.61	0.58	0.108	20.6	0.17	0.16	0.010	6.4
44	0.13	0.12	0.065	56.1	0.03	0.03	0.000	0.0
45	0.58	0.58	0.135	23.3	0.13	0.13	0.018	13.6
46	0.06	0.05	0.017	33.9	0.00	0.00	0.000	—
47	0.03	0.03	0.021	73.3	0.00	0 00	0.000	—
48	0.35	0.33	0.116	35.1	0.06	0.04	0.000	0.0
49	0.14	0.12	0.016	13.2	0.01	0.01	0.000	0.0
50	0.14	0.13	0.041	31.6	0.00	0.00	0.000	—
51	0.03	0.03	0.008	23.1	0.00	0.00	0.000	—
52	0.02	0.02	0.000	0.0	0.00	0.00	0.000	—

« Tralasciando diverse considerazioni e determinazioni di minor conto, nonchè la enumerazione dei riguardi che si ebbero per rendere il metodo rigoroso, quanto è possibile, in una ricerca poco precisa per sua natura, come è questa; e tralasciando anche di produrre le rappresentazioni grafiche costruite coi numeri della tabella III, si dà qui soltanto un cenno di ciò che la tabella stessa esprime e che, dalle rappresentazioni grafiche, risulta evidentissimo all'occhio del lettore.

« Nella Liguria, dopo due epoche di radi temporali, dal 7 al 28 gennaio e dalla metà di febbraio ai primi di marzo, si presenta un primo periodo temporalesco sensibile, comprendente l'ultima decade di marzo e le prime due di aprile, e notevole solo per tanta grandinosità da rendere la frequenza effettiva della grandine quali pari a quella dei più importanti periodi temporaleschi che si succedono nel corso dell'anno. A questo periodo, dopo una breve sosta di una settimana (la 17ª dal 23 al 29 di aprile) o poco più, ne segue uno più importante comprendente i mesi di maggio e giugno; le settimane più degne di nota sono la 23ª (4-10 giugno), per la grande frequenza complessiva e per la grandine, e la 26ª (25 giugno-1 luglio)

notevole solo per la frequenza complessiva. Seguono poi due settimane, di debole attività temporalesca e di scarsissima grandine, corrispondenti alla prima metà di luglio ed accennanti a quel minimo di luglio che risulta tanto manifesto per l'Italia centrale e meridionale, dagli studî di Ettore Ferrari. Poi si hanno tre settimane di sensibile frequenza così per i temporali come per la grandine (16 luglio-5 agosto), e quindi, dopo una (6-12 agosto) di debole frequenza ma di non trascurabile grandinosità, si ha, fino alla 37ª (13 agosto-16 settembre), il periodo di maggior precipitazione temporalesca, sebbene di scarsa grandinosità. Nel periodo successivo continua, dopo la 38ª settimana (17-23 settembre), che segna un minimo della grandinosità, ad essere sensibile la precipitazione temporalesca fino alla 41ª (cioè fino alla metà di ottobre), e in pari tempo la grandinosità segna un rapido e notevole aumento. Dopo quest'epoca tutti i valori decrescono, un po' irregolarmente, fino a ridursi quasi nulli nella così detta estate di s. Martino che segue all'11 di novembre. Chiudono il periodo annuo i radi temporali che hanno luogo dagli ultimi giorni di novembre alla metà di dicembre. Le epoche di minima attività temporalesca sono così dal 29 di gennaio all'11 di febbraio (5ª e 6ª settimana), dal 5 al 18 di marzo (10ª e 11ª), dal 23 al 29 di aprile (17ª), dal 1° al 15 di luglio (27ª e 28ª), dal 6 al 12 di agosto (32ª), dal 12 al 25 di novembre (46ª e 47ª), e dal 17 dicembre alla fine dell'anno (51ª e 52ª).

« Nella provincia di Cuneo sono quasi assolutamente trascurabili i periodi invernali, i quali, del resto, corrispondono, per l'epoca, a quelli della Liguria, e i temporali si trovano addensati principalmente nel periodo che corre dalla seconda metà di maggio ai primi di agosto, presentando i valori maggiori della frequenza nel mese di giugno; prima di quell'epoca principale se ne presenta un'altra, specialmente notevole per la grandine, dal principio di aprile a poco dopo il 20 di questo mese, e presentante un massimo di frequenza e di grandinosità nella 16ª settimana (16-22 aprile); e all'epoca principale ne seguono due altre, delle quali una, con poca grandine, ha la sua massima attività tra la fine di agosto e il principio di settembre (35ª settimana), e la seconda, di temporali meno frequenti ma più grandinosi, nella prima metà di ottobre. È degna di nota, per la provincia di Cuneo, la 23ª settimana (4-10 giugno) la quale per otto anni consecutivi presentò un massimo di frequenza rispetto alle due settimane laterali, e solo in uno (il 1880) ebbe una frequenza un po' minore di quella della 22ª per i temporali e un po' maggiore per la grandine; i valori ottenuti per la 23ª sono più grandi di tutti quelli delle altre settimane, ed esprimono che in media il territorio di Cuneo viene in quell'epoca visitato dai temporali con tal frequenza, da equivalere al fatto che ogni punto venga colpito più di due volte da temporali con pioggia, e ben più della metà del territorio venga coperto dalla grandine. Anche la 26ª settimana, corrispondente alla fine di giugno; è notevole

per la frequenza dei temporali; e ad essa segue, solo leggermente accennato e limitato alla prima settimana di luglio, il minimo che assai marcato compare in Liguria e che, come già si disse, è caratteristico per tutta l'Italia propriamente peninsulare e per le isole.

« Inoltre, mentre nella Liguria la grandine ha presso a poco la medesima frequenza nella prima e nella seconda metà dell'anno, per la provincia di Cuneo è sensibilmente più frequente nella prima metà.

« Si noti ancora che in Liguria si presentano nell'estate (dalla fine di giugno fin quasi alla fine di agosto) in gran numero temporali senza precipitazione, mentre nella provincia di Cuneo la frequenza relativa di questi è più costante nel corso dell'anno. L'epoca in cui essi sono più rari, o, in altri termini, in cui i temporali dànno più facilmente precipitazione, è dalla fine di agosto alla fine dell'anno, per entrambe le regioni.

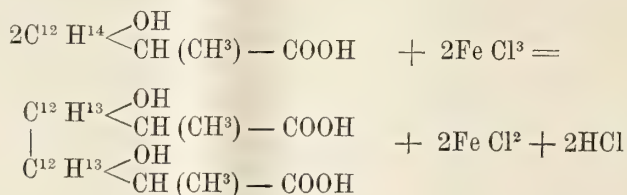
« E da ultimo si osservi che la grandinosità relativa ha, malgrado la grande diversità nella ripartizione annua dei temporali, un andamento abbastanza simile in Ligura e nelle campagne di Cuneo; per non dire dei gruppi estremi, per i quali i valori della grandinosità sono poco sicuri, essa è molto forte in primavera e va decrescendo durante il principio dell'estate fino ad un notevole minimo che si presenta in principio di luglio; cresce poi e si mantiene abbastanza alta nella seconda metà di luglio e nel principio di agosto, riprende quindi valori molto bassi fino alla seconda metà di settembre, e sale da ultimo ancora a valori sensibilmente alti in corrispondenza dell'interessante periodo temporalesco che si presenta in ottobre intorno alla 41ª settimana. Le diversità nei valori della grandinosità sono maggiori per la Liguria, cosicchè per questa regione sono più spiccati i tre massimi ora detti e i due minimi che li separano; e le notevoli e brusche variazioni dei successivi valori settimanali sono in gran parte da attribuirsi alla brevità del tempo considerato, e si può pertanto ragionevolmente ritenere che in avvenire si possa arrivare a una buona conoscenza dell'andamento della grandinosità.

« La presente Nota deve considerarsi come un saggio delle ricerche, già bene inoltrate, che si vanno facendo nell'Ufficio Centrale di Meteorologia, per tutto il Regno; e come una base per altre ricerche da compiersi, già in parte avviate e riguardanti specialmente il pericolo che la grandine presenta per l'agricoltura ».

Chimica. — *Sugli acidi Di-santonosi.* Nota preliminare di AMERICO ANDREOCCI, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

« In una mia Nota (¹) comunicai come per l'azione del cloruro ferrico l'acido destro-santonoso si trasformia nell'acido di-santonoso, secondo la seguente equazione:

$$2C^{12}H^{14}{<}{OH \atop CH(CH^3)-COOH} + 2Fe\,Cl^3 =$$

$$\begin{matrix} C^{12}H^{13}{<}{OH \atop CH(CH^3)-COOH} \\ | \\ C^{12}H^{13}{<}{OH \atop CH(CH^3)-COOH} \end{matrix} + 2Fe\,Cl^2 + 2HCl$$

analogamente alla condensazione di alcuni fenoli e naftoli nei corrispondenti difenoli e dinaftoli, per eliminazione dell'idrogeno mediante il cloruro ferrico.

« Avendo più tardi ottenuto l'acido levo- e l'acido desmotropo-santonoso ho voluto pure studiare su questi e sull'acido racemo-santonoso l'azione ossidante del sale ferrico.

« Riassumo qui brevemente i risultati delle mie ricerche riservandomi di esporli dettagliatamente nella mia Memoria: *Sulla costituzione degli acidi santonosi*, che fra poco verrà pubblicata.

« Ho preparato gli acidi: levo, desmotropo e racemo-di-santonosi disciogliendo i corrispondenti acidi santonosi (p. 1) nell'acido acetico bollente al 40 % (p. 35) ed aggiungendo alla soluzione, mantenuta sempre in ebullizione, poco a poco, il cloruro ferrico (p. 1,5) disciolto nell'acqua (p. 5). Il liquido si colora in rosso e dopo pochi minuti depone il prodotto di condensazione in piccoli cristalli leggermente colorati, che vengono lavati con acido acetico diluito e bollente e quindi purificati per ripetute cristallizzazioni dall'alcool.

« L'*acido levo-di-santonoso* corrisponde perfettamente in tutte le sue proprietà, eccettuato il senso del potere rotatorio, a quelle dell'acido destro-di-santonoso, infatti: fondono entrambi a 250°-250°,5 alterandosi alquanto, sono solubili più a caldo che a freddo nell'alcool e nell'acido acetico, poco solubili nell'etere e quasi insolubili nell'acqua.

« L'*acido racemo-di-santonoso* ottenuto dall'acido racemo-santonoso, fonde a 243°.244°; mentre dal miscuglio dei due acidi levo e destro-di-santonosi, a parti uguali, fonde fra 243°-247°, perchè contiene una certa quantità dei

(¹) *Sull'acido disantonoso.* Questi Rendiconti, vol. II, 2° sem. 1893, p. 538.

due acidi attivi non combinati, analogamente a quel che avviene nell'unione, a parti uguali, degli acidi destro e levo-santonosi (punto di fusione 179°-80°) che danno il racemo fus. fra 153° e 158° per la presenza degli acidi attivi non combinati, ma una volta fuso rifonde a 153°.

« L'acido racemo di-santonoso cristallizza in piccoli mammelloni, è solubile più a caldo che a freddo nell'alcool e nell'acido acetico, è poco solubile nell'etere ed insolubile nell'acqua. Le sue soluzioni sono inattive sulla luce polarizzata.

« L'acido *desmotropo-di-santonoso* cristallizza in laminette, fonde a 254°-255° imbrunendo leggermente; è un po' più solubile nell'alcool e nell'acido acetico, degli altri suoi isomeri.

« Nel presente quadro ho riunito i poteri rotatorî degli acidi disantonosi attivi, con quelli degli acidi santonosi, onde porre in evidenza i seguenti fatti:

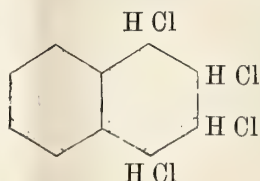
« 1.° I poteri rotatorî specifici degli acidi di-santonosi sono più elevati di quelli degli acidi santonosi corrispondenti; e se questi valori vengono moltiplicati rispettivamente per il peso molecolare, risulta che gli acidi di-santonosi hanno un potere rotatorio molecolare più del doppio degli acidi santonosi.

« 2.° La differenza fra i poteri rotatorî specifici dell'acido destro o levo-santonoso col desmotropo-santonoso è uguale a quella fra l'acido destro o levo-disantonoso coll'acido desmotropo-di-santonoso.

	Potere rotatorio specifico	Peso molecolare	Potere rotatorio molecolare
Acido destro-di-santonoso	+ 85.9	494	+ 424
» » santonoso	+ 74.6	248	+ 185
Differenza	+ 11.3		
Acido levo-di-santonoso	— 85.8	494	— 424
» » santonoso	— 74.3	248	— 184
Differenza	— 11.5		
Acido desmotropo-di-santonoso	— 64.5	494	— 319
» » santonoso	— 53.3	248	— 132
Differenza	— 11.2		

Chimica. — *Ossidazione della tetra-cloro-naftalina* (1). Nota di Demetrio Helbig presentata dal Socio S. Cannizzaro.

« Gli splendidi risultati ottenuti da Bamberger sulla ossidazione dei tetra-idro-derivati aliciclici ed aromatici della naftalina mi suggerirono l'idea di studiare l'azione dei diversi ossidanti sulla tetra-cloro-naftalina

H Cl
H Cl
H Cl
H Cl

« Essendo in questo corpo il cloro da considerarsi addizionato come l'idrogeno nei suddetti tetra-idro-derivati, ho intrapreso le mie ricerche colla speranza di poter stabilire qualche parallelismo tra il comportamento di questo composto con quello della tetra-idro-naftalina suddetta.

« La tetra-cloro-naftalina fu preparata col metodo di Fischer (2), trattando la naftalina con clorato potassico ed acido cloridrico: il prodotto grezzo fu stemprato lungamente in acqua corrente, spremuto in un torchietto, e lavato alla pompa con ligroina; quindi si cristallizzò dal benzolo, si lavò con cloroformio, e si ricristallizzò da quest'ultimo solvente, disturbando la formazione dei cristalli. Ottenni così la tetra-cloro-naftalina sotto forma di polvere cristallina bianchissima, fondente a 182°, come lo dicono Faust e Saame (3).

« Per convincermi della identità della sostanza eseguii la determinazione del cloro, che mi diede i risultati seguenti:

I. gr. 0,2778 di sostanza diedero gr. 0,5862 di Ag Cl

II. gr. 0,2861 di sostanza diedero gr. 0,6029 di Ag Cl

	calcolato per $C_{10}H_8Cl_4$	trovato	
		I	II
Cl %	52,59	52,19	52,11

Le mie ricerche si portarono sull'azione di tre ossidanti: l'acido nitrico, l'acido cromico, ed il permanganato di potassio.

Ossidazione con acido nitrico.

« Gr. 100 di tetra-cloro-naftalina, seccata all'aria, furono introdotti in

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(2) Ber. 11, 735.

(3) Lieb. Ann. 160, 66.

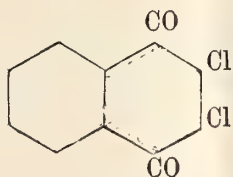
un pallone da un litro con 600 cc. di acido nitrico ($d = 1,45$) e si scaldò su b. m.

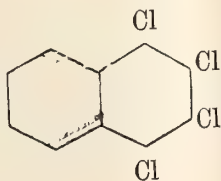
« Trascorsi pochi minuti di riscaldamento incominciò una reazione energica con abbondante sviluppo di vapori nitrosi, ed il liquido si riscaldò fortemente. Dopo circa 45 minuti la cloro-naftalina era completamente disciolta. A questo punto si sospese il riscaldamento.

« Col raffreddamento dal liquido si separò una sostanza gialla, cristallina, che si raccolse su lana di vetro e si lavò con acqua calda sino a che il filtrato non aveva più reazione acida. Si essiccò a 100°, e si cristallizzò reiterate volte dall'alcool bollente.

« Così ottenuto, il prodotto di ossidazione si presenta sotto forma di aghi giallo-oro, setacei. Fonde costantemente a 196°. È solubilissimo tanto a freddo, quanto a caldo nel benzolo e nel cloroformio; molto solubile nell'alcool bollente, poco in quello freddo; abbastanza nell'etere, nell'acido acetico e nell'acetato d'etile; finalmente negli alcali, i quali si colorano intensamente in rosso.

« Questo prodotto d'ossidazione fu identificato per l'α-dicloro-naftochinone

CO
Cl
Cl
CO

ottenuto da Graebe [1], trattando il giallo Martius (sale sodico o calcico del dinitro-α-naftol) con clorato potassico ed acido cloridrico, ed anche da Claus e Mielcke [2], ossidando con acido nitrico la tetra-cloro-naftalina *di sostituzione*

Cl
Cl
Cl
Cl

dal p. fus. 140°.

« Vi è una differenza nel punto di fusione: Graebe trovò 189°, mentrechè nella sostanza da me ottenuta, proveniente da diverse preparazioni, fonde costantemente a 196°.

(1) Lieb. Ann. 149, 14.
(2) Ber. 19, 1184.

« L'analisi elementare diede i risultati seguenti:

I. gr. 0,2874 di sostanza diedero gr. 0,5588 di CO^2 e gr. 0,0589 di H^2O.

II. gr. 0,3916 di sostanza diedero gr. 0,7583 di CO^2 e gr. 0,0691 di H^2O.

	calcolato per $C_{10}H_4Cl_2O_2$	trovato I	trovato II
C °/₀	52,86	53,02	52,80
H °/₀	1,76	2,27	1,96

« Il cloro fu determinato col metodo di Volhard:

gr. 0,3826 di sostanza corrisposero a cc. 33,5 di $AgNO^3 \frac{N}{10}$

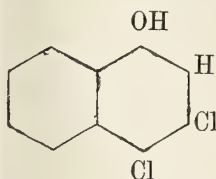
	calcolato	trovato
Cl °/₀	31,27	31,09

Ossidazione con acido cromico.

Gr. 10 di tetra-cloro-naftalina furono disciolti in 200 cc. di acido acetico al 95 °/₀: al liquido mantenuto sui 90° si aggiunse a poco per volta una soluzione di 80 gr. d'anidride cromica in 200 cc. d'acido acetico leggermente diluito. Dopo 8 ore di riscaldamento si distillò nel vuoto l'acido acetico sino a piccolo residuo, il quale si versò in acqua fredda. Precipitò una sostanza bianca, che, ben lavata alla pompa, fu trattata a caldo e ripetutamente con potassa diluita: restò un residuo, il quale disciolto nell'alcool bollente lasciò depositare col raffreddamento dei cristalli bianchi, identificati per tetracloro-naftalina inalterata.

« La soluzione alcalina sottoposta ad una corrente di anidride carbonica diede luogo ad un precipitato bianco, voluminoso, che raccolto su filtro e lavato con acqua fu ridisciolto nella barite, e da questa riprecipitato con acido cloridrico diluito. Cristallizzata finalmente dall'alcool acquoso, la sostanza si presentò sotto forma di aghi bianchi: fuse a 106°-107°, colorandosi in verdastro.

« Questo prodotto di ossidazione è il dicloro-α-naftol (134)

OH
H
Cl
Cl

già ottenuto da Cleve [1] facendo agire il cloro sull' α-naftol in soluzione acetica, e da Zincke [2] per riduzione della tricloro-α-cheto-naftalina e della tetracloro-α-cheto-naftalina.

[1] Ber. 1888, 891.
[2] Ber. 1888, 1030.

« L'analisi elementare diede i risultati seguenti:

I. gr. 0,2704 di sostanza diedero gr. 0,5587 di CO^2 e gr. 0,0780 di H^2O

II. gr. 0,2974 di sostanza diedero gr. 0,6166 di CO^2 e gr. 0,0835 di H^2O

	calcolato per $C_{10}H_6Cl_2O$	trovato I	trovato II
C °/₀	56,33	56,35	56,54
H °/₀	2,81	3,20	3,11

« La determinazione di cloro, eseguita col metodo di Carius, diede i numeri seguenti:

gr. 0,2373 di sostanza diedero gr. 0,3184 di AgCl

	calcolato per $C_{10}H_6Cl_2O$	trovato
Cl °/₀	33,33	33,62

« Per viemmeglio identificare la sostanza, ne feci l'acetilderivato, facendola bollire con cloruro d'acetile. Il derivato fuse a 73°-74°, come indica Zincke (loc. cit.), e diede all'analisi i numeri seguenti:

gr. 0,3040 di sostanza diedero gr. 0,6298 di CO^2 e gr. 0,0920 di H^2O.

	calcolato per $C_{12}H_8O_2Cl_2$	trovato
C °/₀	56,47	56,50
H °/₀	3,13	3,36

« Inoltre:

gr. 0,2890 di sostanza corrisposero a cc. 23,0 di $AgNO^3 \frac{N}{10}$

	calcolato	trovato
Cl °/₀	27,87	28,02

« Le soluzioni alcaline, specie quella ammoniacale, del naftolo, a contatto dell'aria per 24 ore, danno luogo alla formazione d'una sostanza polverosa, d'un bell'azzurro, avente riflessi metallici quando è secca, solubile nel benzolo, nel cloroformio e nell'acetato d'etile, insolubile nell'alcool, il quale la riprecipita dalle soluzioni nei primi tre solventi. Mi riserbo di studiare questa sostanza.

« L'ossidazione della tetra-cloro-naftalina con permanganato potassico sinora non mi ha dato risultati soddisfacenti.

« In una prossima pubblicazione spero di comunicare i risultati di ricerche eseguite cogli altri ossidanti ».

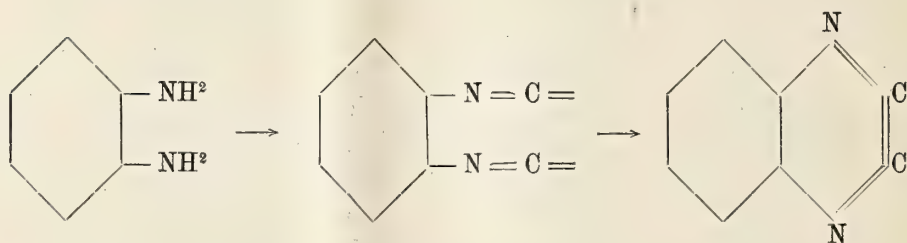
Chimica. — *Azione del cloroformio e della potassa sulle diammine. — Nuova sintesi della benzo-gliossalina.* Nota di G. Grassi-Cristaldi e G. Lambardi, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

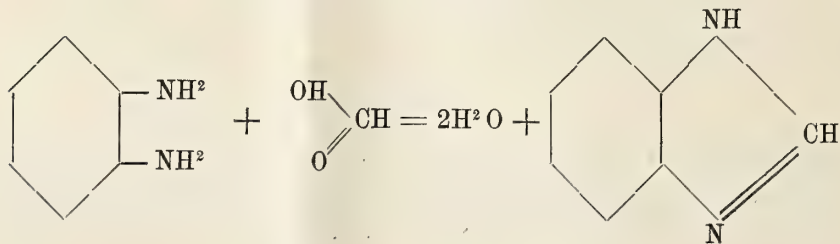
« Finora l'azione del cloroformio e della potassa alcoolica sulle ammine

alifatiche ed aromatiche (reazione di Hofmann) fu applicata solo sulle monoammine; alle poliammine fu estesa come diagnosi per la presenza degli ammidogeni, ma nulla si fece per indagare se tutti o solo parzialmente si trasformano in aggruppamenti isonitrilici.

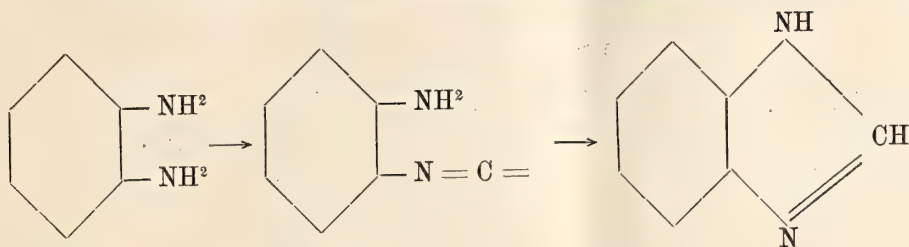
« Hofmann applicò la sua reazione a una diammina, ma non potè studiare il prodotto formatosi per deficienza di materia prima. Noi abbiamo estesa per ora la detta reazione alle orto-para e meta-fenilendiammine, riserbandoci di pubblicare i risultati che otterremo dalle altre poliammine aromatiche ed alifatiche.

« Facendo agire il cloroformio e la potassa in soluzione alcoolica sulla orto-fenilen-diammina, ci si aspettava la trasformazione di ambedue gli ammidogeni in due aggruppamenti isonitrilici, i quali, per la presenza di due carboni bivalenti vicini (1) ci dovevano condurre ad un prodotto di condensazione, di costituzione simile alla chinossalina, da cui doveva differire per due atomi d'idrogeno

$$C_6H_4\begin{cases}-NH^2\\-NH^2\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}-N=C=\\-N=C=\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}N=C\\N=C\end{cases}$$

« Lo studio da noi fatto mostra invece, che dei due ammidogeni, solo uno si trasforma dando luogo ad un isonitrile, che si manifesta per l'odore caratteristico, odore però che finisce per scomparire per la trasformazione di questo mono-isonitrile in un prodotto di condensazione, la benzo-gliossalina, ottenuta la prima volta da Wundt (2) per azione dell'acido formico sulla orto-fenilendiammina

$$C_6H_4\begin{cases}-NH^2\\-NH^2\end{cases} + \begin{matrix}OH\\O\end{matrix}\!\!>CH = 2H^2O + C_6H_4\begin{cases}NH\\N\end{cases}\!\!>CH$$

(1) Nef. A. 270, pag. 267.
(2) Wundt Ber. XI, 82 *b*.

« Nel caso nostro si hanno le seguenti trasformazioni

$$C_6H_4(NH^2)_2 \longrightarrow C_6H_4(NH^2)(N{=}C{=}) \longrightarrow C_6H_4\langle {}^{NH}_{N} \rangle CH$$

« Una miscela di gr. 44 di cloroformio e gr. 50 di potassa sciolti in 170 cm³ di alcool, fu fatta agire sopra gr. 20 di cloridrato della orto-fenilendiammina. Si ebbe considerevole sviluppo di calore ed una viva reazione, nel mentre che si avvertiva subito l'odore caratteristico degli isonitrili.

« Si moderò la reazione raffreddando convenientemente, e si tenne in seguito il tutto alla temperatura di 50° per circa un'ora. Nel frattempo l'odore isonitrilico scomparve. Si distillarono l'alcool ed il cloroformio a pressione ridotta, ed il residuo bruno ripreso con acqua fu sottoposto alla distillazione in corrente di vapore: passarono solo piccolissime quantità di una sostanza bianca, che trascurammo per la sua esiguità.

« La soluzione alcalina filtrata venne agitata ripetute volte con etere e questo, distillato, fornì una sostanza bruna vischiosa che poco dopo si rapprese in una massa solida, cristallina. Ripresa varie volte con etere anidro per asportare buona parte della resina, restò la sostanza colorata in giallo bruno. L'etere ridistillato lasciò indietro tutta la resina e dell'altra sostanza che si ripristinò trattando di nuovo con poco etere.

« Tutte le porzioni riunite furono sciolte nella più piccola quantità possibile d'acqua bollente, da cui per raffreddamento si separò il prodotto in aghetti colorati leggermente in giallo fondenti a 168°.

« Per avere la sostanza perfettamente pura, il miglior modo è di distillarla a pressione ridotta: distilla allora senza alterarsi e quasi incolora. Ricristallizzata dall'acqua o dall'alcool è perfettamente bianca e fonde a 170° (1).

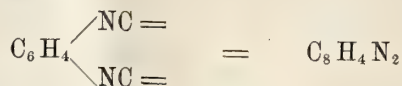
« All'analisi diede i seguenti risultati che conducono alla formula $C_7H_6N_2$.
gr. 0,2406 di sostanza diedero gr. 0,6291 di CO^2 e gr. 0,1165 di H^2O.
gr. 0,2399 diedero cc. 51 di azoto alla temperatura di 24°,5 ed alla pressione di mm. 756,5 (corretta).

« Da cui per il percentuale si ha:

	calcolato per $C_7H_6N_2$	trovato
C =	71,19	71,31
H =	5,08	5,38
N =	23,73	23,33

(1) Wundt trovò invece che fonde a 167°.

mentre che per la formula

$$C_6H_4\begin{matrix}\diagup NC= \\ \diagdown NC=\end{matrix} \quad = \quad C_8H_4N_2$$

si avrebbe il percentuale:

$$\begin{aligned} C &= 75,00 \\ H &= 3,12 \\ N &= 21,87 \end{aligned}$$

« La sostanza, come si è detto, è solubile nell'acqua più a caldo che a freddo, e ci servimmo di questo solvente per la sua purificazione. È molto solubile nell' alcool, poco nell' etere e quasi insolubile nel benzolo e nella ligroina.

« Il cloridrato si ottiene sciogliendo la base in una soluzione alcoolica di acido cloridrico, e precipitando con etere anidro. Il precipitato raccolto su filtro e lavato con etere si presenta con aspetto serico: è solubilissimo nell'acqua e nell'alcool. Non si sottopose all'analisi perchè credemmo più conveniente, per l'identificazione della base, lo studio del cloroplatinato.

« Questo infatti è caratteristico, perchè cristallizza con due molecole di acqua di cristallizzazione che perde facilmente a 100°. Si ottenne trattando la soluzione acquosa del cloridrato, ottenuto nel modo suddetto, con una soluzione concentrata di cloruro di platino. Si formò un precipitato giallo-arancio che raccolto su filtro alla pompa e sciolto nell'acqua calda, si separò da questa per raffreddamento sotto forma di piccoli aghetti.

« Per la determinazione dell'acqua di cristallizzazione si asciugò comprimendolo fra carta: si pesò, si seccò a 100° e se ne determinò la perdita di peso:

gr. 0,4075 di cloro-platinato perdettero, seccati a 100°, gr. 0,0218 di acqua calcolato gr. 0,0215.

« All'analisi si ebbero i seguenti risultati:

gr. 0,3857 previamente seccati a 100° diedero gr. 0,1163 di platino da cui:

« In 100 parti:

calcolato	trovato
30,07	30,15

gr. 0,4401 diedero gr. 0,4210 di CO^2 e gr. 0,0976 di H^2O

« Da cui:

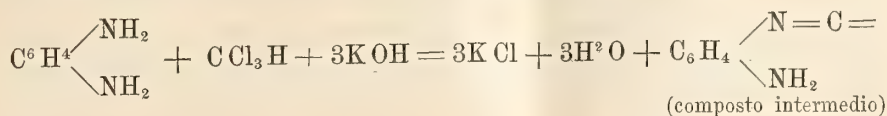
	calcolato	trovato
C =	26,04	26,08
H =	2,17	2,46

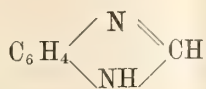
« Quindi, nessun dubbio che la base da noi studiata sia la benzogliossalina.

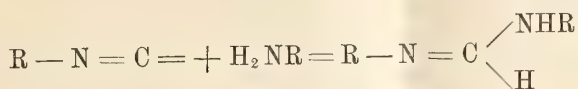
« Il fatto pertanto che durante l'azione del cloroformio e potassa alcoolica sulla orto-fenilen-diammina si rende manifesto l'odore isonitrilico e scom-

pare a reazione finita, ci dice chiaramente che la detta reazione avviene, generandosi dapprima un composto isonitrilico intermedio:

$$C^6H^4\begin{matrix}/NH_2\\ \backslash NH_2\end{matrix} + CCl_3H + 3KOH = 3KCl + 3H^2O + C_6H_4\begin{matrix}/N=C=\\ \backslash NH_2\end{matrix}$$

(composto intermedio)

il quale per la vicinanza dell' NH^2 al carbonio isonitrilico bivalente, dà luogo alla seguente condensazione:

$$C_6H_4\begin{matrix}/N\diagdown\\ \backslash NH/\end{matrix}CH$$

simile a quella che avviene tra gli isonitrili e le ammine primarie:

$$R-N=C=+H_2NR=R-N=C\begin{matrix}/NHR\\ \backslash H\end{matrix}$$

La meta-fenilen-diammina si fece reagire con cloroformio e potassa alcoolica nelle identiche proporzioni descritte per l'orto-fenilen-diammina. L'odore isonitrilico si manifestò molto lievemente.

« Dopo svaporamento del cloroformio e dell'alcool restò un residuo bruno, il quale fu ripreso con acqua che ne sciolse una gran parte. Si agitò allora il tutto con etere: questo si colorò fortemente in bruno: la porzione che non s'era disciolta nell'acqua rimase in gran parte insolubile anche nell'etere. Questa porzione era della meta-fenilen-diammina inquinata da sostanze resinose e da sale potassico.

« Anche l'estratto etereo conteneva della meta-fenilen-diammina che si eliminò trattandolo con una soluzione diluita di HCl (120 gr. di HCl di densità 1,15 in un litro d'acqua).

« La soluzione eterea leggermente colorata in giallo, lasciò, previa distillazione dell'etere, un piccolissimo residuo costituito da una sostanza giallo-bruna, solida che si carbonizzava prima di fondere.

« Visto il rendimento talmente scarso che, anche impiegando forte quantità di meta-fenilen-diammina, difficilmente avremmo potuto procurarcene tanta da poterne fare l'analisi, credemmo più conveniente di passare allo studio della para-fenilen-diammina.

« Facendo agire nelle solite proporzioni cloroformio e potassa sopra questa base, si manifestò abbastanza sensibilmente l'odore d'isonitrile che, come per l'orto-fenilen-diammina, finisce collo scomparire al termine della reazione.

« Evaporati cloroformio ed alcool, fu ripreso il residuo con acqua ed estratto con etere. Anche qui come per la meta-fenilen-diammina si ebbe una sostanza bruna-insolubile nell'acqua, da cui si riuscì ad ottenere per trattamento con acido cloridrico in soluzione alcoolica e successiva precipitazione con etere il cloridrato della base primitiva. L'estratto etereo dapprima colorato in bruno, per trattamento con acido cloridrico diluito restò solo leggermente colorato in giallo. Evaporato l'etere, si ebbe per residuo una sostanza giallo-bruna senza odore isonitrilico, che verso 120° imbrunisce fortemente e verso 127° fonde dando un liquido bruno.

« Essa è solubile nell'etere, nell'alcool, ed insolubile nell'acqua e nella ligroina.

« Il rendimento, anche in questo caso, è molto scarso, ma sempre superiore a quello fornito dalla meta-fenilen-diammina. Si riuscì a cristallizzarla dall'etere con molta difficoltà e restò sempre colorata in bruno: però il punto di fusione s'innalzò verso 160°. Ha comportamento neutro, in quanto che non si scioglie nè nelle basi, nè negli acidi.

« All'analisi diede i seguenti resultati;

$$C = 73{,}08$$
$$H = 3{,}78$$
$$N = 19{,}14$$

Se fosse il diisonitrile

dovrebbe dare:

$$C = 75{,}00$$
$$H = 3{,}12$$
$$N = 21{,}87$$

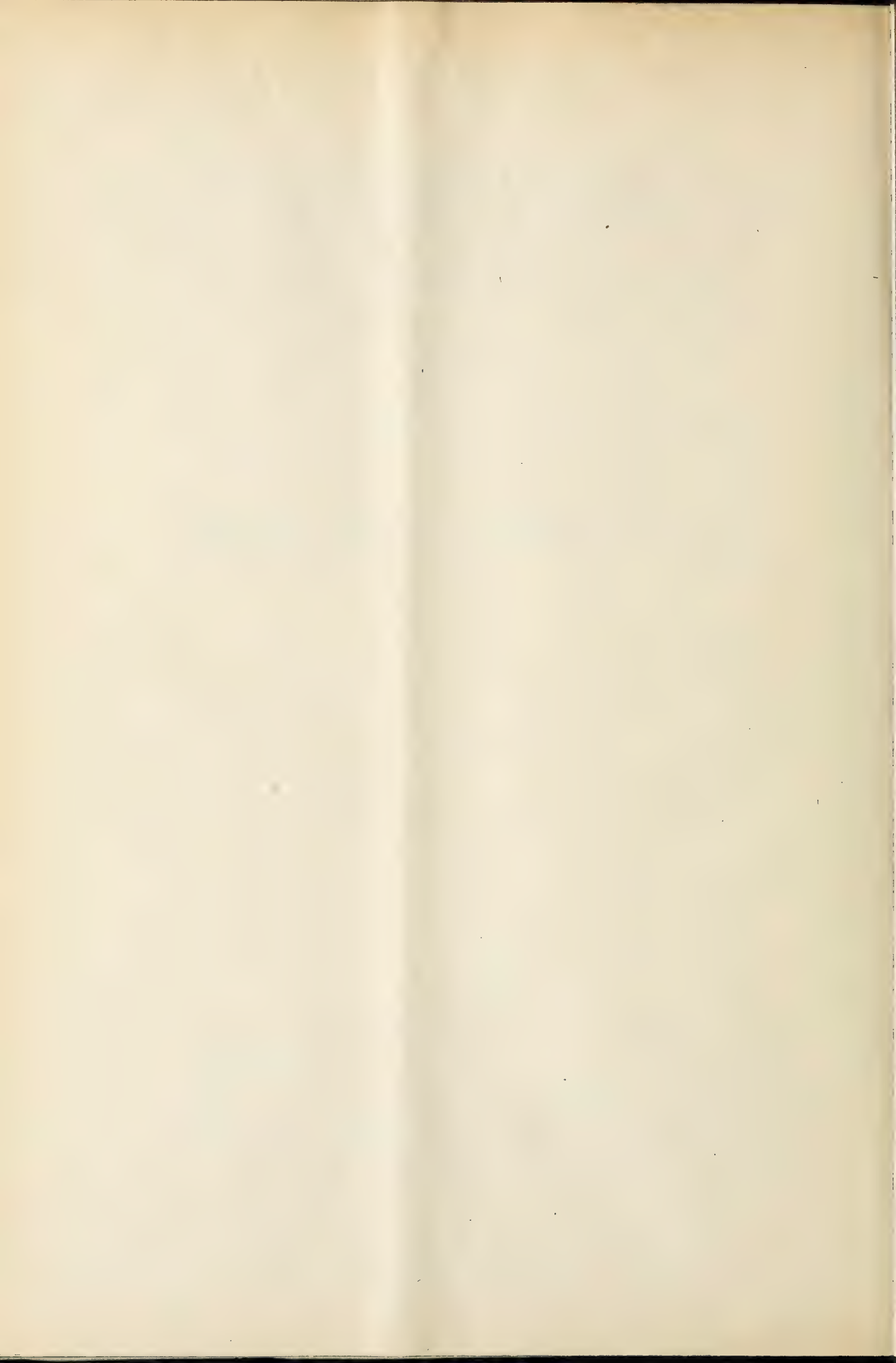
Come è facile rilevare da questi dati, la sostanza da noi analizzata non era sufficientemente pura.

« Per ora abbiamo creduto conveniente di pubblicare questi primi risultati, visto lo scarso rendimento e la difficoltà di ottenere pura la sostanza. Ci proponiamo di studiare le condizioni migliori per avere un buon rendimento, colla speranza di ottenere dalla sostanza pura resultati più attendibili.

« Fin da ora però crediamo di poter accertare che realmente il diisonitrile si forma [1]

Ciò è per noi di somma importanza, perchè serve ad avvalorare la interpetrazione che abbiamo dato alla genesi della benzo-gliossalina ».

P. B.

(1) Dall'assenza di odore isonitrilico e dal punto di fusione relativamente elevato, argomentiamo che la sostanza possa essere polimerizzata. Cosa che del resto accade per altri isonitrili.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 marzo 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Biografia. — *Notizie sulla vita e sulle opere del Socio straniero* Arturo Cayley. Nota del Socio F. Brioschi.

« Nel compiere il debito doloroso di annunciare all'Accademia la perdita del suo illustre Socio Straniero Arturo Cayley, credo interpretare il desiderio dei Colleghi e di tutti i cultori delle matematiche discipline, aggiungendo alcune notizie sulla vita e sulle opere del grande matematico inglese [1].

« Arturo Cayley nacque il 16 agosto 1821 a Richmond nella Contea di Surrey. Suo padre era socio della casa mercantile Thornton, Melville e Cayley, commercianti in Pietroburgo. Arturo ebbe due fratelli, il maggiore morto nell'infanzia, l'altro valente nella letteratura italiana e traduttore di Dante.

« Nell'anno 1829 la famiglia Cayley abbandonò la Russia, e prese domicilio a Blackheath presso Londra. Ivi Arturo incominciò gli studi in una scuola privata, ed alla età di 14 anni fu mandato al King's College di Londra per continuarli. Il direttore del Collegio riconosciuta dopo breve tempo l'attitudine singolare del giovane allievo agli studi matematici, consigliava al padre di fargli abbandonare la carriera commerciale per seguire i corsi dell'Università di Cambridge, ed il consiglio essendo stato accolto, Arturo era ammesso nel Trinity-College all'età inusitata di diciassette anni. Ne esciva nel 1842 coi massimi gradi ottenuti negli studi classici e nei matematici; che se, (leggesi in una sua biografia) il nome di Cayley non si ricorda fra quei giovani che si illustrarono nella ginnastica, pure è noto che egli fu uno dei più attivi fra i componenti del club Alpino, e si mantenne tale per lunghi anni. Le prove felici date da Cayley in questo periodo, valsero a lui nello stesso anno 1842

[1] Di alcune notizie sulla vita di Cayley sono debitore alla cortesia del prof. Foster di Cambridge, Socio straniero di questa Accademia. Altre le conobbi leggendo un ottimo scritto del prof. Salmon pubblicato nel numero 20 settembre 1883 del periodico inglese *Nature*.

d'essere eletto Fellow in quel Trinity-College; dal quale era appena uscito; posizione la quale non potè occupare che per alcuni anni, non avendo voluto prendere gli ordini sacri. Rendevasi perciò necessario al Cayley di scegliere una professione più rimunerativa di quella delle matematiche, ed infatti tosto dopo ottenuto il grado di *Master*, egli entrava nello studio dell'eminente notajo (*conveyancer*) signor Cristie di Londra. Raccontasi che nel domandare questo impiego il Cayley non fece parola della sua splendida carriera universitaria, e che il signor Cristie fu profondamente maravigliato quando conobbe la vera situazione del richiedente. Il Cayley divenne ben presto l'alunno favorito dello studio Cristie, e vide la sua posizione finanziaria stabilita sopra solide basi. Rimase in questo studio per quattordici anni, dall'anno 1849 al 1863; ed è invero degno di nota, che la parte dell'opera scientifica del Cayley compiuta in questo periodo di tempo sarebbe sufficiente da sola a rendere il suo nome imperituro.

« Nell'anno 1863 una intelligente e benefica signora, Lady Sadler, lasciava morendo una cospicua somma per la istituzione presso la Università di Cambridge di una cattedra, il titolare della quale doveva istruire nelle matematiche pure ed applicare il proprio ingegno al progresso della scienza. L'Università di Cambridge fu ben lieta di offrire la cattedra a Cayley, ed egli non dubitò di abbandonare la posizione sempre più lucrativa che teneva in Londra, per dedicarsi completamente alle matematiche. Nello stesso anno 1863 prese moglie, e venne in Cambridge ad abitare quella modesta ma pur ridente casa sulla sponda del fiume Cam, ove alcuni fra noi lo visitarono ed ebbero amichevole accoglienza.

« Moriva il dì 26 dello scorso mese di gennaio, sofferente da qualche tempo di una malattia di vescica. Lascia la vedova e due figli che egli amava assai, e dai quali era contraccambiato di pari affetto. Le più importanti istituzioni scientifiche inglesi si fecero rappresentare ai suoi funebri da uomini eminenti.

« Il motto prediletto dal Cayley — *potius esse quam videri* — dà una immagine chiara delle sue qualità morali; ma per giudicare di esse nei rapporti con altri Geometri, nessuna migliore testimonianza io potrei dare che ripetendo qui alcune parole pronunciate dal signor Hermite nella seduta del 4 febbraio scorso all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia.

« J'ai eu une part dans quelques-unes des recherches de Cayley; les mêmes « questions nous avaient rapprochés au commencement de notre carrière et « le souvenir me restera à jamais de la bonté, de sa grande simplicité, de « son entier dèvoument à la Science. Je joins ce souvenir, qui m'est bien « cher, à mes douloureux regrets, à l'hommage que j'adresse à sa mémoire ».

« L'opera scientifica di Cayley è così prodigiosa, così vasta, che il riassumerla non è facile. Trattasi di circa ottocento memorie e di un libro, un

trattato sulla teoria delle funzioni elittiche. I Collected Mathematical Papers, il più degno monumentò che i Sindaci dell'Università di Cambridge potessero elevare alla memoria dell'illustre Geometra, raggiungono già il numero di sette volumi, ed altri cinque saranno almeno necessari per raccogliere gli scritti del Cayley. E per quanto sia vero che il Cayley in questi scritti è ritornato più e più volte sullo stesso argomento, e per quanto nel metodo, nella forma, non esista differenza fra essi, giacchè questo metodo, questa forma è tutta sua del Cayley ed i risultati ottenuti ne dimostrano la singolare potenza; pure una classificazione è necessaria prima di entrare nell'esame dei medesimi. Classificazione opportuna a me pare questa, dapprima i lavori che si riferiscono alla teoria delle forme; poi quelli relativi alle funzioni elittiche ed alle iperelittiche; in terzo luogo i lavori geometrici; infine quelli di meccanica razionale. Sfuggono bensì a questa classificazione alcuni pochi lavori di analisi, integrali definiti, integrazione di equazioni; ma l'importanza loro non può porsi a confronto con quella dei moltissimi compresi in quelle quattro classi. Il tempo poi a sua volta, come per l'individuo, così per le manifestazioni del pensiero, si incarica di distinguere quanto vi ha di più o di meno vitale.

« La prima delle indicate classi si estende a tutti i lavori del Cayley sui determinanti, sulle trasformazioni lineari, sugli iperdeterminanti, sulle quantiche, ed in complesso sopra gli argomenti che oggi si comprendono nella denominazione di teoria delle forme. Il primo lavoro del Cayley è dell'anno 1841, mentre era ancora allievo nel Trinity-College. Il titolo di esso è geometrico: *Sopra un teorema nella Geometria di posizione*, ma il teorema riguarda la moltiplicazione dei determinanti e la ricerca geometrica, cioè la relazione esistente fra le distanze di cinque punti nello spazio, è una applicazione di quel teorema. Appare già in questo giovanile scritto quella forma elegante, simmetrica, che è la predominante caratteristica di ciascun lavoro del Cayley.

« La teorica dei determinanti occupò a più riprese la mente del Cayley, ed egli pel primo fece conoscere le proprietà di quella classe speciale di determinanti da lui denominati, gobbi, e gobbi simmetrici ed applicò con molto successo quelle proprietà al problema della trasformazione delle funzioni quadratiche *in sè stesse* per mezzo di sostituzioni lineari.

« Dalle due memorie degli anni 1845, 1846, che portano il titolo *Sulla teoria delle sostituzioni lineari* pubblicate dapprima nel Giornale di matematiche di Cambridge e riprodotte nel giornale di Crelle col titolo *Memoria sopra gli Iperdeterminanti*, ebbero principio quelle ricerche sulle proprietà *invariantive* di alcune funzioni algebriche, che di tanto allargarono il dominio dell'Algebra da indurre il prof. Salmon a scrivere: essere da questa scoperta dal Cayley che ha origine la nuova Algebra.

« Se non che quando il Salmon esprimeva questo giudizio tanto conforme al vero, il concetto di *invarianza* non erasi ancora esteso ad altre

parti della analisi, mentre oggi può dirsi che pressochè tutti i progressi fatti in questa seconda metà del secolo in ogni ramo dell'analisi, furono dovuti alla estensione data a quel concetto.

« Il Cayley nelle citate memorie ricorda come il Boole avesse già riconosciuto che il discriminante è un invariante, ed avesse calcolato pel primo l'invariante cubico di una forma biquadratica; come inoltre alcune proprietà invariantive delle forme ternarie cubiche fossero state stabilite da Hesse.

« La teoria degli iperdeterminanti richiamò altre volte l'attenzione di Cayley, ma fu specialmente nell'anno 1854 che per opera sua e di altri geometri, che verrò nominando, la teoria delle forme assunse carattere di speciale disciplina. Addottate dal Cayley le denominazioni di covarianti e di invarianti introdotte nell'Algebra dal prof. Sylvester, il primo in una memoria del 1854 stabiliva le equazioni differenziali alle quali devono soddisfare quelle forme algebriche; ed in questo stesso anno incominciava quella serie di memorie col titolo comune *Sopra le quantiche* le quali costituiscono da sole un trattato sull'argomento. La parte che spetta ai due eminenti geometri Sylvester ed Hermite nella creazione di una teoria così feconda, i lavori contemporanei od appena successivi di Salmon e di Aronhold, la contribuzione di altri geometri, trovansi con molta cura ed erudizione esposte in una recente pubblicazione (1) ed il ritornare su di esse mi allontanerebbe troppo dal tema speciale. Una sola osservazione parmi opportuna aggiungere, ed è che i lavori del Cayley e del Sylvester di quel periodo di tempo si risentono delle frequenti orali comunicazioni dei due giovani matematici residenti l'uno e l'altro in Londra; e per ciò non è agevole il riconoscere a quale di essi debbasi in qualche caso la prima ispirazione. Le scoperte: della legge di reciprocità, dell'invariante del diciottesimo grado della quintica, dei criteri relativi alle radici reali od immaginarie determinati da invarianti, dei covarianti associati, rimangono interamente dovute ad Hermite.

« Fondata la teoria, l'applicazione di essa a vari problemi dell'algebra non ebbe ritardo. Il problema della eliminazione, delle funzioni simmetriche, quello delle funzioni di Sturm, infine, il più importante, quello della trasformazione delle equazioni algebriche, attirarono tosto l'attenzione del Cayley e di altri geometri.

« Fu nell'anno 1858 che Hermite fece conoscere la formola generale di trasformazione delle equazioni algebriche, per la quale i coefficienti dell'equazione trasformata risultano invarianti della primitiva equazione. Il Cayley, addottando quella formola, la applicava con ottimo successo alle equazioni di terzo, quarto, quinto grado, dapprima nei suoi quattro lavori col titolo: *Sulla trasformazione di Tschirnausen;* quindi in altri: *Sulla trasformazione di Jerrard.*

(1) Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung. Bd. 1. Meyer, *Rapporto sui progressi della teoria degli invarianti.*

« Il problema della determinazione del numero degli invarianti, e dei covarianti indipendenti per una data forma binaria, fu oggetto di lunga e ripetuta meditazione pel Cayley; e sebbene egli non sia riuscito a risolverlo nella sua generalità, pure le relative ricerche sulla *Partizione dei numeri* sono di grande valore. Questo problema stava a lui così a cuore, che allorquando il Gordan dimostrò che il numero di quelle forme era finito, e ne calcolò il numero stesso per le forme dei primi gradi, il Cayley riferì questo importante risultato alla British Association radunatasi in Edimburgo nel 1871 e vi dedicò la nona memoria sulle *Quantiche;* e più di recente, nel 1889, il lavoro di Hilbert sullo stesso argomento lo condusse ad occuparsene di nuovo nel Volume 34° dei Math. Annalen.

« La formola di eliminazione o quella pel risultante di due forme binarie, che oramai è adottata nell'analisi sotto il nome di formola di Cayley, alla sua importanza come risultato, altra ne acquistò per avere essa condotto, per opera di Gordan, alla calcolazione del risultante in funzione di invarianti simultanei.

« La nuova Algebra creata specialmente per opera del Cayley ha già preso possesso di tanti rami delle matematiche, che se l'attività del suo genio si fosse anche arrestata quì, l'ammirazione dei geometri gli era dovuta.

« Ma la teoria delle funzioni elittiche dapprima, quella delle iperelittiche, più tardi, ebbero da lui nuova luce. Nei primi lavori sulle funzioni elittiche, benchè pregevoli, specialmente quelli relativi alla equazione differenziale di Jacobi per la trasformazione, pure l'impronta originale del Cayley non appare chiara, quanto nel lavoro del 1858 che ha per titolo: *Sur quelques formules pour la transformation des fonctions elliptiques.* Colla nota trasformazione dovuta ad Hermite e colle formole contenute in questo scritto, tutti gli elementi pel passaggio dall'integrale di Jacobi e di Abel a quello di Weierstrass sono determinati. La trasformazione delle funzioni elittiche fu più volte considerata dal Cayley, ed alle sue prime Memorie pubblicate nelle Philosophical Transactions degli anni 1874, 1878, fa seguito la più recente che trovasi nei Volumi IX e X dell'American Journal of Mathematics (1887, 1888). Nelle une e nell'altra egli prende le mosse dalla formola di trasformazione di Jacobi e con quella abilità di calcolazione che era a lui particolare, presenta sotto nuove forme le equazioni modulari, e rileva le proprietà di alcune curve da esse rappresentate.

« Nell'inverno dell'anno 1882 il Cayley fu invitato a dare una serie di letture nella Università Johns Hopkins di Baltimora, ed avendo egli accettato, sviluppò nelle medesime da un nuovo punto di vista la teoria delle funzioni Abeliane di Clebsch e Gordan pubblicata nel 1866; le quali letture trovansi raccolte nei Vol. V e VII dell'American Journal. È questo, a mio avviso, uno dei lavori più meditati del Cayley, sebbene lo studio di esso presenti qualche difficoltà per una notazione alquanto complicata.

« Allo studio delle proprietà delle funzioni thèta dedicava il Cayley una serie di lavori. Incominciati nel 1877 colla memoria *Sulle funzioni thèta doppie in relazione ad una superficie a sedici nodi;* negli anni 1879, 1880 comparvero: nelle Philosophical Transactions, la importante memoria *Sulle singole e doppie funzioni thèta*, ed in due volumi del giornale di matematiche di Borchardt quelle *Sulle doppie e sulle triple funzioni thèta.*

« È inutile il ripetere che il metodo originale del Cayley di considerare i vari aspetti dei problemi da lui studiati predomina in tutti quegli scritti; che se ciò deve ascriversi a merito suo, è però d'altra parte una conseguenza di questo fatto la non corrispondente influenza che essi ebbero nel movimento normale di questa parte delle matematiche.

« Coi lavori citati non si compie certamente la indicazione di tutta l'opera del Cayley sulle funzioni elittiche, o sulle iperelittiche. Ma pur rimanendo nei limiti che mi sono prefisso, non devesi dimenticare l'unico libro da lui pubblicato, il *Treatise of Elliptic Functions* edito nel 1876. In questo libro egli addotta la notazione dei *Fundamenta nova* di Jacobi ed espone le varie parti della non facile teoria con chiarezza singolare, con rigore di dimostrazione, da rendere il trattato di vera utilità per coloro che si iniziano allo studio della medesima. Al momento della sua pubblicazione, dieci anni prima del grande trattato di Halphen, il Cayley, col suo libro, diede un ottimo esempio.

« Esaminando i sette volumi dei Mathematical Papers finora pubblicati, ed i lavori del Cayley che comporranno gli altri cinque, appare chiaro che i problemi geometrici esercitavano su di lui una grande attrattiva. Può anzi dirsi che per lui, come per qualche altro fra i più eminenti geometri, a ciascun nuovo risultato ottenuto nella analisi rispondesse un nuovo risultato geometrico, e reciprocamente. E ciò spiega per quali ragioni sopra una stessa quistione geometrica egli ritornasse più volte, e vi ritornasse appunto quando, scoperte analitiche di sorgente specialmente propria, od anche d'altri, prestavano a lui uno strumento più potente di indagine.

« Nell'anno 1844 egli pubblica una prima memoria *Sulle curve piane del terzo ordine*, ed è tosto seguita da un'altra nel 1845; varie nuove proprietà di quelle curve vi sono dimostrate, ma il metodo di ricerca è indiretto. È lo studio delle forme ternarie cubiche, la scoperta dei loro invarianti, covarianti, contravarianti, che offrono i nuovi mezzi per penetrare più addentro nelle proprietà di quelle curve, ed il Cayley nella sua bella Memoria delle Philosophical Transactions della Società Reale di Londra del 1856, riprende di nuovo l'argomento, e lascia nel medesimo traccie durevoli. È infatti in questa Memoria che appare per la prima volta quella curva che porta il suo nome.

« La Memoria del 1847, *Recherches sur l'elimination et sur la théorie des courbes*, alla quale fa seguito l'altra del 1864 collo stesso titolo, sono un secondo esempio del legame che per lui esisteva fra il progresso nella

teoria delle forme e quello relativo alle proprietà degli enti geometrici; ed in quella prima memoria, di certo fra le migliori, egli stesso lo afferma colle parole: Mon but a été ici de donner une idèe précise des théorèmes à démontrer, pour former une théorie toute analytique des polaires réciproques: je n'ai fait qu'avancer ces théorèmes (sans chercher à les demontrer) pour faire voir leur liason avec la théorie de l'elimination et avec celle des hyperdéterminants; c'est à cette dernière en particulier, qu'il faut etc. etc.

« Le ricerche di Cayley sulle tangenti doppie di una quartica sono precedute dalla memoria del 1859 *Sulle tangenti doppie di una curva piana*. Già il numero di quelle tangenti era stato determinato da Plücker e da Jacobi; ed Hesse aveva trovato l'equazione del quattordicesimo ordine che sega la quartica nei punti di contatto delle sue tangenti doppie; quando il lavoro magistrale di Salmon del 1858 *On the Double Tangents to Plane Curves* (1) poneva la soluzione del problema sopra altre basi. Il Cayley nella menzionata memoria prende a trattare di nuovo il problema nella sua generalità seguendo le traccie di Salmon; e con una abilità di calcolo non superabile, giunge alla soluzione completa del problema per curve di grado qualsivoglia. Forse questo lavoro non è abbastanza conosciuto ed apprezzato, ed egli in parte vi contribuiva, abbandonando nelle sue memorie del 1882, e del 1883 *On the bitangents of a plane quartic*, il metodo precedente, per quello, speciale alle quartiche, iniziato da Riemann e sviluppato più tardi da Weber.

« Le singolarità delle curve piane, la corrispondenza di punti nelle medesime, la classificazione delle curve nello spazio, sono argomento di varie memorie del Cayley; le precipue fra le quali trovansi degnamente esaminate in una recente pubblicazione dovuta a Brill ed a Noether (2).

« Colla memoria del 1849 *Sui piani triplo-tangenti di una superficie del terzo ordine*, il Cayley dava principio alle sue ripetute ricerche sulle proprietà geometriche delle superficie. La rappresentazione analitica dei quarantacinque piani triplo-tangenti contenuta in quella memoria, iniziò altri lavori sull'argomento, specialmente in Inghilterra; e dopo il lavoro di Salmon sulla teoria delle superficie reciproche, e quello di Schläfli relativo alla classificazione delle superficie del terzo ordine, il Cayley stesso nella sua grande memoria del 1869 *A Memoir on Cubic Surfaces*, può dirsi avere esaurito, nel campo analitico, il soggetto.

« La superficie di quarto ordine di Steiner, intorno la quale scrissero importanti lavori Kummer, Weierstrass, Cremona, e Schröter; la superficie pure di quarto ordine che porta il nome di Kummer; la superficie delle onde che ha rapporti colla precedente; e più specialmente quest'ultima, occupa-

(1) La prima edizione del *Treatise on the Higher Plane Curves di Salmon* è del 1852.

(2) *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit.* Abs. VI, X.

rono più volte il Cayley. La ricerca della equazione delle linee di curvatura della superficie delle onde, mentre fu tema di un suo scritto giovanile, lo fu anche di uno degli ultimi, e questo lavoro ebbi la fortuna di pubblicare l'anno 1892 negli Annali di Matematica.

« Alla teoria generale delle quartiche dotate di nodi, dedicava inoltre tre memorie negli anni 1869, 1870.

« L'opera del Cayley nella teoria delle superficie estendesi ancora sia alle loro singolarità, sia a speciali superficie, ad esempio alle superficie gobbe, contribuendo, con uno dei più stimati lavori del Cremona, alla loro classificazione. Ma dove egli, dalla teoria delle forme, fu condotto a nuove ed originali indagini, si è nei molti lavori sulle superfici sviluppabili.

« Il problema dei poligoni inscritti e circoscritti a coniche, al quale il Cayley dedicò dieci o dodici brevi memorie, ebbe da lui quella nuova soluzione analitica che può dirsi avere acquistato maggior valore dalla nota polemica col Poncelet. Infine a questo ordine di lavori debbonsi ascrivere le due memorie *Sulla rappresentazione geometrica di alcuni integrali.*

« Non vi è parte della Geometria sulla quale la mente del Cayley non siasi rivolta, e non vi abbia impresso traccia del suo genio. Al molto già sopra riferito devonsi infatti aggiungere i lavori sulla geometria di posizione, quelli sulla geometria a più dimensioni, sulla geometria non Euclidea, sulla Gaussiana, ed altri ancora.

« Ma allorquando si rivolge l'attenzione ai numerosi scritti del Cayley relativi alla Dinamica ed alla Meccanica Celeste, il senso di maraviglia per la sua instancabile attività si accresce a più doppi. In primo luogo egli rese un segnalato servizio alla storia della meccanica razionale colle due eccellenti relazioni *On the recent progress of theoretical Dynamics* presentate alle due riunioni dell'Associazione Britannica, l'una nel 1857, l'altra nel 1862. La prima di esse, la quale prendendo le mosse dalla Meccanica analitica di Lagrange, segue passo passo, con chiarezza di esposizione, e con rigore di citazioni, quei rapidi progressi che nella prima metà di questo secolo impressero alla dinamica, Poisson, Jacobi, Hamilton, Bertrand, Bour ed altri; è il migliore scritto che oggi ancora può leggersi da coloro i quali si iniziano a questi studi.

« Cayley erasi da tempo preparato a questi lavori storici, avendo ancora giovanissimo una larga coltura in questo ramo delle matematiche, ed avendo in più occasioni trattato problemi di dinamica. Il suo primo lavoro *On the motion of rotation of a solid body* è dell'anno 1843, ed è in esso che per la prima volta sono opportunamente introdotte in questo problema quelle eleganti formole di Olinde Rodrigues per determinare le posizioni di due terne di assi ortogonali. Nel 1846, indottovi dalle scoperte di Jacobi in allora recenti, prese di nuovo a trattare il problema del movimento di un corpo attorno ad un punto fisso, nella ipotesi che l'origine delle coordinate sia nel

punto stesso; e colla introduzione di due speciali funzioni, di semplice interpretazione geometrica, riduceva la soluzione del problema, nel caso particolare fosse nulla la funzione delle forze, a due quadrature; ed estendeva il problema alla sua generalità colla variazione delle costanti arbitrarie.

« Dopo alcuni minori scritti sulla teoria lunare di Hansen, sulle soluzioni del problema dei tre e di più corpi di Jacobi e di Hamilton, il Cayley colle sue importanti memorie del 1859 e del 1862 *On the Problem of disturbed elliptic motion - On the development of the disturbing Function in the Lunar Theory - Disturbing Function in the Lunar and Planetary Theories - On the secular acceleration of the Moon's mean motion* dava principio a quella serie di lavori nella Astronomia e nella Meccanica Celeste, che gli valsero fama fra gli Astronomi, e la nomina nel 1866 a membro del *Board of Visitors* dell'osservatorio di Greenwich.

« Anche in questi, come in tutta l'opera del Cayley, due qualità sono dominanti; dapprima la conoscenza esatta di quanto era già stato pubblicato sull'argomento, poi il metodo costante ed originale di presentare le soluzioni proprie od anche soluzioni già note. Ed è (per indicare un primo esempio) da questo studio coscenzioso dei lavori altrui, che egli fu tratto ad accorgersi della ommissione di un fattore in alcune formole della Teoria della Luna di Plana, causa di alcune discrepanze fra esse ed i risultati di Pontècoulant e Delaunay.

» L'attrazione di una elissoide sopra un punto esterno, problema più volte trattato dal Cayley, porge un secondo esempio meritevole di nota. Cinque scritti suoi sull'argomento sono dedicati alle soluzioni di Legendre, di Jacobi, di Laplace, di Gauss, di Rodrigues; poi dà egli stesso soluzioni nuove, nelle quali lo studio degli integrali definiti multipli, connessi al problema, ha parte principale ed importante.

« Cayley fu giudicato, alcuni anni or sono, dal suo stimato allievo Glaisher - il più grande maestro d'algebra vivente - e questo giudizio fu approvato da quell'eminente geometra, che fu suo collaboratore, il Salmon.

« Giunto però a questo punto, dopo che il rapido esame da me fatto della maggior parte dell'opera sua, ha ridestato in me la chiara ricordanza della grande influenza che quest'opera ebbe ad innalzare le matematiche al punto nel quale oggi si trovano; è mia opinione che il nome di Arturo Cayley rimarrà nella storia della scienza, siccome quello di uno fra i più perspicaci e fecondi innovatori in molti rami di essa. Ed a questi innovatori, da quasi mezzo secolo, sarebbe ingiustizia il non riconoscere la parte d'onore che ad essi spetta nelle scoperte dell'oggi.

« La stima grandissima che io ebbi sempre per l'ingegno del Cayley, mi indusse a scrivere queste pagine, le quali, vorrei potessero dirsi degne di dedica alla memoria di lui ».

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine delle facole e macchie ed eruzioni solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano negli anni 1891-92-93-94.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Nella precedente Nota ho riferito sui risultati relativi alle protuberanze, ed ora riunisco nei seguenti quadri quelli che si riferiscono alle facole e macchie ed eruzioni osservate nello stesso periodo e dedotti colle stesse norme.

Facole.

Anno 1891.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
50° + 40°	0,000		0,000		0,000		0,007		0,002	
40 + 30	0,027		0,057		0,027		0,051		0,040	
30 + 20	0,280	0,547	0,335	0,670	0,259	0,724	0,221	0,639	0,274	0,645
20 + 10	0,200		0,272		0,324		0,272		0,267	
10 · 0	0,040		0,006		0,114		0,088		0,062	
0 — 10	0,053		0,019		0,016		0,015		0,026	
10 — 20	0,200		0,127		0,108		0,118		0,138	
20 — 30	0,187	0,453	0,133	0,330	0,108	0,276	0,206	0,361	0,158	0,355
30 — 40	0,013		0,051		0,038		0,022		0,031	
40 — 50	0,000		0,000		0,006		0,000		0,002	

Anno 1892.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
60° + 50°	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
50 + 40	0,007		0,004		0,004		0,004		0,005	
40 + 30	0,054		0,033		0,020		0,026		0,033	
30 + 20	0,200	0,480	0,111	0,473	0,097	0,502	0,086	0,431	0,124	0,472
20 + 10	0,157		0,202		0,215		0,177		0,188	
10 · 0	0,062		0,123		0,166		0,138		0,122	
0 — 10	0,068		0,074		0,081		0,056		0,070	
10 — 20	0,212		0,156		0,146		0,203		0,179	
20 — 30	0,178	0,520	0,206	0,527	0,170	0,498	0,211	0,569	0,191	0,528
30 — 40	0,055		0,091		0,089		0,086		0,080	
40 — 50	0,007		0,000		0,008		0,013		0,007	
50 — 60	0,000		0,000		0,004		0,000		0,001	

Anno 1893.

Latitudine	1° Trimestre	2° Trimestre	3° Trimestre	4° Trimestre	Anno
50°+40°	0,013	0,000	0,000	0,000	0,003
40+30	0,048	0,025	0,017	0,020	0,028
30+20	0,117 } 0,429	0,082 } 0,385	0,068 } 0,442	0,106 } 0,463	0,093 } 0,430
20+10	0,160	0,155	0,184	0,192	0,173
10 · 0	0,091	0,123	0,173	0,145	0,133
0 — 10	0,147	0,129	0,109	0,184	0,142
10 — 20	0,255	0,234	0,177	0,208	0,218
20 — 30	0,143 } 0,571	0,186 } 0,615	0,184 } 0,558	0,106 } 0,537	0,155 } 0,570
30 — 40	0,022	0,060	0,085	0,031	0,050
40 — 50	0,004	0,006	0,003	0,008	0,005

Anno 1894.

Latitudine	1° Trimestre	2° Trimestre	3° Trimestre	4° Trimestre	Anno
50°+40°	0,000	0,000	0,000	0,004	0,001
40+30	0,005	0,018	0,000	0,004	0,007
30+20	0,072 } 0,433	0,097 } 0,466	0,074 } 0,437	0,029 } 0,347	0,068 } 0,421
20+10	0,159	0,197	0,185	0,139	0,170
10 · 0	0,197	0,154	0,178	0,171	0,175
0 — 10	0,197	0,149	0,130	0,180	0,164
10 — 20	0,192	0,210	0,192	0,241	0,209
20 — 30	0,120 } 0,567	0,140 } 0,534	0,167 } 0,563	0,175 } 0,653	0,150 } 0,579
30 — 40	0,048	0,035	0,067	0,045	0,049
40 — 50	0,010	0,000	0,007	0,012	0,007

« Nella frequenza delle facole nelle diverse zone presentasi lo stesso fatto avvertito per le protuberanze, cioè a dire che mentre nel 1891 essa fu maggiore nell'emisfero boreale, nei successivi tre anni prevalse sempre nelle zone australi. I massimi però di frequenza per zona avvengono per le facole in latitudini più basse rispetto alle protuberanze, e non si appalesa per essa il massimo secondario trovato per le protuberanze nell'emisfero sud. In tutti questi anni la zona di marcata frequenza delle facole si mantenne dall'equatore a $\pm$ 30°, e si può dire che nelle nostre osservazioni esse non si presentarono a distanze dall'equatore maggiori di 50 gradi.

Gruppi di Macchie.

Anno 1891.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
40° + 30°	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	
30 + 20	0,214		0,304		0,250		0,271		0,260	
20 + 10	0,357	0,607	0,321	0,679	0,472	0,736	0,390	0,678	0,385	0,675
10 · 0	0,036		0,054		0,014		0,017		0,030	
0 — 10	0,000		0,000		0,000		0,017		0,004	
10 — 20	0,036		0,125		0,125		0,169		0,114	
20 — 30	0,250	0,393	0,178	0,321	0,111	0,264	0,136	0,322	0,169	0,325
30 — 40	0,107		0,018		0,028		0,000		0,038	

Anno 1892.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
40° + 30°	0,000		0,011		0,000		0,010		0,005	
30 + 20	0,213		0,085		0,078		0,019		0,099	
20 + 10	0,213	0,476	0,308	0,510	0,233	0,455	0,250	0,442	0,251	0,471
10 · 0	0,050		0,106		0,144		0,163		0,116	
0 — 10	0,012		0,000		0,045		0,106		0,041	
10 — 20	0,287		0,234		0,256		0,202		0,245	
20 — 30	0,200	0,524	0,202	0,490	0,222	0,545	0,221	0,558	0,211	0,529
30 — 40	0,025		0,054		0,022		0,029		0,032	

Anno 1893.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
50° + 50°	0,000		0,000		0,006		0,000		0,001	
40 + 30	0,000		0,000		0,006		0,000		0,001	
30 + 20	0,076	0,435	0,100	0,408	0,061	0,400	0,070	0,421	0,077	0,415
20 + 10	0,272		0,229		0,200		0,219		0,230	
10 · 0	0,087		0,079		0,127		0,132		0,106	
0 — 10	0,109		0,071		0,127		0,228		0,134	
10 — 20	0,337		0,314		0,279		0,237		0,292	
20 — 30	0,109	0,565	0,200	0,592	0,176	0,600	0,105	0,579	0,148	0,585
30 — 40	0,010		0,007		0,018		0,009		0,011	
40 — 50	0,000		0,000		0,000		0,000		0,000	

Anno 1894.

Latitudine	1° Trimestre		2° Trimestre		3° Trimestre		4° Trimestre		Anno	
40° + 30°	0,000		0,000		0,008		0,000		0,002	
30 + 20	0,062		0,094		0,034		0,026		0,054	
20 + 10	0,185	0,391	0,208	0,438	0,180	0,453	0,156	0,429	0,182	0,428
10 · 0	0,144		0,136		0,231		0,247		0,190	
0 — 10	0,155		0,167		0,111		0,156		0,147	
10 — 20	0,330		0,281		0,359		0,363		0,333	
20 — 30	0,103	0,609	0,104	0,562	0,077	0,547	0,052	0,571	0,084	0,572
30 — 40	0,021		0,010		0,000		0,000		0,008	

« Anche le macchie, come le facole e le protuberanze, furono più frequenti al nord nel primo anno, e poi sempre più abbondanti all'emisfero australe nelle 3 successive annate. In tutti questi anni la zona di marcata frequenza delle macchie è compresa dall'equatore alla latitudine ± 30, come le facole.

Eruzioni.

« In quanto alle eruzioni essendo state sempre scarse e deboli e decrescenti in numero, non vale la pena di distinguerle per trimestre e perciò ne diamo quì appena il solo risultato annuo.

Latitudine	1891		1892		1893		1894	
50° + 40°	0,000		0,000		0,000		0,000	
40 + 30	0,018		0,000		0,000		»	
30 + 20	0,189	0,563	0,371	0,445	0,200	0,200	»	0,000
20 + 10	0,321		0,074		0,000		»	
10 · 0	0,035		0,000		0,000		»	
0 — 10	0,000		0,000		0,000			
10 — 20	0,268		0,037		0,400			
20 — 30	0,084	0,437	0,349	0,545	0,200	0,800	1,000	1,000
30 — 40	0,018		0,169		0,100			
40 — 50	0,067		0,000		0,100			

« Anche dunque per le eruzioni risulta che dopo il 1891 la maggiore frequenza si mantenne nell'emisfero sud. Risulta così dimostrato pienamente, che dopo il 1891 l'attività solare si manifestò sempre maggiore nell'emisfero australe ».

Astronomia. — *Elementi ellittici di* (306) *Unitas osculanti in IVª opposizione.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

« Nella seduta del 3 dicembre 1893, dando la mia prima posizione di (306) Unitas in IIIª opposizione, ricordava che la correzione alla mia effemeride risultò di $-24^s.15$ in AR e $+9''.5$ in declinazione.

« La correzione degli elementi, con tutte le osservazioni delle tre prime opposizioni, trovasi in una mia Nota nel vol. XXIII, 1894 delle Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani.

« I finali elementi ellittici, riferiti all'eclittica e all'equinozio medio del 1892,0, osculanti alla IIIª opposizione, tenuto conto delle perturbazioni per Giove e Saturno, sono i seguenti:

$$
\begin{aligned}
T &= 1893\ \text{Dic. } 26{,}0\ \text{Berlino} \\
L &= 90^\circ\ 32'\ 6''.4 \\
M &= 143\ \ 23\ \ 53.\,9 \\
\pi &= 307\ \ 8\ \ 12.\,5 \\
\varphi &= 8\ \ 41\ \ 36.\,7 \\
\mu &= 980''.12331 \\
\Omega &= 141^\circ\ 32'\ 58''.3 \\
\iota &= 7\ \ 15\ \ 23.\,5
\end{aligned}
$$

Eclittica — equinozio 1892,0

« I medesimi elementi, ridotti all'equinozio medio del 1900,0 sono:

$$
\begin{aligned}
L &= 90^\circ\ 38'\ 48''.3 \\
\pi &= 307\ \ 14\ \ 54.\,4 \\
\Omega &= 141\ \ 39\ \ 24.\,6 \\
\iota &= 7\ \ 15\ \ 20.\,1
\end{aligned}
$$

« Allo scopo di osservare l'astro in IVª opposizione, la quale accadrà intorno al 14 aprile 1895, ho calcolato le perturbazioni per Giove e Saturno, per il primo assumendo $\varDelta t = 40$, per il secondo facendo $\varDelta t = 80$, nel calcolo delle quali fui aiutato dall'assistente dell'Osservatorio dott. D. Peira.

« I risultati delle integrazioni sono contenuti nel seguente quadro:

	Per Giove	Per Saturno
$\int \varDelta\mu =$	$+0''.31496$	$-0''.02474$
$\int \varDelta L =$	$+4'\ 8''.92$	$-3''.60$
$\int \varDelta\pi =$	$-6\ \ 27.\,89$	$-22.\,79$
$\int \varDelta\varphi =$	$+1\ \ 17.\,18$	$-3.\,78$
$\int \varDelta\Omega =$	$-0\ \ 24.\,07$	$-1.\,41$
$\int \varDelta\iota =$	$+0\ \ 4.\,89$	$-0.\,25$

« I nuovi elementi osculanti in IV^a opposizione sono:

Equinozio 1900,0 — eclittica.
$T = 1895$ Aprile 20,0 Berlino
$L = 221° \; 23' \; 52''.6$
$M = 274 \; 15 \; 48.9$
$\pi = 307 \; 8 \; 3.7$
$\varphi = 8 \; 42 \; 50.1$
$\mu = 980''.41353$ $\log a = 0.372398$
$\Omega = 141° \; 38' \; 59''.1$
$\iota = 7 \; 15 \; 24.7$

« Mi lusingo che l'astro con tutta facilità possa essere osservato mercè un'effemeride, che pubblicherò nelle A. Nachrichten, per uso degli astronomi ».

Fisica. — *Sul modo nel quale si producono le lunghe scintille alla superficie dell'acqua.* Nota del Corrispondente Augusto Righi.

« Se nel circuito di scarica di una grande batteria si includono uno spinterometro con sufficiente distanza esplosiva, ed un grande bacino pieno d'acqua, la superficie della quale è toccata da due conduttori (fra i quali il circuito sarebbe interrotto senza la presenza dell'acqua) si ottiene, all'istante della scarica, una brillante e rumorosa scintilla da un conduttore all'altro lungo la superficie del liquido: Questa scintilla superficiale, che si può produrre su molti corpi poco conduttori, ha generalmente una lunghezza considerevole, per esempio 20 o più volte la massima lunghezza di scintilla che, a parità di circostanza, può aversi fra le palline dello spinterometro dopo avere soppresso l'acqua dal circuito di scarica. Usualmente io le ottengo di ben due metri di lunghezza.

« In una mia antica Memoria [1], nella quale, oltre che di altri argomenti mi occupai anche delle scintille superficiali, proposi una spiegazione di esse, secondo la quale esse non sarebbero che una variante delle scariche laterali. Avendo avuto recentemente ad occuparmi di nuovo di questo fenomeno, in occasione di un mio Corso speciale sulla folgore e sulle scariche elettriche, sono stato condotto a precisare e completare quella mia spiegazione. È mio proposito di esporre in questa Nota la teoria delle scariche superficiali, e descrivere una esperienza che la rende assai evidente.

« Se al circuito di scarica di un condensatore si dà una forma tale, che due dei suoi punti, che chiamerò A e B, sieno abbastanza vicini fra loro, quantunque la porzione di circuito fra essi compresa sia una parte non

[1] *Ricerche sperimentali sulle scariche elettriche*, 2.^{a} Memoria. R. Acc. dei Lincei, Mem. della Classe di Scienze Fis. Mat. e Nat., 3.^{a} serie, v. I (1877). — N. Cimento 3.^{a} Serie, t. I, pag. 234.

piccola del circuito totale, nel momento della scarica si vede scoccare fra i detti punti A e B una scintilla, che costituisce la *scarica laterale*. Una scarica laterale si può ottenere anche fra un punto qualunque del circuito di scarica ed un conduttore, isolato o no, che a quel punto si trovi abbastanza vicino; ma questo caso di scarica laterale non interessa direttamente la questione attuale.

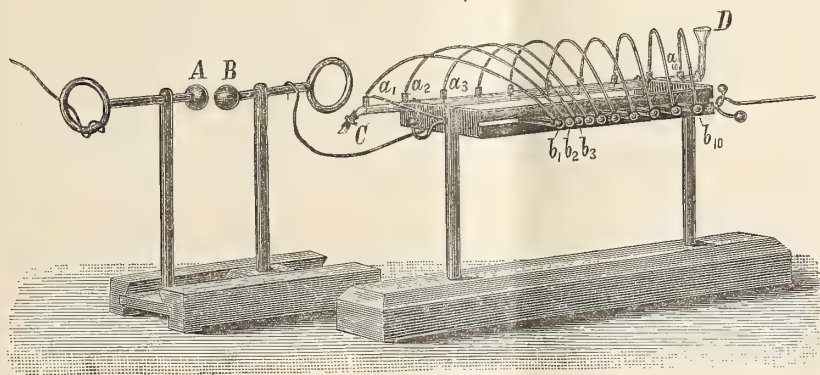
« La massima lunghezza della scintilla laterale AB dipende da varie circostanze, fra cui la capacità del condensatore, la distanza esplosiva allo spinterometro, e sopratutto il rapporto fra la resistenza del tratto di circuito compreso fra i due punti A e B e quella del circuito totale. Essa si produce evidentemente allorchè durante la scarica accade, che i due punti A e B si trovino ad un dato istante portati a potenziali abbastanza differenti. Non è certo facile stabilire come varî col tempo il potenziale nei vari punti del circuito durante la scarica; ma si intuisce che, se il circuito è tanto resistente che la scarica non sia oscillante, la distribuzione dei potenziali durante una parte della durata della scarica rassomiglierà tanto più a quella che si verifica nel caso d'una corrente costante, quanto maggiore sarà la capacità del condensatore e la resistenza del circuito, e quindi la durata totale della scarica stessa. Si comprende quindi, ciò che del resto l'esperienza conferma allorchè si forma il circuito con tubi pieni d'acqua, che si otterranno scintille laterali da un circuito dato tanto più lunghe, quanto maggiore è la resistenza compresa fra i due punti A e B, e così pure che si avranno scintille laterali più lunghe tenendo costante la resistenza fra A e B e diminuendo quella della parte rimanente del circuito.

« Ciò stabilito s'immagini che il circuito di scarica sia piegato in modo che, non due soltanto, ma molti dei suoi punti A, B, C, D...., presi successivamente lungo di esso, si trovino a piccole distanze fra loro. Con una scarica di sufficiente intensità potranno allora prodursi i fenomeni seguenti.

« Cominciata la scarica potrà accadere che la differenza di potenziale fra due di quei punti, per esempio A e B, divenga ad un dato momento abbastanza grande perchè si produca la scintilla laterale AB. Se ciò avviene, molto probabilmente si formeranno immediatamente dopo altre scariche laterali. Infatti, la scintilla AB già formatasi offre in generale alla corrente di scarica una resistenza assai minore di quella del tratto di circuito compreso fra i punti A e B, e ad ogni modo forma una derivazione e per ciò solo rende minore la resistenza totale del circuito di scarica, e perciò più rapida la variazione dei potenziali da punto a punto. Può accadere quindi che la differenza di potenziale fra due altri punti del circuito, per esempio B e C, divenga sufficiente affinchè anche la scintilla laterale BC si produca, mentre questa seconda scintilla non si sarebbe prodotta se un istante prima non si fosse formata la AB. Similmente, la produzione della scintilla BC, che ha per conseguenza una ulteriore diminuzione della resistenza totale del circuito,

determinerà facilmente la produzione di una terza scintilla laterale, e così di seguito. Se l'esperienza è fatta in modo che tutte le scintille laterali sieno l'una sul prolungamento dell'altra, esse raffigureranno una unica lunga scintilla, che si produce senza richiedere una differenza di potenziale, fra le armature del condensatore, più grande di quella occorrente alla scintilla che si forma fra le palline dello spinterometro.

« Tutte le scintille laterali cominciano l'una dopo l'altra, ma con ritardi assai piccoli, per cui esse appariranno all'occhio come simultanee, a meno che non si guardino entro uno specchio girante con sufficiente velocità angolare. È poi verosimile che, se in causa del prodursi di molte scintille laterali la resistenza totale del circuito è ridotta in ultimo ad essere abbastanza piccola, la scarica finisca col divenire oscillatoria.

« Per verificare queste mie previsioni ho costruito l'apparecchio seguente, che risponde perfettamente allo scopo. Nel circuito di scarica d'un grande

condensatore è compreso lo spinterometro AB (palline di circa 4 c. di diametro) ed un tubo di vetro pieno di acqua C D, terminato da una parte D in forma d'imbuto, e dall'altra C con tubo di gomma chiuso con pinzetta a vite, tuttociò onde rendere spedito il riempiere o vuotare il tubo. Quest'ultimo porta dieci fori laterali equidistanti a_1 a_2 a_3 . . . . . a_{10}, chiusi con tappi attraverso i quali passano dei fili di rame che terminano in altrettante palline d'ottone b_1 b_2 b_3 . . . . . b_{10} (diametro 1, 4 c.), poste in linea retta e portate da colonnette d'ebanite le quali si possono fissare a qualunque distanza fra loro, come si rileva dall'annessa figura. Di più al primo filo a_1 b_1 ed all'ultimo a_{10} b_{10} sono congiunti dei conduttori, mercè i quali si può introdurre la colonna d'acqua nel circuito di scarica.

Nel mio apparecchio il tubo ha 1,4 c. di diametro, e l'intervallo fra due fori consecutivi è di 7 c. Esso contiene acqua due volte distillata. Sic-

come però la resistenza dell' acqua è variabilissima a norma delle minime quantità di sostanze diverse che può avere in soluzione, così, chi dovesse ripetere la mia esperienza farebbe bene a provare, oltre che l' acqua pura, anche qualche miscuglio di acqua ed alcool, oppure acqua con traccie d' acido, onde essere in grado di dare al liquido la resistenza più opportuna onde si abbiano lunghe scintille laterali. Anche secondo la maggiore o minore capacità del condensatore adoperato, sarebbe utile variare la conducibilità del liquido o le dimensioni del tubo. Però i fenomeni, che fra poco descriverò, si ottengono dall' apparecchio in qualunque caso, le cure accennate avendo solo l'effetto di renderlo più appariscente.

« Si cominci col porre assai vicine fra loro le due palline A, B, dello spinterometro. La scarica avverrà attraverso la colonna d' acqua, senza che si manifesti nulla di notevole. Si aumenti allora poco a poco la distanza esplosiva allo spinterometro. Si osserverà ben tosto una scintilla fra due delle dieci palline allineate, generalmente le due che si trovano ad essere le più vicine fra loro. Con maggior allontanamento delle palline A, B, si otterranno due scintille fra le dieci palline, poichè alla scintilla laterale già vista prima si aggiungerà quelle fra le due palline che, escluse quelle fra le quali si è formata la prima scintilla laterale, sono le più vicine fra loro delle rimanenti. Poi si otterranno tre scintille, indi quattro ecc., finchè, con distanza esplosiva AB abbastanza grande, si otterranno tutte le nove scintille fra le dieci piccole palline. La distribuzione delle scintille laterali, allorchè si producono in numero minore di nove, dipende naturalmente dalle distanze che separano le dieci palline.

« D'ordinario gli intervalli fra le palline $b_1\ b_2 \ldots b_{10}$ sono distribuiti in ordine crescente da sinistra verso destra. Si abbia per esempio (in centimetri):

$b_1\ b_2 = 0{,}06$ $\qquad b_4\ b_5 = 0{,}8$ $\qquad b_7\ b_8 = 1{,}8$

$b_2\ b_3 = 0{,}5$ $\qquad b_5\ b_6 = 1$ $\qquad b_8\ b_9 = 3{,}1$

$b_3\ b_4 = 0{,}65$ $\qquad b_6\ b_7 = 1{,}4$ $\qquad b^9\ b_{10} = 3{,}9$

« In tal caso, aumentando poco a poco la distanza esplosiva allo spinterometro, le scintille laterali si aggiungeranno le une alle altre per ordine andando da sinistra a destra. Così in una esperienza, nella quale le nove distanze fra le dieci palline avevano i valori quì sopra scritti, si ottennero scintille in numero rispettivamente di

	1	2	3	4	5	6	9,
facendo la distanza esplosiva allo spinterometro eguale a:	1c.	1,5	2	2,5	3,1	3,9	4,2.

« Nel primo caso, e cioè quando si osserva la sola scintilla laterale $b_1\ b_2$, questa è rossa, appartiene cioè al III tipo, secondo una classificazione da

me proposta [1]. Le scintille $b_2\, b_3$, $b_3\, b_4 \ldots$, che si provocano allontanando di più le palline dello spinterometro, passano gradatamente al giallo (II tipo) e poi al bianco. Se poi tutte le nove scintille laterali si producono, esse sono tutte bianche e vivaci (I tipo). Analoghe successive mutazioni presenta la scintilla dello spinterometro. Questi cambiamenti di aspetto delle scintille sono in relazione colla diversa resistenza che presenta il circuito durante una parte notevole della durata della scarica.

« Come si vede, l'esperienza eseguita coll'apparecchio quì descritto, conferma le previsioni esposte prima; ma inoltre essa può servire a rendere chiara la spiegazione delle scintille superficiali. Infatti le nove scintille fra le dieci palline prese in complesso, non diversificano sostanzialmente da una scintilla alla superficie dell'acqua, ed anzi si può passare dall'un caso al-l'altro nel modo seguente. Si suppongano soppressi i dieci fili $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2 \ldots\ldots$ ed il tubo CD, e poste le dieci palline direttamente in contatto di una colonna d'acqua, che offra fra una pallina e l'altra le stesse resistenze che prima erano prodotte dall'acqua del tubo. Se oltre a ciò immagineremo anche diminuito il diametro delle palline sino a renderlo piccolissimo, l'apparecchio non avrà sostanzialmente mutato, ma le nove scintille laterali formeranno col loro complesso una scintilla superficiale. Si potranno poi aumentare indefinitamente di numero le palline, intercalandone di nuove fra le prime, ed allora potranno anche sopprimersi, giacchè le parti superficiali dell'acqua potranno farne le veci, ed in tal modo si sarà passati dal caso dell'apparecchio descritto al caso della scintilla alla superficie dell'acqua.

« Per ispiegare direttamente la formazione della scintilla superficiale, si potrà dunque ragionare nel modo seguente. Quando la scarica comincia, essa passa a traverso l'acqua del bacino; ma bentosto si forma fra il punto della superficie liquida toccato da ciascuno dei due conduttori che la mettono in circuito, ed i punti vicini, una differenza di potenziale sufficiente a produrre una prima scintilla laterale. Questa, rendendo subito minore la resistenza totale del circuito, può determinare una seconda scintilla, ossia un allungamento della prima, e così di seguito. Con distanza esplosiva piccola allo spinterometro, non si vedranno che brevi diramazioni luminose sull'acqua a partire dai due conduttori. Crescendo quella distanza, le diramazioni si allungheranno, sinchè si formerà la vera scintilla superficiale.

» È specialmente in prossimità dei due conduttori che toccano l'acqua che la variazione di potenziale da punto a punto dev'essere la più rapida, ed è quì perciò che devono cominciare le scariche laterali, la successione delle quali costituisce le diramazioni luminose superficiali. È per imitare questa circostanza, che nel mio apparecchio uso disporre le dieci palline con intervalli successivamente crescenti. A rigore, per imitare fedelmente le sca-

[1] l. c.

riche superficiali, bisognerebbe distribuire le 10 palline simmetricamente, con intervalli decrescenti dal mezzo verso gli estremi della serie. L'apparecchio si presta bene anche per questa esperienza, quantunque per adoperarlo in tal maniera sarebbe utile formarlo con un numero di palline assai maggiore di dieci. Adoperato nel modo descritto, l'apparecchio mostra in certo modo ciò che avviene in una metà della scintilla superficiale. Od anche, rappresenta il caso in cui ad uno dei conduttori che sfiorano la superficie dell'acqua, è sostituita una lastra largamente immersa.

« Nella Memoria più volte citata troverà il Lettore la descrizione delle scariche superficiali e fra altro vedrà che le diramazioni che si formano sull'acqua hanno differenze caratteristiche, secondo il segno della carica che giunge all'acqua per mezzo del conduttore dal quale partono quelle diramazioni. In particolare, le diramazioni positive sono più lunghe delle negative. Or bene, se coll'apparecchio dalle dieci palline si ottengono per es. 5 scintille (da b_1 a b_6) quando l'armatura positiva è dalla parte di b_1, se ne ottengono solo 2 o 3 dopo avere invertite le comunicazioni col condensatore. Si constata dunque la stessa differenza caratteristica or ora rammentata.

« La spiegazione delle scariche superficiali quì esposta si può applicare forse anche ad altri fenomeni. Già la estesi alla spiegazione delle scintille entro l'acqua, e segnatamente di quelle che ottenni lungi da ogni elettrodo (1), come pure, sino ad un certo punto, alla spiegazione delle scariche costituite da masse luminose in moto (2). Forse può applicarsi a rendere conto delle lunghe scintille (che ottengo sino a 4 o 5 metri) su lastre coperte da particelle metalliche (3), e per conseguenza anche a spiegare l'enorme lunghezza delle folgori.

« Se quanto fu qui esposto è vero, le diramazioni e le scintille superficiali non devono prodursi simultaneamente in tutta la loro lunghezza, ma invece devono cominciare presso le estremità e poi allungarsi. La forma loro generalmente assai tortuosa renderà forse difficile la constatazione di questo fatto. Ho però osservato entro uno specchio, girante colla velocità angolare di circa 40 giri al secondo, la fila di scintille che si ottengono fra le dieci palline del mio apparecchio, ed ho constatato il piccolo ritardo relativo col quale esse successivamente si producono ».

(1) l. c.
(2) Mem. della R. Acc. di Bologna, serie 5.ª, t. I, pag. 679.
(3) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 16 dicembre 1888.

Matematica. — *Su un sistema di equazioni a derivate parziali del 2° ordine.* Nota del dott. ONORATO NICCOLETTI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

« I metodi di Picard e di Riemann per l'integrazione dell'equazione lineare del 2° ordine a caratteristiche reali e distinte si estendono ai sistemi della forma:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\,\partial y}+\sum_k a_{ik}\frac{\partial z_k}{\partial x}+\sum_k b_{ik}\frac{\partial z_k}{\partial y}+\sum_k c_{ik}z_k=0\quad (i,k=1,2\ldots n)$$

dove i coefficienti a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} soddisfano nel campo che si considera, alle solite condizioni di continuità.

« L'estensione del metodo di Picard delle approssimazioni successive si ottiene subito applicando i criteri fondamentali sviluppati da Picard nella sua Memoria del 1890; basterà quindi enunciarne i risultati. Si può osservare soltanto che il metodo del Picard può essere reso più semplice, dal fatto che le serie di funzioni, che il Picard considera e delle quali dimostra la convergenza solo in un certo rettangolo, convergono invece in tutto il campo dove i coefficienti rimangono finiti e continui, come si ha confrontandole, invece che con una progressione geometrica, con un'altra serie convergente in tutto il piano, affatto analogamente a quello che ha osservato il Lindelöf pel caso di una sola variabile. Posto ciò, abbiamo i due teoremi fondamentali:

« *Teorema* 1°. Se nel campo considerato si descrive una curva C che sia incontrata in un sol punto da ogni parallela agli assi coordinati, esiste uno ed un sol sistema di funzioni $z_1\, z_2 \ldots z_n$ integrali delle (1), tali che le loro derivate prime $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z_i}{\partial y}$ prendono lungo la curva C valori dati ad arbitrio, purchè continui, e che di più in un punto della curva C prendono valori assegnati.

« *Teorema* 2°. Se la curva C è invece formata di due tratti rettilinei paralleli agli assi coordinati, esiste uno ed un solo sistema di funzioni $z_1 \ldots\ldots z_n$ integrali delle (1), che prendono sui due tratti rettilinei delle catene arbitrarie (continue) di valori, i quali si attacchino con continuità nel punto comune ai due tratti rettilinei, e queste funzioni z_i sono allora definite in tutto il rettangolo limitato dai due tratti rettilinei.

« Il metodo delle approssimazioni successive, dimostra soltanto l'esistenza, non l'unicità del sistema integrale. L'unicità risulterà dall'estensione del metodo di Riemann.

« 2. Moltiplichiamo perciò i primi membri delle (1) per n funzioni $u_1\, u_2 \dots u_n$ e quindi sommiamo per tutti i valori dell' indice i. Avremo

$$(2) \qquad \sum_i u_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\, \partial y} + \sum_{ik} a_{ik} u_i \frac{\partial z_k}{\partial x} + \sum_{ik} b_{ik} u_i \frac{\partial z_k}{\partial y} + \sum_{ik} c_{ik} u_i z_k = 0.$$

« Se si cerca di porre il primo membro delle (2) sotto la forma

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}$$

dove M ed N sono funzioni lineari omogenee delle z_i, $\frac{\partial z_i}{\partial x}, \frac{\partial z_i}{\partial y}$

$$\mathrm{M} = \sum_i \left(\beta_i \frac{\partial z_i}{\partial y} + \gamma_i z_i \right); \qquad \mathrm{N} = \sum_i \left(\alpha_i \frac{\partial z_i}{\partial x} + \delta_i z_i \right)$$

si trovano come condizioni necessarie e sufficienti

$$(4) \qquad \alpha_i + \beta_i = u_i\,; \quad \gamma_i + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} = \sum_k a_{ki} u_k\,; \quad \delta_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial x} = \sum_k b_{ki} u_k\,;$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} + \frac{\partial \delta_i}{\partial y} = \sum_k c_{ki} u_k .$$

Prendendo in particolare $\alpha_i = \beta_i = \frac{1}{2} u_i$, si ha

$$\gamma_i = \sum_k a_{ki} u_k - \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial y}; \qquad \delta_i = \sum_k b_{ki} u_k - \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x}$$

e l'ultima delle (4) dà per le u_i il sistema di equazioni lineari

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x\, \partial y} - \sum_k a_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial x} - \sum_k b_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial y} + \sum_k \left(c_{ki} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial x} - \frac{\partial b_{ki}}{\partial y} \right) u_k = 0$$

e corrispondentemente si hanno per M ed N i valori

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathrm{M} = \sum_{ik} a_{ki} u_k z_i + \frac{1}{2} \sum_i \left(u_i \frac{\partial z_i}{\partial y} - z_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \\ \mathrm{N} = \sum_{ik} b_{ki} u_k z_i + \frac{1}{2} \sum_i \left(u_i \frac{\partial z_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right). \end{cases}$$

« Il sistema (5) si dirà *l'aggiunto* del sistema (1): come è chiaro dal modo di costruzione, la relazione tra i due sistemi (1) e (5) è involutoria; uno dei due sistemi (1) e (5) è l'aggiunto dell'altro.

« 3. Applichiamo queste formule ad una nuova dimostrazione del 1° teorema. Sia perciò A il punto in cui si vogliono calcolare gli integrali z_i e ABC il triangolo curvilineo che si ottiene conducendo dal punto A le parallele AB, AC agli assi x ed y fino ad incontrare la curva C.

« Se le funzioni z_i soddisfano alle (1) e le u_i sono un sistema integrale particolare delle (5), sarà

$$\int_{\mathrm{ACBA}} (\mathrm{M}dy - \mathrm{N}dx) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \mathrm{M}dy + \int_{\mathrm{arco\ CB}} (\mathrm{M}dy - \mathrm{N}dx) - \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \mathrm{N}dx = 0.$$

Ora per le (6)

$$\int_A^C \mathrm{M}dy = \frac{1}{2}\sum_i (u_i z_i)_C - \frac{1}{2}\sum_i (u_i z_i)_A - \int_A^C \sum_i z_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \sum_k a_{ki} u_k\right) dy$$

$$-\int_B^A \mathrm{N}dx = \frac{1}{2}\sum_i (u_i z_i)_B - \frac{1}{2}\sum_i (u_i z_i)_A + \int_B^A \sum_i z_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_k b_{ki} u_k\right) dx$$

dove si è indicato in generale con φ_P il valore della funzione φ nel punto P.

« Quindi se le funzioni u_i sono state determinate in modo che sia

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_k b_{ki} u_k = 0 & \text{lungo il tratto AB} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial y} - \sum_k a_{ki} u_k = 0 & \text{lungo il tratto AC} \end{cases}$$

(il che è possibile mediante il metodo delle approssimazioni successive) si ha la formula notevolissima

$$(8) \qquad \sum_i (u_i z_i)_A = \frac{1}{2}\left\{\sum_i (u_i z_i)_C + \sum_i (u_i z_i)_B\right\} + \int_{\text{arco CB}} (\mathrm{M}dy - \mathrm{N}dx).$$

Ne segue che se si determinano n sistemi integrali delle (5)

$$(9) \qquad u_{11}, u_{12} \ldots\ldots u_{1n}\,;\quad u_{21}, u_{22} \ldots\ldots u_{2n}\,; \ldots\ldots\ldots ;\, u_{n1}\, u_{n2} \ldots\ldots u_{nn}$$

(il primo indice riferendosi al sistema integrale, il secondo alle funzioni) che soddisfino alle condizioni (7) e che prendano nel punto A valori, il cui determinante sia diverso da zero, avremo le formule

$$(10) \qquad \sum_i (u_{ri} z_i)_A = \frac{1}{2}\left\{\sum_i (u_{ri} z_i)_C + \sum_i (u_{ri} z_i)_B\right\} + \int_{\text{arco CB}} (\mathrm{M}_r dy - \mathrm{N}_r dx)$$

dove

$$\begin{cases} \mathrm{M}_r = \sum_{ik} a_{ki} u_{rk} z_i + \dfrac{1}{2}\sum_i \left(u_{ri}\dfrac{\partial z_i}{\partial y} - z_i \dfrac{\partial u_{ri}}{\partial x}\right) \\ \mathrm{N}_r = \sum_{ik} b_{ki} u_{rk} z_i + \dfrac{1}{2}\sum_i \left(u_{ri}\dfrac{\partial z_i}{\partial x} - z_i \dfrac{\partial u_{ri}}{\partial x}\right) \end{cases}$$

e l' indice r prende tutti i valori da 1 fino ad n.

« E poichè in questa ipotesi i secondi membri delle (10) contengono tutte quantità conosciute e le (10) stesse possono risolversi rispetto alle z_{iA}, otteniamo di nuovo la dimostrazione del 1° teorema già accennato. Di qui risulta anche l'unicità delle funzioni z_i, integrali delle (1), che soddisfano alle condizioni iniziali assegnate.

« Le funzioni u_{rs}, dovendo soddisfare lungo i tratti rettilinei AB, AC alle condizioni (7), sono determinate in modo unico quando ne siano assegnati i valori nel punto A, il cui determinante deve essere diverso da zero. Per un tal sistema di valori iniziali può prendersi il seguente:

$$1,\ 0,\ 0 \ldots.\ 0;\quad 0,\ 1,\ 0 \ldots.\ 0;\ \ldots\ldots;\ 0,\ 0 \ldots.\ 0,\ 1.$$

« Le funzioni u_{rs} corrispondenti si diranno formare *un sistema di soluzioni principali del sistema aggiunto, relative al punto* A. Se le u_{rs} formano un tale sistema, le formule (10) prendono la forma semplice:

$$(10') \qquad z_{r\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left\{\sum_i (u_{ri}\, z_i)_{\mathrm{B}} + \sum_i (u_{ri}\, z_i)_{\mathrm{C}}\right\} + \int_{\text{arco CB}} (\mathrm{M}_r\, dy - \mathrm{N}_r\, dx).$$

« Con ciò l'integrazione del sistema (1) colle condizioni iniziali espresse dal 1° teorema, è ricondotta alla risoluzione di un caso particolare del 2° problema pel sistema aggiunto, alla determinazione cioè delle soluzioni principali, la cui esistenza è provata dal metodo di Picard. A questo caso si può anche ricondurre la risoluzione del 2° problema, quando cioè siano assegnati i valori delle funzioni z_i lungo due tratti rettilinei paralleli agli assi coordinati.

« 4. Supponendo infatti che l'arco CB si riduca a due tratti rettilinei CD, DB paralleli agli assi coordinati x ed y, avremo conservando le notazioni antecedenti

$$z_{i\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left\{\sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_{\mathrm{C}} + \sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_{\mathrm{B}}\right\} - \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \mathrm{N}_i\, dx + \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \mathrm{M}_i\, dy.$$

Ora potendosi anche scrivere M_i ed N_i sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M}_i &= -\frac{1}{2}\sum_\mu \frac{\partial}{\partial y}(u_{i\mu}\, z_\mu) + \sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial y} + \sum_\nu a_{\mu\nu}\, z_\nu\right) \\ \mathrm{N}_i &= -\frac{1}{2}\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x}(u_{i\mu}\, z_\mu) + \sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial x} + \sum_\nu b_{\mu\nu}\, z_\nu\right) \end{aligned}\right.$$

sarà

$$-\int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \mathrm{N}_i\, dx = \frac{1}{2}\left\{\sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_{\mathrm{D}} - \sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_{\mathrm{C}}\right\} + \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{C}} \left\{\sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial x} + \sum_\nu b_{\mu\nu}\, z_\nu\right)\right\} dx$$

$$\int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \mathrm{M}_i\, dy = \frac{1}{2}\left\{\sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_{\mathrm{D}} - \sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_{\mathrm{B}}\right\} + \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{B}} \left\{\sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial y} + \sum_\nu a_{\mu\nu}\, z_\nu\right)\right\} dy$$

e quindi anche

$$(11) \qquad z_{i\mathrm{A}} = \sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_{\mathrm{D}} - \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \left\{\sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial x} + \sum_\nu b_{\mu\nu}\, z_\nu\right)\right\} dx - $$

$$- \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{D}} \left\{\sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial y} + \sum_\nu a_{\mu\nu}\, z_\nu\right)\right\} dy$$

le quali formole risolvono esplicitamente il secondo problema e dimostrano l'unicità degli integrali anche in questo caso.

« Si deduce di qui una conseguenza interessante. Indichiamo perciò con $(x_0\, y_0)$ le coordinate del punto A, con $(x_1\, y_1)$ quelle del punto D e determiniamo quindi n sistemi integrali delle (1)

$$z_{11}\,,\, z_{12} \ldots\ldots z_{1n}\,;\, z_{21}\,,\, z_{22} \ldots\ldots z_{2n}\,;\, \ldots,\ldots\,;\, z_{n1}\, z_{n2} \ldots\ldots z_{nn}\,; \tag{12}$$

(il primo indice riferendosi al sistema integrale, il secondo alle funzioni) le quali siano determinate da condizioni affatto analoghe, rispetto al punto D ed al sistema (1), di quelle a cui soddisfano le soluzioni principali u_{rs} rispetto al punto A e al sistema (5); che sia cioè

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial z_{hi}}{\partial x} + \sum\limits_{\mu} b_{i\mu}\, z_{h\mu} = 0 & \text{lungo il tratto CD} \\ \dfrac{\partial z_{hi}}{\partial y} + \sum\limits_{\mu} a_{i\mu}\, z_{h\mu} = 0 & \text{lungo il tratto CB} \end{array}\right. \tag{13}$$

per tutti i valori degli indici i ed h, e che di più i valori $z_{rs_{\rm D}}$ delle z_{rs} nel punto D siano uguali ad 1 o a zero, secondochè gli indici r ed s sono uguali o differenti. In tal caso la formula (11) diverrà

$$z_{hi_{\rm A}} = u_{ih_{\rm D}}$$

cioè

$$z_{hi}\,(x_0\,,\, y_0\,;\, x_1\,,\, y_1) = u_{ih}\,(x_1\,,\, y_1\,;\, x_0\,,\, y_0)\,, \tag{14}$$

le due prime lettere indicando le variabili, le due seconde i parametri, cioè le coordinate del punto, rispetto al quale le z_{rs}, u_{sr} sono costruite.

« L'uguaglianza (14) dà il teorema seguente:

« *Una qualunque delle soluzioni principali $u_{ih}(x,y\,;x_0\,,y_0)$ del sistema (5) aggiunto del sistema (1) può riguardarsi altresì come funzione delle coordinate $x_0\,,y_0$ del punto rispetto al quale è stata costruita; allora essa è la soluzione principale z_{hi} del sistema primitivo (1), relativa al punto di coordinate x ed y; in altri termini, la definizione delle u_{ih} non cambia, permutando i due sistemi (1) e (5), le variabili x ed y colle $x_0\,,y_0$, i primi con i secondi indici.*

« Ne segue che la determinazione delle soluzioni principali u_{ih} o z_{hi} porterà con sè l'integrazione del sistema (1) e (5) insieme e quindi in particolare:

« *L'integrazione di un sistema e del suo aggiunto sono due problemi equivalenti.*

« 5. Consideriamo infine l'esempio

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x\, \partial y} = \sum_k c_{ik}\, z_k \tag{15}$$

dove le c_{ik} sono costanti arbitrarie. Il sistema (15) è aggiunto di sè stesso: si riesce di più a determinare per esso le soluzioni principali per mezzo di sviluppi in serie convergenti dovunque a distanza finita.

« Possiamo supporre infatti che il punto, rispetto al quale si vogliano calcolare le soluzioni principali, sia l'origine delle coordinate. Le condizioni (7) diventano allora

$$\frac{\partial u_{hi}}{\partial x} = 0 \quad \text{per} \quad y = 0\,; \qquad \frac{\partial u_{hi}}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad x = 0$$

e quindi le soluzioni principali u_{hi} sono costanti lungo gli assi coordinati e precisamente uguali ad uno o a zero, secondochè gli indici h ed i sono uguali o differenti. Posto ciò, indicando con $u_{hi}^{(0)}$ i valori iniziali delle u_{hi}, applicando il metodo delle approssimazioni successive, oppure anche direttamente cercando di determinare le soluzioni principali mediante serie di potenze del prodotto $\tau = xy$ delle variabili, si ha

$$(16) \qquad u_{hi} = u_{hi}^{(0)} + c_{ih}\tau + \sum_k c_{ik}c_{kh}\frac{\tau^2}{1^2.\,2^2} + \sum_{kl} c_{ik}c_{kl}c_{lh}\frac{\tau^3}{1^2.\,2^2.\,3^2} + \cdots\cdots$$
$$+ \cdots + \sum_{klm..p} c_{ik}c_{kl}c_{lm}\cdots c_{ph}\frac{\tau^n}{1^2.\,2^2\ldots.n^2} + \cdots\cdots$$

dove le costanti $u_{hi}^{(0)}$ sono uguali ad 1 o a zero, secondochè gli indici i e h sono uguali o disuguali: e quindi si hanno appunto le soluzioni principali u_{hi} espresse in serie di potenze di τ che convergono per qualunque valore finito di τ.

« Se in particolare si prendono tutte le c_{ik} uguali tra loro, uguali ad 1, e si pone $\omega = n\tau$, le (16) divengono

$$u_{hi} = u_{hi}^{(0)} + \frac{1}{n}\left\{\frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1^2.\,2^2} + \cdots\cdots + \frac{\omega^n}{1^2.\,2^2.\ldots n^2} + \cdots\cdots\right\}$$

e quindi tutte le u_{hi} si esprimono mediante la J_0 di Bessel ».

Matematica. — *Di una formola relativa all'integrale ellittico completo di prima specie, contenuta in una precedente Nota, e di altre a quella affini.* Nota di DAVIDE BESSO, presentata dal Socio BELTRAMI.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *L'induzione terrestre ed il magnetismo delle roccie vulcaniche.* Nota del dott. G. Folgheraiter, presentata dal Socio Blaserna.

« In una serie di Note pubblicate in questi Rendiconti (¹) ho esposto il risultato di alcune misure, che avevano lo scopo di ricercare la forza magnetizzante delle roccie vulcaniche del Lazio. Fra le conclusioni, che da quei miei lavori ho tratto, trovasi che « il magnetismo delle roccie vulcaniche, *se si eccettuano i punti distinti* (²), è dovuto unicamente all'azione induttrice della Terra », perchè la sua orientazione è tale, come se avesse agito unicamente questa forza.

« Nella presente Nota mi sono proposto di investigare, quale possa essere la correlazione tra l'intensità magnetica attuale delle roccie vulcaniche e la forza, dalla quale furono magnetizzate: ogni tentativo di volere risolvere completamente questo quesito sarebbe per ora vano, poichè da una parte non conosciamo, quale era l'intensità del magnetismo terrestre all'epoca in cui avvennero le eruzioni, e dall'altra parte molte sono le cause, che possono avere influito in vario senso sul processo della magnetizzazione. Fra queste va annoverata in primo luogo la temperatura, alla quale le roccie sono state magnetizzate. A questo proposito è assai probabile che nelle lave che vennero eruttate dai vulcani ad una temperatura anche superiore a 1000° (³), e che si sono poi consolidate ancora caldissime, la magnetizzazione sia stata molto favorita e facilitata dalle condizioni termiche di esse. È anche generalmente ammesso, che i lapilli e le ceneri, che formarono poi i banchi di tufo e di pozzolana, siano stati lanciati fuori dai crateri riscaldati ad altissima temperatura, ma poi non sappiamo, se i cristallini di magnetite e di altri minerali magnetici siano stati magnetizzati ed orientati prima o dopo la formazione delle roccie attuali.

« Sulla temperatura di formazione dei peperini vi sono due opinioni diverse; la maggior parte dei geologi ammette, che i peperini siansi formati da correnti fangose relativamente fredde, che secondo alcuni sono traboccate dai vulcani o che, secondo altri, ebbero origine dall'impasto delle acque pluviali cadute in abbondanza durante l'eruzione colle ceneri e sabbie vulcaniche e

(¹) Serie 5ª, vol. III. 2° Sem. 1894, pag. 53, 117 e 165.

(²) È noto, che nelle roccie vulcaniche l'estensione dei punti distinti è assai limitata a confronto del resto delle roccie magnetiche, e per certo numericamente migliaia e migliaia di volte minore. Per questa ragione essi si devono considerare come eccezioni.

(³) A. Bartoli, *Sulla temperatura delle lave dell'attuale eruzione dell'Etna:* dal Bullettino del Settembre 1892, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania.

materiali detritici lanciati dalle bocche eruttive (1). Di Tucci invece ravvicina i peperini alle lave, ed ammette che la temperatura di formazione di quelli sia stata molto elevata (2).

« Oltre la temperatura, anche correnti elettriche o altre cause fisiche a noi del tutto ignote (analoghe a quelle che agiscono nella tempera dell'acciaio) o infine azioni chimiche propriamente dette, possono avere contribuito a facilitare o ad impedire l'azione induttrice della Terra nella magnetizzazione delle roccie vulcaniche.

« Non ho voluto per ora menomamente occuparmi dell'azione complessa di tutte queste svariate cause, ma ho unicamente cercato di esaminare, in che modo l'azione del calore influisca sull'intensità magnetica delle roccie vulcaniche prodotta dall'induzione della Terra.

« È noto, che già Melloni (3) e Förstemann (4) fecero delle esperienze per dimostrare che quando roccie magnetiche siano esse o no vulcaniche vengano arroventate e perciò private completamente della loro proprietà magnetica, raffreddandosi sia lentamente, come fece il Melloni colle lave, sia bruscamente, come fece il Förstemann con roccie non vulcaniche, esse si calamitano stabilmente e nel senso richiesto dall'induzione terrestre: ma non vennero mai fatte delle misure quantitative.

« Seguendo un procedimento analogo, io ho determinato il rapporto tra l'intesità magnetica delle roccie vulcaniche come sono attualmente costituite e quella che esse sotto l'azione induttrice della Terra acquistano, se vengono portate a temperatura sufficiente per perdere tutto il loro magnetismo, e poi vengono lasciate raffreddare sia lentamente, sia bruscamente.

« Il metodo sperimentale che ho tenuto, è il seguente: Dalle grosse colonnette, che già mi hanno servito per studiare l'intensità e l'orientazione del magnetismo permanente nelle roccie vulcaniche, e da altre che mi sono ancor procurato, ho tagliato dei piccoli parallelepipedi (grossolani) del peso di circa gr. 50: la dimensione di essi nel senso dell'altezza (riferita alla posizione che avevano le colonnette sulla roccia viva) era sempre circa tre o quattro volte maggiore che nelle altre due direzioni. Determinava poi la loro intensità magnetica col metodo delle deflessioni (Est-Ovest); li avvicinava cioè ad un ago calamitato liberamente sospeso, in modo che il loro presunto asse magnetico fosse normale all'ago calamitato, e passasse per il centro di questo.

(1) Un elenco dei più importanti scritti pubblicati su questo argomento trovasi nella Memoria del prof. R. Meli, *Sopra i resti fossili di un grande avvoltoio racchiuso nei peperini laziali,* pubblicata nel Bollettino della Società geologica italiana, vol. VIII.

(2) Atti della R. Acc. dei Lincei, Memorie Classe di Scienze fis., mat., e nat., Serie 3a, vol. IV, pag. 357.

(3) *Ricerche intorno al Magnetismo delle Roccie.* Mem. II. R. Acc. delle Scienze di Napoli, vol. I, 1853, pag. 141.

(4) Pogg. Ann. vol. CVI, 1859, pag. 128.

E affinchè le misure fatte in epoche diverse sullo stesso pezzo di roccia fossero tra loro paragonabili, ho avuto cura di stabilire dei punti fissi, entro i quali i varii campioni potessero essere collocati sempre nell'identica posizione e distanza rispetto all'ago. Ho preso come valore dell'intensità magnetica di ciascun campione, la somma dei due angoli di deflessione prodotta dall'avvicinamento dei suoi due poli all'ago dell'intensimetro.

« Questo metodo dà l'intensità magnetica delle colonnette, non con l'ultima precisione, ma con sufficiente esattezza per lo scopo prefissomi (0, 01 del valore totale), quando si tratti di roccie sufficientemente magnetizzate, come è il caso della lava basaltina e del tufo; però esso non si presta, quando si abbiano da misurare delle intensità assai deboli, perchè gli errori di osservazione divenendo troppo grandi rispetto alla quantità da misurarsi, mascherano il risultato. Ciò si verifica talvolta nel caso dei peperini, come si vedrà più oltre.

« Determinata l'intensità magnetica di un campione, lo sospendeva, per mezzo di tre fili di platino abbastanza robusti, verticalmente entro un involucro conico di amianto, e mediante una lampada a tre becchi Bunsen lo riscaldava a temperatura non minore di 800°, ossia ad una temperatura alla quale cessa qualsiasi azione magnetica: devo notare che questa temperatura veniva giudicata unicamente dal colore ciliegio incipiente, che acquistava il campione incandescente. Dopo un'ora di arroventamento, spegneva la lampada, lasciava che il campione si raffreddasse entro lo stesso involucro d' amianto, e dopo un paio d'ore, quando cioè esso aveva nuovamente acquistato la temperatura ambiente, ne determinava l'intensità magnetica: nelle varie esperienze ho tenuto conto, se il campione durante l'arroventamento era sospeso diritto o rovesciato rispetto alla posizione che esso aveva sulla roccia viva.

« Compiuta così la misura completa, aveva cura di collocare i varii campioni verticalmente, ma rovesciati rispetto alla posizione nella quale erano stati tenuti durante l'arroventamento. Dopo tre giorni determinava nuovamente l'intensità magnetica per vedere l'effetto prodotto dall'induzione terrestre, ed ho poi ripetuto questa misura di tratto in tratto. La maggior parte delle colonnette, che ho sottoposto ad esame, si trovano di già da tre mesi rovesciate e l'intensità che ora posseggono, ci può dare un sicuro indizio se il magnetismo acquistato dopo l'arroventamento sia permanente o temporaneo [1].

» Riporterò ora succintamente i risultati, che ho ottenuto colle varie specie di roccie vulcaniche.

1°. Lava basaltina (*senza punti distinti*).

« I campioni sui quali ho esperimentato sono:

a lava poco omogenea, *porcina*, proveniente dalla cava presso il Forte Acquasanta; *b* pezzo di lava preso dalla cava presso la lapide geodetica al 4° Ki-

[1] Le esperienze furono eseguite nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

lometro dell'Appia antica; *c* lava di grana fina ed omogenea, *selce gentile*, del Tuscolo; *d* lava proveniente dall'ultima cava a sinistra della via Appia antica vicino al forte omonimo; *e* lava presa nella piccola cava ora abbàndonata posta tra la tomba di Cecilia Metella ed il Forte Acqua santa, ove dal Keller fu segnato un punto distinto (1).

« Nella tabella qui unita sono riuniti tutti i valori trovati. La I colonna indica i varii campioni; la II dà la rispettiva intensità magnetica iniziale; la III colonna dà l'intensità magnetica dei varii campioni dopo l'arroventamento; la IV colonna dà la loro intensità magnetica, misurata dopo che sono stati tenuti verticalmente e rovesciati per tre giorni, dopo il loro arroventamento: la V colonna dà l'intensità magnetica dopo tre mesi dal loro arroventamento; ed anche in quest'intervallo di tempo i campioni furono tenuti sempre rovesciati (rispetto alla posizione nella quale furono tenuti durante l'arroventamento); la VI colonna dà il rapporto tra l'intensità magnetica posseduta dai varii campioni dopo e prima dell'arroventamento.

TABELLA I.

I	II	III	IV	V	VI
a	0° 2′,2	0° 26′,5	0° 25′,5	0° 25′,2	12,0
b	8′,9	31′,4	30′,4	30′,0	3,5
c	3′,2	13′,0	12′,8	12′,1	4,1
d	3′,2	13′,0	12′,4	12′,1	4,1
e	4′,1	54′,8	52′,1	52′,3	13,4

« Da questa tabella si scorge:

che l'intensità magnetica di tutti i campioni è notevolmente cresciuta dopo l'arroventamento;

che il rapporto tra l'intensità magnetica ora posseduta e quella iniziale varia moltissimo da campione a campione;

che il magnetismo acquistato dopo l'arroventamento sotto l'azione induttrice terrestre è permanente (2).

« Feci anche delle esperienze per determinare l'influenza del rapido raffreddamento sull'intensità magnetica. Dopo varie prove sono arrivato alla con-

(1) *Guida itineraria delle principali roccie magnetiche del Lazio*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol VI, 2° Sem. 1890, pag. 17.

(2) Faccio notare, che l'espressione « magnetismo permanente » non va intesa in modo assoluto, ma nel senso che l'uso comune le ha attribuito: così nell'acciaio il magnetismo permanente può variare per molteplici cause, e ciò nullameno ha conservato tal nome: nello stesso modo va intesa pure l'espressione « magnetismo temporaneo ».

clusione, che un rapido raffreddamento aumenta un po' il magnetismo permanente. Invece il tenere le colonnette diritte o rovesciate (rispetto alla posizione sulla roccia viva) durante l'arroventamento non porta alcuna differenza sensibile nell'intensità magnetica.

2°. Lava basaltina con punti distinti (1).

« Potei procurarmi 3 piccoli campioni di lava basaltina, che possedevano un punto distinto. Il campione *f* proviene dal Tuscolo, ed ha grossolanamente la forma d'un prisma a sezione triangolare; il campione *g* fu levato da un blocco di lava nella villa Mondragone presso Frascati, ed ha grossolanamente la forma di prisma a sezione rettangolare; il campione *h* è un piccolo pezzo irregolare raccolto accanto al punto distinto segnato dal Keller nella Tenuta di Capo di Bove (2).

« Di questi 3 campioni fu determinata l'intensità magnetica, avvicinandoli all'intensimetro in modo, che la congiungente dei due punti più fortemente magnetizzati rimanesse normale all'asse magnetico dell'ago. E così pure ebbi cura di disporli durante l'arroventamento in modo, che tale linea fosse verticale col polo nord in basso, affinchè l'effetto del magnetismo terrestre inducente si sommasse al magnetismo proprio dei campioni.

« Riassumo nella seguente tabella i risultati avuti; la sua disposizione è perfettamente uguale a quella della tabella 1ª.

Tabella II.

I	II	III	IV	V	VI
f	4° 21′,5	0° 45′,5	0° 43′,5	0° 43′,5	0,17
g	1° 28′,6	14′,3	14′,0	13′,6	0,15
h	3° 54′,0	16′,0	15′,2	15′,3	0,07

« Dall'esame di questa tabella si vede ad evidenza:

che l'intensità magnetica di tutti e tre i campioni è in seguito all'arroventamento ridotta ad una frazione molto piccola della primitiva; che il magnetismo posseduto dopo l'arroventamento dai varii campioni è permanente; che se si volesse attribuire la formazione dei punti distinti all'induzione terrestre, supposto anche che la loro orientazione sia stata corrispondente ad essa, si dovrebbe ammettere, che l'intensità magnetica della Terra all'epoca

(1) Ho stimato opportuno il suddividere in due gruppi la lava basaltina, con e senza punti distinti, sia perchè la causa che ha prodotto il loro magnetismo sembra diversa, sia perchè coll'arroventamento si comportano diversamente.

(2) Guida itineraria già citata.

dell'eruzione vulcanica fosse stata almeno 15 volte maggiore che al presente.

« Questi campioni si sono comportati dopo il loro primo arroventamento perfettamente nello stesso modo, che la lava basaltina senza punti distinti, sia quando furono sottoposti a rapido raffreddamento, sia quando furono rovesciati.

3°. *Tufi.*

« Le località, dalle quali provengono i varii tufi sui quali ho esprimentato, sono:

La grande cava a destra della Laurentina passato il 6° Kilometro (ponte Buttero), dove presi la colonnetta A.

Una cava ed una rupe scoscesa nella Tenuta di Pietralata, tra le vie Nomentana e Tiburtina, dove presi le colonnette di tufo ricomposto B, C, D, E.

Una cava posta dietro la piccola osteria al 3° Kilometro dell'Ardeatina: Colonnetta F.

Una cava presso la Sedia del Diavolo al 3° Kilometro della via Nomentana: Colonnetta G.

« Nella tabella che segue, sono raccolti i risultati avuti; anche qui ho tenuto nelle varie colonne la stessa disposizione e significato che nelle tavole antecedenti.

Tabella III.

I	II	III	IV	V	VI
A	0° 14′,3	0° 19′,1	0° 17′,6	0° 17′,5	1,34
B	17′,9	39′,2	37′,1	36′,7	2,19
C	21′,2	39′,9	37′,8	37′,5	1,87
D	28′,1	1° 2′,2	59′,7	1° 0′,0	2,21
E	7′,0	14′,5	14′,6	14′,1	2,07
F	20′,9	1° 9′,5	1° 5′,2	1° 5′,7	3,32
G	11′,8	51′ 2	50′,0	49′,1	4,34

« Risulta perciò:

che l'intensità magnetica acquistata dai tufi dopo l'arroventamento per l'azione induttrice della Terra è più grande che prima dell'arroventamento; ma il rapporto delle due intensità è diverso nei vari campioni; però faccio notare qui, senza voler dare alla cosa troppo peso, che i 4 campioni presi nella Tenuta di Pietralata B, C, D, E, hanno dato a press'a poco lo stesso rapporto;

che il magnetismo acquistato in seguito all'arroventamento è permanente.

Il rapido raffreddamento nei tufi produce sempre aumento d'intensità, ma in piccola misura. Invece non porta alcuna influenza il tenere durante l'arroventamento le colonnette rovesciate o diritte rispetto alla loro posizione sulla roccia viva.

4°. *Peperino*

« I peperini che mi hanno servito per le attuali ricerche, sono in parte quelli stessi, che ho esaminato per il mio studio sul magnetismo delle roccie vulcaniche, ed in parte furono da me raccolti sul finire dello scorso anno: ebbi cura di procurarmi campioni di un grande numero di località nei dintorni dei crateri laziali per potere dedurre delle considerazioni abbastanza generali.

« Ecco le località dalle quali provengono i campioni:

A dalle grandi cave di Marino; B da una piccola cava ad Est di Marino sulla stradetta, che porta al Tiro a segno di questa città; C dalle grotte sotto il Convento di Palazzolo; D dalla cava accanto al parco Chigi sulla via Ariccia-Rocca di Papa; E dalle falde del Monte Calabrone sopra il lago di Nemi; F dalla roccia nuda accanto alla fontana di Caiano sulla via di Nemi-Velletri; G, H da una piccola cava sulla via Appia nuova tra Galloro e Genzano; I dalla roccia accanto alla testa verso Albano del grande ponte di Ariccia; L dalla roccia sporgente sulla via Appia accanto al miglio XIII; M, N, O, P dalla cava di peperino accanto al Villino Monteverde sulla via tra Marino e Castel Gandolfo.

« Nel determinare l'intensità magnetica di alcuni campioni mi accorsi, che lo stesso estremo agiva sull'ago dell'intensimetro come un polo nord o sud, secondo che essi venivano spostati dalla direzione normale all'ago un po' verso nord o verso sud, come se fossero unicamente magnetizzati temporaneamente per l'induzione terrestre. Per accertarmi allora se realmente avesse preponderanza il magnetismo temporaneo su quello permanente, disposi le cose in modo da potere eseguire le misure, come si pratica nel metodo del coefficiente d'induzione introdotto dal Lamont [1], ossia in modo da poter tenere i campioni sospesi verticalmente sia diritti sia rovesciati, e da potere in ambedue i casi avvicinare all'ago dell'intensimetro a volontà o l'uno o l'altro dei loro estremi.

« Dalle misure fatte su tutti i campioni sopra notati risulta che il peperino si comporta precisamente come il ferro dolce: si trova cioè il polo nord sempre all'estremo rivolto in basso, ed il polo sud sempre all'estremo rivolto in alto. Con ciò non intendo dire che il peperino sia assolutamente privo di magnetismo permanente, ma se esso esiste, è in tal piccola quantità, che viene mascherato dal magnetismo temporaneo indotto dalla Terra: non mi sono curato di determinarlo, non essendo il metodo di Lamont abbastanza preciso per misurare quantità sì piccole.

[1] Lamont, *Handbuch des Erdmagnetismus*, Berlin 1849, pag. 152.

« In seguito Bamberger e Storch (1) ricavarono pure piccole quantità di difenile, assieme a nitro-, nitroso- ed azobenzina e a fenilnitroammina, ossidando una soluzione alcalina di diazobenzolo con ferricianuro potassico o con permanganato potassico. E nello scorso anno Beeson (2) pubblicò un lavoro alquanto esteso sull'azione degli alcoli metilico ed etilico sui sali dei diazocomposti sotto differenti condizioni, nel quale dimostra egli pure che il nitrato di diazobenzina con metilato o etilato sodico, ovvero anche con gli alcooli metilico ed etilico assoluti in presenza di idrato sodico o meglio di carbonato sodico o di polvere di zinco, forniscono tra gli altri prodotti difenile.

« Sono queste le poche notizie che finora si hanno su tale importante reazione dei diazocomposti, e tutte si riferiscono alla formazione del difenile dai sali di diazobenzina.

« S'ignorava tuttavia se i sali di altri diazocomposti potessero comportarsi ugualmente, e se per mezzo di miscugli di sali di diazocomposti diversi si potessero preparare gl'idrocarburi della serie del difenile che risultano dall'unione di due differenti radicali aromatici.

« Noi abbiamo studiato soltanto questa ultima parte della quistione, perchè essa era adatta a risolvere implicitamente anche la prima.

« Diremo subito che abbiamo raggiunto lo scopo. Le nostre esperienze furono prima eseguite decomponendo, col metodo già adottato da uno di noi, la soluzione concentrata di un miscuglio di cloruri di diazobenzina e p-diazotoluene con alcoolato sodico. Ottenemmo, assieme a piccola quantità di difenile, il p-feniltolile preparato da Carnelley (3) per l'aziono del sodio sopra un miscuglio di bromobenzina e p-bromotoluene, e ne abbiamo potuto dimostrare l'identità. Non constatammo la formazione del p-ditolile di Zinke (4).

« Stabilito il metodo lo abbiamo applicato alla sintesi dell'o-feniltolile, che finora si può considerare come non conoscinto. Infatti di questo idrocarburo si riscontra nella letteratura soltanto una breve notizia fornita da Barbier (5). Questi dice di averlo ottenuto decomponendo con sodio un miscuglio di bromobenzina e bromotoluene liquido, e ne dà soltanto il punto di ebollizione 255-260°. Per la mancanza di qualunque reazione che valga ad identificarlo, tale prodotto nei trattati più autorevoli o non viene riportato, o, come nel Beilstein, viene messo in dubbio. E il dubbio sollevato non è stato inopportuno; poichè noi, ripetendo due volte l'esperienza di Barbier, abbiamo constatato che per l'azione del sodio sul miscuglio di bromobenzina e o-bromotoluene in soluzione nell'etere assoluto, gran parte di questi prodotti restano inalterati, si formano notevole quantità di benzina e di toluene

(1) Berichte 26, pag. 471 e 484 (1893).

(2) Amer. Ch. Journ 16 pag. 235 (1894) Berichte 27, 512 Ref.

(3) Journ. of the Ch. Soc. *29,* 16 e 419 (1876); *37,* 707; *47,* 589; *51,* 87.

(4) Berichte 4, 394 e 514; *16* 2877; Ann. d. Ch. 223, 362.

(5) Ann. ch. phys. [5], 7, 513.

e inoltre dei prodotti di condensazione molto complessi a punto di ebollizione superiore ai 300°. Difenile e o-feniltolile non se ne formano che tracce, e quest'ultimo lo abbiamo potuto constatare soltanto per mezzo della formazione sensibile e caratteristica di un suo tribromoderivato che descriveremo in questo lavoro. Basti dire però che avendo impiegato gr. 103 di bromobenzina e gr. 114 di o-bromotoluene, non ottenemmo che 1 decigrammo di tribromo-o-feniltolile.

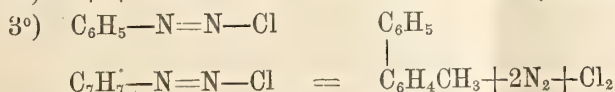
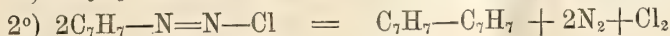
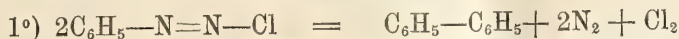
« Il sodio quindi non agisce soltanto sul bromo, ma anche sull'idrogeno sia del nucleo che della catena laterale, e così si spiega la formazione di quella notevole quantità di prodotti di riduzione (benzina e toluene) assieme ai prodotti complessi di condensazione.

« Comportamento analogo nel processo di sintesi degli idrocarburi col metodo di Fittig e Tollens è stato osservato da Stelling e Fittig [1], Ernst e Fittig [2], da Zincke [3], da Louguinine [4] e da altri.

« Decomponendo invece un miscuglio di cloruro di diazobenzina e cloruro di o-diazotoluene con etilato sodico, siamo riusciti ad ottenere quasi esclusivamente l'o-feniltolile, che descriveremo in questo lavoro. Di difenile non se ne formano che tracce, e l'o-ditolile nè per mezzo dell'ossidazione, nè per mezzo della bromurazione siamo riusciti a constatarlo. Contro ogni nostra aspettativa, il metodo quindi ci è riuscito adatto allo scopo; poichè (trascurando di mettere in equazione la formazione della benzina, del toluene, dell'aldeide acetica e delle due basi [5]) mentre teoricamente si potevano prevedere le tre forme di decomposizione:

1°) $2C_6H_5—N=N—Cl \quad = \quad C_6H_5—C_6H_5 + 2N_2 + Cl_2$

2°) $2C_7H_7—N=N—Cl \quad = \quad C_7H_7—C_7H_7 + 2N_2 + Cl_2$

3°) $C_6H_5—N=N—Cl$
$C_7H_7—N=N—Cl \quad = \quad \begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ C_6H_4CH_3 \end{matrix} + 2N_2 + Cl_2$

le prime due avvengono soltanto in piccolissima parte, e quasi esclusivamente si compie la terza. Il rendimento però non supera il 5 %.

« Il processo di Fittig, come risulta dalle nostre esperienze, pare che non si presti per la sintesi degli idrocarburi ortoalchilati del gruppo del difenile; e quello più recente di Möhlau e Berger [6], che consiste nella decomposizione dei cloruri anidri dei diazocomposti con gl'idrocarburi in presenza di cloruro di alluminio, oltre che dà origine a miscugli di prodotti, fornisce principalmente i composti paraalchilati.

(1) Ann. d. Ch. 137, 257.
(2) Ann. d. Ch. 139, 185.
(3) Berichte 4, 396.
(4) Gazz. ch. ital. 1°, 398.
(5) Vedi per questo: Oddo, Gazz. ch. ital. 1890, pag. 635.
(6) Berichte 26, 1994 (1893).

1° Cloruri di diazobenzina e di p-diazotoluene e alcoolato sodico: formazione di p-fenitolile.

« Grammi 18,7 di anilina (1 eq.) e gr. 21,4 di p-toluidina (1 eq.) furono diazotati assieme trattandole con 4 equivalenti di HCl e poscia con 2 eq. di soluzione di nitrito sodico ad una temperatura inferiore ai 10°, facendo uso della minore quantità possibile di acqua per disciogliere sia i cloridrati delle due basi che il nitrito sodico. Questo miscuglio di sali di diazo fu versato a poco a poco e agitando, su una soluzione alcoolica di alcoolato sodico, preparata con gr. 16 di sodio e gr. 150 di alcool assoluto. Notevole quantità di gas e di calore si sviluppano mentre avviene la reazione e si manifesta l'odore dell'aldeide acetica. Dopo aver fatto ricadere a bagno maria per circa mezz'ora si distilla a vapor d'acqua. Passa prima alcool assieme ad anilina e toluidina, che si sono formate di nuovo per riduzione dei sali di diazo, e poscia gl'idrocarburi della serie del difenile; ma la loro distillazione è molta lenta e talvolta dura per 3 o 4 giorni.

« Le acque distillate si agitano con etere e la soluzione eterea si lava con HCl diluito e poi con acqua per eliminare l'anilina e la toluidina, e il prodotto di 5-10 preparazioni, dopo averlo disseccato e avere scacciato l'etere, si distilla frazionatamente. Distillano benzina (1) e toluene (2), poscia la temperatura sale rapidamente da 115 a 240° e molto lentamente invece da 250 a 275°. Si raccolsero le seguenti due frazioni: 240-258° e 258-275°. Da queste due frazioni raffreddate con neve si depositarono delle squamette cristalline di difenile (p. f. 70°), che furono separate filtrando: il liquido delle due frazioni, dopo averlo fatto ricadere per un po' di tempo sul sodio, distillato di nuovo, passò quasi completamente tra 262-268°.

Gr. 0,2754 di sostanza fornirono gr. 0,9363 di CO_2 e gr. 0,1790 di H_2O;

	trovato %	calcolato per $C_6H_5 . C_6H_4 . CH_3$
C	92,72	92,86
H	7,22	7,14

« Il p-feniltolile è un liquido incoloro che solidifica nel miscuglio frigorifero di sale e neve.

Ossidazione. « Per meglio identificarlo, circa gr. 1 di sostanza fu messa a ricadere per alcune ore con 2 parti di bicromato potassico e 3 p. di acido solforico diluito con 3 volte il suo volume di acqua, finchè l'olio fu quasi completamente sparito. Il prodotto della reazione, ancora acido, fu estratto con etere. Quando il solvente si fu evaporato rimase un residuo solido bianco che dal-

(1) Riconosciuta con la trasformazione in nitrobenzina e anilina e la reazione di questa con cloruro di calce.

(2) Per ossidazione con $KMnO_4$ al 5 % in soluzione alcalina, dà acido benzoico.

l'alcool cristallizzò in aghi p. f. 217-218° e che riconoscemmo identico all'acido p-difenilcarbonico.

« Nella decomposizione del miscuglio dei cloruri di diazobenzina e p-diazotoluene s'era quindi formato assieme a difenile (e forse anche a p-p-ditolile), il p-feniltolile che da Carnelley fu preparato per pirocondensazione di benzina e toluene [1] e inoltre dal p-bromotoluene e bromobenzina [2] col metodo di Fittig; e recentemente da Möhlau e Berger (assieme ad o-feniltolile) per l'azione del cloruro di diazobenzina anidro sul toluene in presenza di cloruro di alluminio.

2° Cloruri di diazobenzina e di o-diazotoluene e alcoolato sodico: formazione di o-feniltonile.

« Operammo in condizioni identiche a quelle esposte precedentemente, sostituendo alla p-toluidina l'o-toluidina. Questa base ci fu fornita da Kahlbaum; e poichè il suo punto di ebollizione (199°) è molto prossimo a quello della p-toluidina (198°), ne constatammo la purezza preparandone l'acetilderivato che, cristallizzato frazionatamente, fuse sempre a 107°; mentre quello della p-toluidina fonde a 147°.

« Anche in questo caso il prodotto di dieci preparazioni, purificato nel modo descritto avanti, fu distillato frazionatamente e si raccolsero le seguenti frazioni:

1ª) 70-100°: benzina, riconosciuta come è detto avanti;
2ª) 100-115°: toluene;
3ª) 115-240°; poche gocce, sulle quali l'ossidazione con $KM_n O_4$ al 5 % in soluzione alcalina non ci fornì alcun dato diagnostico;
4ª) 240-258°; 5ª 258-270°; 6ª 270-285°.

« Alla temperatura di 285° tutto il liquido era distillato.

« Le frazioni 4ª, 5ª, 6ª furono raffreddate ripetutamente con miscuglio frigorifero e filtrate per separare quel po' di fenile che cristallizzava (specialmente nella frazione 4ª). Le frazioni 4ª e 5ª così purificate furono distillate di nuovo, e tra 261-264° passò quasi tutto come olio incoloro. Al residuo scarso del pallone fu aggiunta la frazione 6ª, questa distillò per la maggior parte tra 268-273°. L'analisi mostrò che l'olio distillato a 261-264° era o-feniltolile, e che la frazione distillata tra 268-273° era un miscuglio in gran parte di o-feniltolile, che abbiamo isolato allo stato di tribromoderivato, e di un altro idrocarburo che, nè per mezzo della ossidazione, nè per mezzo della bromurazione, siamo riusciti ad identificare.

(1) Jahr. 1876, 419.
(2) Journ. of the ch. Soc. 37.

Gr. 0,2549 di sostanza p. e. 261-263° fornirono gr. 0,8664 di CO_2 e gr. 0,1667 di H_2O;

	trovato °/₀	calcolato per $C_6H_5.C_6H_4.CH_3$
C	92,70	92,86
H	7,27	7,14

« L'o-feniltolile non solidifica, anche raffreddandolo con miscuglio frigorifero di sale e neve. L'acido nitrico (d. 1,50) lo attacca energicamente, ma il prodotto non cristallizza dall'alcool assoluto. L'acido solforico ordinario a freddo lo lascia quasi inalterato, lo scioglie invece a caldo colorandosi in bruno.

Ossidazione dell'o-feniltolile.

« 1°) Con permanganato potassico.

« Gr. 2 circa d'idrocarburo sospesi in una soluzione diluita di soda furono trattati, agitando sempre, con soluzione al 5 °/₀ di permanganato potassico. Non si raggiunse mai uno scoloramente completo anche riscaldando a bagno maria e agitando sempre. Dopo avervi fatto gorgogliare dell'anidride solforosa sino a scoloramento e a reazione nettamente acida, si estrasse con etere l'olio quasi inalterato, insolubile nella soda.

« 2°) Con acido cromico.

« L'olio ricavato dalla esperienza precedente fu riscaldato a ricadere per circa cinque ore con 2 p. di bicromato potassico e 8 p. di H_2SO_4 diluito con tre volumi di acqua. Il prodotto della reazione in soluzione acida fu estratto con etere. Scacciato questo solvente, rimase un residuo bianco sporco che venne purificato trattandolo con soda diluita, nella quale si sciolse quasi completamente e agitando con etere prima in soluzione alcalina per togliervi quel po' d'idrocarburo che era rimasto inalterato e quindi in soluzione acida. Da quest'ultima estrazione si ottenne quasi puro, e dopo una sola cristallizzazione da alcool, in piccoli aghi bianchi p. f. 110-111°, insolubili nell'acqua. Tutti i caratteri coincidono con quelli dell'acido o-difenilcarbonico. Resta così dimostrata la costituzione del nostro idrocarburo. Molto caratteristico poi per riconoscerlo, come si è detto avanti, è il seguente derivato:

Tribromo o-feniltolile.

« Fu da noi ottenuto molto facilmente versando su gr. 1 d'idrocarburo (1 molecola) disciolto in egual volume di alcool assoluto, gr. 1 di bromo (1 mol.). Appena il bromo viene a contatto della soluzione dell'idrocarburo, si nota un leggiero crepitìo e il tutto si rappiglia istantaneamente in una massa cristallina bianca, formata da lunghi aghi sottili. Si raccoglie su filtro,

si lava con acqua, che lo fa annerire leggermente, senza alterare però la forma cristallina e dopo averlo disseccato su carta bibula all'aria, che vi toglie anche la porzione d'idrocarburo rimasta inalterata, si cristallizza dall'alcool assoluto o meglio da un miscuglio di alcool assoluto e alcool ordinario.

« All'analisi gr. 1,1174 di sostanza fornirono gr. 0,1649 di Ag Br;

	trovato °l₀	colcolato per $C_8H_9Br_3$
Br	49,71	59,25

« Questo tribromoderivato si presenta in sottili aghi bianchi e lunghi, p. f. 167-169°. È solubile anche a freddo in cloroformio e benzina, poco solubile in etere e in alcool, solubile a caldo in acido acetico: da tutti questi solventi cristallizza in begli aghi. E capace di essere ulteriormente bromurato; ciò avviene anche se nel prepararlo invece di 1 mol. di bromo per 1 mol. di idrocarburo, come noi abbiamo indicato, si usano 2-3 molecole di bromo. Si ossida molto facilmente trattandolo con 2 p. di bicromato potassico e 3 p. di H_2SO_4 diluito con 3 volumi di acqua a caldo per circa un'ora sino a che si vedono sparire tutti i cristallini. Il prodotto della reazione estratto con etere è un miscuglio di una sostanza solubile negli alcali, che riprecipita con gli acidi, e di un'altra sostanza colorata in rosso mattone insolubile negli alcali. Tali prodotti che potrebbero indicare la posizione degli atomi di bromo nella molecola secondo che si ottiene un acido benzoico bromurato o l'acido l'ortoftalico bromurato, saranno descritti in altra comunicazione.

Tentativi per preparare l'o-feniltolile col metodo di Fittig.

« Completeremo questo studio esponendo i tentativi infruttuosi che abbiamo eseguito per preparare l'o-feniltolile, facendo agire il sodio sul miscuglio di bromobenzina e o-bromotoluene, come aveva fatto Barbier.

« *Preparazione della bromobenzina e dell'o-bromotoluene.* Preparammo i due bromocomposti col metodo descritto da Sandmeyer [1] per la bromobenzina, sostituendo per l'o-bromotoluene ad 1 eq. di anilina 1 eq. di o-toluidina pura. In ogni preparazione s'impiegavano gr. 37,2 di anilina e gr. 42,8 di toluidina. Però avendo bisogno di una quantità di tali bromocomposti, invece di ricorrere in tutte le preparazioni successive a nuove quantità di solfato di rame, bromuro potassico e polvere di rame, abbiamo seguìto il metodo che riportiamo, perchè più rapido e meno costoso.

« Si compiva la prima preparazione seguendo le indicazioni date da Sandmeyer, e dopo avere scacciato a vapor d'acqua il bromoderivato formatosi sulle medesime acque madri, si versavano un'altra molecola di acido

(1) Berichte 1884, 2652.

solforico, 1 eq. di base, 1 eq. di bromuro potassico (invece di 3 equivalenti) o di HBr e a caldo poi 1eq. di nitrico sodico, si distillava di nuovo a vapor d'acqua e si ripeteva lo stesso per la terza preparazione. Con questo processo, sia per la bromobenzina che per l'o-bromotoluene, il rendimento nella 2ª preparazione era sensibilmente uguale a quello della prima e diminuiva soltanto di poco nella terza preparazione.

« Versammo in un pallone gr. 500 di etere, lavato con acqua e distillato sulla calce e sul sodio e gr. 10,20 di sodio tagliato in fili sottili, e quando cessò lo sviluppo di bolle d'idrogeno, aggiungemmo gr. 35 di bromobenzina e gr. 38,1 di o-bromotoluene. La reazione avviene soltanto a caldo e si compie facendo bollire a ricadere per circa 12 ore, nel quale tempo il sodio viene tutto consumato. Il prodotto fu filtrato, il residuo sul filtro fu lavato con etere finchè questo passò incoloro, il filtrato fu lavato con acqua, disseccato con cloruro di calcio e dopo avere scacciato l'etere fu distillato frazionatamente. Si raccolsero le seguenti frazioni:

85-100°, benzina
100-120°, toluene
140-160°, bromobenzina (perchè più pesante dell'acqua, contiene bromo e ridistillata bolle a 149-152°)
160-185°, o-bromotoluene (perchè più pesante dell'acqua, contiene bromo e ridistillata bolle a 181-183°)
200-256°, 256-300°; scarse proporzioni.

« Nel pallone rimase un residuo oscuro alquanto abbondante, che col raffreddamento si rapprese; ma non si riesce a ricavarne prodotti cristallizzati.

« Ripetemmo l'esperienza adoperando il doppio di bromocomposti e di sodio e sempre coi medesimi risultati. Il residuo del pallone, quantunque la prima distillazione sia stata eseguita nel vuoto senza oltrepassare i 200°, era sempre catramoso e non cristallizzabile.

« Le frazioni bollenti tra 200 e 300° furono ridistillate e si raccolsero le seguenti frazioni: 200-240°; 240-256°; 256-268°; 268-290°. Pesavano ciascuna circa 1 gr. e tutte e quattro si solidificavano completamente raffreddandole con miscuglio frigorifero.

« Le frazioni 256-268° e 268-290° riunite assieme e trattate con un volume eguale di alcool e un peso uguale di bromo, diedero uno scarso deposito di cristalli aghiformi, che cristallizzati dall'alcool fusero a 166-170°. Erano circa 1 decigramma.

« L'olio rimasto inalterato trattato con una nuova quantità di bromo non diede alcun deposito solido. Le frazioni 200-240° e 240-256° nelle identiche condizioni non reagirono con bromo ».

Geologia. — *Per la storia del sistema vulcanico Vulsinio.* Nota dell'ing. Enrico Clerici, presentata dal Socio Capellini.

„ Le descrizioni contenute nei *Viaggi ai vulcani spenti d'Italia nello stato romano verso il Mediterraneo* (Firenze 1816 - 20) del Procaccini Ricci, e le sue conclusioni sull'origine delle rocce tufacee affatto differenti da quelle del Brocchi che nella stessa epoca percorse le stesse località e raccolse le stesse rocce registrandole nel suo ottimo *Catalogo ragionato* (Milano 1817), m'invogliarono a ripetere, con qualche variante, alcuni degli itinerari seguiti da quei due geologi.

„ Riferirò qui, ma in modo assai compendioso, le mie osservazioni fatte perlustrando quella estrema parte della provincia romana che forma il fianco orientale del sistema vulcanico Vulsinio [1], e che termina ad est al Tevere ed a sud al torrente Vezza.

„ I numerosi corsi d'acqua, tutti affluenti nel Tevere, hanno scavato valli strette e profonde, molte volte veri burroni con pareti a picco, oltremodo pittoresche ed oltremodo interessanti per le grandiose sezioni naturali alte decine e decine di metri che presentano.

„ I dintorni di Bagnorea possono esser presi per tipo. Il terreno più antico è quivi un'argilla pliocenica grigio-bluastra, compatta, omogenea, stratificata orizzontalmente o quasi, che, essendo sufficientemente sollevata, la si ritrova in quasi tutte le valli ed anzi in alcuni luoghi forma tutto il suolo, mancando la copertura di materiali vulcanici di cui in seguito. Nel seguente elenco sono registrate soltanto alcune specie di fossili più interessanti o più frequenti che contiene l'argilla; ma una bella e ricca collezione ne possiede il marchese Carlo Gualterio [2] a Bagnorea.

Anomalocardia diluvii Lamk.
„ *pectinata* Brocc.
Nucula placentina Lamk.
„ *sulcata* Bronn
Cardium hians Brocc.
„ *echinatum* Lin.
Lucina spinifera Montg.
Isocordia cor Lin.
Corbula gibba Olivi
Strombus coronatus Defr.
Murex vaginatus Jan.
Fusus longiroster Brocc.
Nassa semistriata Brocc.
„ *prismatica* Brocc.
„ *costulata* Brocc.
Ringicola buccinea Brocc.
Turritella subangulata Brocc.
Dentalium elephantinum Lin.
Denti di *Carcharodon*, *Oxyrhina*, una vertebra caudale di cetaceo.

(1) Hanno maggiori rapporti colla mia Nota: Pareto L., *Osserv. geolog. dal Monte Amiata a Roma.* Giorn. Arcad. t. C. Roma 1844. — Verri A., *Osservazioni geologiche sui crateri Vulsinii.* Boll. Soc. Geol. It. vol. VII. Roma 1888. — De Stefani C., *I vulcani spenti dell'Apennino Settentrionale.* Id. vol. X. Roma 1892.

(2) Tributo vive lodi al march. Carlo Gualterio per le sue interessanti ricerche nel territorio Bagnorese, che, per troppa modestia, mantiene inedite; tributo altresì sentiti ringraziamenti per la liberalità colla quale mi ha fatto parte delle sue scoperte.

" In qualche posto l'argilla si fa gialliccia superiormente ed è seguita da ghiaie a sabbia gialla come, per esempio, presso Castel Cellese e S. Michele in Teverina, oppure da sabbia con lastre d'arenaria a molluschi littorali come presso Grotte S. Stefano; ma generalmente i materiali vulcanici — ed occorre qui adoperare un termine assai generico — riposano sull'argilla, e la linea nettissima di separazione in tutte le sezioni naturali che la raggiungono è tale come risulterebbe da un sistema di valli e colline preesistente alla deposizione dei materiali vulcanici.

« Questo fatto, che risalta fin dal primo sguardo in queste contrade, smentisce nel modo il più assoluto la concordanza fra la formazione marina pliocenica e la vulcanica che qualche autore ha asserito nel discutere l'origine dei tufi.

« I materiali vulcanici costituiscono una pila, dove più, dove meno potente, di banchi e strati numerosi, in forma di sabbie, lapilli, piccole pomici bianche, di tufi terrosi e granulosi, variamente alternati, che assecondano e ricolmano le accidentalità della superficie argillosa. Il colore sfuma anche nei singoli strati con gradazioni gialle, rossiccie, brune, verdognole, cenerine, ed il loro insieme, nelle menzionate sezioni naturali, imita una stoffa tessuta a righe e ciò fino a perdita di vista con effetto sorprendente, al quale si aggiunge quello non minore, delle bizzarre e dicotome creste e piramidi che l'erosione produce sulle sottoposte argille.

« Su questi strati, in massima parte poco coerenti, talvolta, come quelli di conservatissime pomici bianche, affatto sgretolabili, sta un potente banco di quel tufo a pomici nere tanto rimarchevole, oltrechè per la sua speciale costituzione, anche per la grande diffusione che ha in questa regione, come nel viterbese, intorno ai laghi di Vico e di Bracciano. In tutto il banco isolatamente considerato manca stratificazione evidente; alla parte superiore il tufo è rossiccio e litoide, alla inferiore bigio e meno tenace, come se gli elementi non si fossero sufficientemente cementati fra loro. In alcuni luoghi si vede, sotto al tufo pomiceo, un tufo giallo-chiaro con pomicine giallognole, adatto come materiale da costruzione, pur esso assai diffuso fra i laghi di Vico e di Bracciano.

« La serie dei tufi terrosi e granulosi continua ancora al disopra del tufo pomiceo, il quale è così intercalato nella serie come un grosso strato.

« Il mantello vulcanico, la cui potenza è variabile per le ragioni già dette, raggiunge in queste località 80 a 100 m. e penso che possa essere assai maggiore: ricopriva in origine tutta la regione e dove ora manca, e le argille e sabbie plioceniche sono allo scoperto, vi fu evidentemente asportato. Il lavoro di erosione e denudazione compiutosi in tempi recentissimi, ma così intenso da scavare valli profonde 200 m., fu certamente favorito dalla debolissima o nulla coesione di molti fra gli innumerevoli strati tufacei.

« A togliere ogni dubbio restano qua e là dei veri testimoni, e meri-

tano sopratutto di essere ricordati il Montione dietro Civita, che è un obelisco di pochi metri di base fatto di strati tufacei, ormai soltanto della parte inferiore della serie, innalzato alla sommità di una piramide di argilla.

« Lo sventurato paese di Civita è costruito sopra una platea di tufo pomiceo sostenuta da una pila di strati incoerenti tagliati a picco, sostenuta a sua volta da una base di argilla. Il continuo franamento dell'argilla e dei lapilli, provoca la caduta di blocchi del tufo pomiceo coi sovrapposti fabbricati, e l'intera rovina del paese sarà inevitabile. Intanto non vi si accede che da una strada a forte pendio sopra una cresta di argilla a picco da ambi i fianchi. Lo Stoppani, che visitò questi luoghi, riporta nel suo *Corso di Geologia* la riproduzione di una fotografia del paese di Civita; ma vi sarebbero da ritrarre molte altre vedute più istruttive e più interessanti.

« Giacchè ho ricordato lo Stoppani, aggiungerò che egli subito dopo la succinta descrizione di queste località imprende la discussione sulla origine dei tufi romani e dice (v. vol. III, p. 382): « Io non credo che alcuno « abbia mai dubitato che i tufi della campagna romana siano composti di « prodotti di vulcani subaerei ». Così egli, di fronte all'evidenza dei fatti, lasciava in dimenticanza l'opposto parere del Brocchi e del Ponzi, nè avrebbe supposto che dopo venti anni la loro erronea opinione sarebbe stata oggetto di una voluminosa pubblicazione. « Se è cosa indubitabile » continua lo Stoppani « che quei tufi constano di prodotti di vulcani subaerei, non « ne viene però la conseguenza che i tufi stessi non possano essere sot- « tomarini....... Possono dunque essersi formati contemporaneamente degli « accumulamenti tufacei sulla terra asciutta, e dei sedimenti d'immediata « dejezione vulcanica in mare ».

« Quest'ultima conclusione generica è giustissima se però fra gli « ac- « cumulamenti tufacei sulla terra asciutta » vogliensi comprendere anche quelli che eventualmente possono essersi formati in acque continentali. Nelle mie ultime pubblicazioni ho infatti dimostrato che nei dintorni di Roma le rocce tufacee si alternano con sedimenti d'acqua dolce e spesso con giacimenti di diatomee d'acqua dolce, sicchè per i dintorni di Roma la teoria dell'origine generalmente nettuniana dei tufi è assolutamente abbattuta.

« Ma la regione di cui è parola nella presente Nota esce dai dintorni di Roma distandone oltre 70 km.: nondimeno ho il piacere di poter dichiarare che per questa regione vulsinia la mia tesi si estende e si dimostra con tale forza che la mia aspettativa [1] è stata di gran lunga superata.

[1] Da molto tempo l'egregio ing. Demarchi, capo del distretto minerario di Roma, mi aveva comunicato, ma senza precisare la giacitura, un saggio di materiale tripolaceo leggero proveniente da Castel Cellese, in cui rinvenni abbondanti diatomee.

Così pure avevo già letto nomi di località comprese nella regione, in un catalogo di materiali diatomiferi del noto negoziante Thum di Lipsia. In seguito alla mia escursione ho saputo che il marchese Gualterio avendo esaminato saggi di *Latte di Luna*, che così viene chiamata la farina fossile, e trovatili diatomiferi, ne mandò al conte Castracane, il quale li riconobbe subito per *materiali d'acqua dolce* e ne fornì al Thum.

« Infatti fra i menzionati tufi, ed interstratificati con essi, abbondano veri e propri giacimenti di tripoli e farina fossile che potrebbero avere anche una certa importanza commerciale - al pari di quelli ben noti di S. Fiora - come i giacimenti di Sermugnano, di Castel Cellese, di Magognano.

« Spesso si passa dalla farina fossile purissima ai tufi terrosi, argillosi e simili, e non mancano casi in cui si è tentati di dire che dette varietà di tufo sono un'impurità del tripoli.

« A Bagnorea, ove appunto cominciano le grandi sezioni naturali, gli strati diatomiferi hanno poco spessore: ma a maggiore distanza dal lago di Bolsena, come per esempio a Castel Cellese, raggiungono decine di metri. Sono i primi strati vulcanici quelli che più interessano per la ricerca delle condizioni del terreno all'esordio dei nostri vulcani ed appunto fra questi, al disotto del tufo pomiceo, stanno i detti giacimenti a diatomee d'acqua dolce. Troppo lungo sarebbe enumerare tutti i saggi raccolti ed i luoghi per raccoglierne, tanto più che in tal caso sarebbe conveniente istituire una analisi microscopica completa delle specie in essi contenute, per poi ricercare, se possibile, le ragioni della differente distribuzione e frequenza di talune specie. Per ora interessa conoscere l'*habitat* di questa florula, e ciò può farsi colla semplice ispezione dei preparati: vi mancano tutte quelle vistose e caratteristiche forme proprie delle acque marine e delle salmastre, ed invece, insieme a specie di *habitat* indifferente, vi abbondano forme proprie delle acque dolci.

« Nella località Poggiole presso Sermugnano si è già fatto qualche tentativo di estrazione e commercio della farina fossile di cui ve n'è un banco compatto. Il materiale bianchissimo e purissimo è prevalentemente costituito da *Synedrae* (*S. delicatissima* ed altre).

« Nel precipizio sotto il paese di Lubriano, che è fondato sul tufo pomiceo, ho raccolto un tripoli argilloso povero di diatomee che nondimeno ricordo perchè è sovrapposto ad una serie di strati terrosi e lapillosi che quivi ricoprono una corrente di leucotefrite compatta nerastra, tagliata trasversalmente dal burrone del fosso di S. Lorenzo, la quale scorse in una valletta fra due colline di argilla pliocenica, non completamente riempita e livellata da altri materiali tufacei depositativi anteriormente alla emissione della lava.

« Altri straterelli diatomiferi poveri si ritrovano nello stesso vallone presso il ponte della via da Lubriano a Bagnorea.

« In Bagnorea al luogo detto Jajano, presso a poco allo stesso livello dei precedenti, vi è un bello strato di farina fossile quasi pura in cui abbonda il *Campylodiscus hibernicus* Ehr. e poche altre specie.

« A Castel Cellese, scendendo verso la pubblica fontana, si traversano prima strati di tufi terrosi e granulosi, poi il tufo pomiceo, quindi altri lapilli, degli strati tripolacei poveri di diatomee, poi altri tufi terrosi, infine una serie di strati biancastri e giallognoli assai ricchi di diatomee che ri-

coprono una preesistente collina di ghiaie ad argilla gialliccia ed inferiormente di argilla bigia pliocenica utilizzata in una fornace.

« Al vicino burrone detto morra di S. Sepolcro, l'argilla non esiste neppure giù nel fosso che vi scorre in fondo dopo avervi fatto una cascatella. La sezione naturale è alta oltre 30 m. Al basso vi è per circa 5 m. di terra sabbiosa vulcanica nerastra: su questa, per altrettanta altezza, una serie di strati argillosi oscuri riccamente carboniosi, con pezzi di lignite, spicule di *Spongilla*, molte diatomee e molti granuli di polline di *Pinus*: quindi argilla bigia gessosa con filliti (*Fagus*, *Carpinus*) e poi una potente pila di straterelli varicolori biancastri e giallastri di tripoli (¹) riccamente diatomiferi, continuazione di quelli or ora nominati.

« Alla morra di Chiodo presso M. Secco, dove il fosso (che nella carta al 50000 ha il nome di f. Calcinara) fa una brusca risvolta, vi è una bellissima sezione naturale alta una quarantina di metri che merita di esser ricordata per il considerevole sviluppo della formazione d'acqua dolce.

« Dal letto del fosso affiora uno strato di piccole pomici biancastre e subito, senza sfumature, comincia una successione di numerosissimi straterelli sottilissimi ed orizzontali (²), alternativamente, bianchi, gialli, grigi, di tripoli che può dividersi in lamine sottili anche quanto un foglio di carta. Questa perfetta scistosità è prodotta dal fatto che veli di diatomee compattamente infeltrate si alternano con straterelli un po' sabbioso-calcarei. Le specie più abbondanti sono: *Epithemia gibba*, *E. sorex*, *Synedra delicatissima*, *Cyclotella compta* v. *paucipunctata*.

« Al disopra della metà della sezione vi è qualche arricchimento in materiali vulcanici, come pure arricchimento in calcare in modo da originarvi una marna con molluschi d'acqua dolce (*Bythinia tentaculata* Lin., *Valvata piscinalis* Müll., *Planorbis* ecc.) e più oltre travertino.

« A Celleno pure abbondano i detti materiali diatomiferi.

« A 2 km. da Magognano, nel pittoresco burrone dell'Infernaccio, è stata iniziata la coltivazione di un banco di farina fossile bianca e compatta potente circa 3 m. In corrispondenza di un protendimento della collina coperta dal bosco di C. Michignano, il burrone presenta una bella ed altissima sezione naturale. L'argilla pliocenica, che nelle prossime colline intorno alla Mola è ricca di fossili (*Turritella subangulata*, *Nassa costulata*, *Dentalium elephantinum* ecc.), vi manca od è mascherata dal materiale franato.

« Il banco di tripoli è compreso fra i soliti strati tufacei de' quali avvene uno di aspetto e consistenza peperinica. Verso la sommità della se-

(¹) Del tripoli giallastro compatto, costituito prevalentemente da *Melosira crenulata* Ktz., ve n'ha uno strato alquanto potente del quale si è tentato fare commercio.
Tracce di lignite, dello stesso orizzonte, si trovano anche a Roccalvecce e S. Michele e furono oggetto di ricerche industriali (vedasi Demarchi L., *I prodotti minerari della prov. Romana*. Annali di statistica ser. 3ª, vol. II, pag. 184-85. Roma 1883).

(²) Un gruppo di strati, alla base, è singolarmente ripiegato.

zione vi appare, come un grosso strato, il taglio di una corrente di leucitite compatta azzurrognola, ricoperta da pochi altri strati tufacei.

« A 3 km. dalla stazione ferroviaria di Grotte S. Stefano in direzione sud-ovest trovasi il fosso delle Pozzarelle (sulla carta f. Malnome), il poggio Ulivo ed il poggio Marabese fra i quali passa intagliata una strada campestre. In una bassura lì prossima vi sono due sorgenti solfuree. L'argilla ed i più bassi conglomerati vulcanici, con molti ciottoli lavici, sono fortemente alterati e piritizzati ed una volta venivano utilizzati per la fabbricazione del vetriolo all'Edifizio. Sopra i detti conglomerati sta una serie di strati marnoso-tripolacei e farina fossile con impronte di vegetali palustri e ricca di molte specie di diatomee, alternati con straterelli di pomici o di materiali vulcanici, ed infine marna sempre più ricca di calcare che forma un calcare argilloso pieno di molluschi (*Hyalina olivetorum* Herm., *Helix nemoralis* Lin., *Cyclostoma elegans* Müll. ecc.) ed anche travertino che si estende verso Grotte S.Stefano.

« La località è celebre per la grande quantità di ossa e denti (*Elephas, Bos, Cervus, Felis leo* v. *spelaea, Ursus* ecc.) che il p. Semeria vi scoprì nel 1817 e vi estrasse anche Pianciani e Procaccini Ricci [1].

« Proseguendo ancora a sud, si giunge al torrente Vezza (ove appaiono anche arenarie e calcari eocenici) presso il quale sono le rovine di Ferento. Questa località è pure importante per la scoperta fattavi dal Brocchi [2] di ossa elefantine giacenti negli strati sottoposti alla lava basaltica. Io l'accennerò per avervi trovato un dente di *Bos* cfr. *primigenius* e per l'importante giacimento di sabbia quarzosa pliocenica adatta all'industria vetraria, che, per la potenza di oltre 15 m., affiora al disotto degli strati tufacei [3].

« La formazione d'acqua dolce, oltre che coi tripoli e farine fossili già accennati, si manifesta con frequenti banchi di travertino ora tipico, ora passante a calcare argilloso, in analoghe relazioni con i tufi. È quasi sempre pieno di fossili; così per Graffignano citerò *Hyalina olivetorum* Herm., *Helix nemoralis* Lin., *Succinea putris* Lin., *Cyclostoma elegans* Müll., *Bythinia rubens* Menke, *Limnaea palustris* Müll., *Planorbis rotundatus, Pl. complanatus* e sopratutto citerò il *Zonites gemonensis* Fér., specie che non tro-

(1) Procaccini Ricci V., *Su di alcune ossa fossili.* Lettera al prof. Nesti: Giornale di scienze ed arti di Firenze, t. VI, 1817, p. 220. — Id., *Viaggi ai vulcani* ecc. viaggio II, tomo II, p. 95. — Id. *Descr. metodica di alquanti prodotti dei vulcani spenti nello stato romano.* Firenze 1820, p. 99. — Pianciani G. B., Lettera III al Procaccini Ricci (nei *Viaggi* ecc. v. II, tomo II, p. 111). — Id *Delle ossa fossili di Magognano nel territorio di Viterbo.* Bologna 1817. — Clerici E., *Sopra alcune sp. di felini della caverna al M. delle Gioie.* Boll. R. Com. Geol. 1888. Il Pianciani nel materiale bianco e leggero riconobbe alcunchè di somigliante alla farina fossile del Fabbroni e del Santi che si trova presso S. Fiora e che è realmente un materiale diatomifero: però propendeva a ritenerlo un tufo omogeneo alterato.

Ritengo che non lungi di là dovettero esser state trovate le ossa che il Ciampini nel 1668, istituendo la prima osservazione di osteologia comparata, dimostrò essere di elefante (ved. Miscellanea curiosa sine Ephem. med-phys. germ. Acad. imp. Leopoldinae nat. curiosorum Dec. II. an VII (1868) Norimbergae 1869 — pag. 446 observ. CCXXXIV Hieronymi Ambrosii Langenmantelii — *De ossibus Elephantum*).

(2) Brocchi G. B., *Sopra alcuni ammassi colonnari basaltini del territorio di Viterbo.* Bibl. It. vol. III. Milano 1816. — Id., *Catalogo ragionato* op. cit.

(3) Ved. anche: *Rivista del servizio minerario nel 1890.* Firenze 1892, p. 695.

vasi vivente nella provincia, della quale il marchese Gualterio possiede belli esemplari che abbiamo confrontato con altri della sua splendida collezione malacologica.

« La collezione paleontologica locale del marchese Gualterio mi permette di citare anche interessanti resti (denti, ossa, corna) delle seguenti specie di mammiferi estratte dai travertini:

Elephas — Castel Cellese, Roccalvecce, Graffignano
Rhinoceros Mercki Jaeg. (= *Rh. megarhinus* Crist.) — Roccalvecce
Equus caballus Lin. — Lubriano
Bos primigenius Boj. — Pianucciole, Civitella d'Agliano
Cervus elaphus Lin. — Graffignano
Cervus dama Lin. — Graffignano.

« Per quanto la natura grossolana e meno compatta dei tufi terrosi e granulosi poco si presti alla buona conservazione delle reliquie organiche sepoltevi, pure queste vi sono relativamente frequenti, e spesso, nella mia rapida escursione di pochi giorni, ho trovato qua e là frammenti di ossa. In grazia della collezione Gualterio posso annoverare le seguenti specie:

Elephas (forse *antiquus* Falc.) — Lubriano, Civitella d'Agliano, Pianucciole (1)
Elephas antiquus Falc. — Due molari a Bardano presso Graffignano
Equus (forse *caballus* Lin.) — Taglio della strada Lubriano-Bagnorea
Bos — Fontanicchi e M. Albano p. Bagnorea, Guadagliona, Civitella d'Agliano
Cervus elaphus Lin. — Civitella d'Agliano.

» Le impronte vegetali non vi sono meno frequenti. Nella raccolta Gualterio ho riconosciuto le specie seguenti:

Acer pseudoplatanus Lin.
Ulmus campestris Lin.
Carpinus betulus Lin.
} Lo Scalone presso Bagnorea, in un tufo sovrapposto alla leucotefrite da lastricare.

Fagus sylvatica Lin. — Bagnorea, Casali Doria presso Celleno.

« In località S. Lucia, ad 1 km. da Bagnorea sulla strada carrozzabile per Montefiascone, io ho trovato un tufo giallognolo omogeneo compatto somigliante ad arenaria, posteriore al tufo pomiceo, pieno di belle filliti: *Fagus sylvatica* Lin. ed altre più rare che mi sembrano di *Vitis vinifera* Lin.

« In altra Nota collegherò la regione ora esaminata con quella posta incontro all'altra sponda del Tevere ed allora saranno meglio basate e più estese le conclusioni da trarsi. Intanto rammenterò come in linea grossolana i vulcani romani si seguano in una depressione compresa fra l'Appennino ed una catena littoranea di cui ora non restano che pochi frammenti. Che la

(1) Il Pianciani nella lettera citata menziona una difesa elefantina trovata nei tufi di Lubriano.

depressione sia stata occupata da mare pliocenico profondo non può esservi dubbio e del pari che le sabbie astiane littorali erano già deposte quando esordirono questi vulcani. Che l'area corrispondente alla detta depressione fosse allora libera di acque marine, ciò non è ancora possibile di concludere in modo assoluto per ogni luogo; ma certamente lo era per la regione ora considerata.

« La strada che da Montefiascone conduce ad Orvieto, segue lo spartiacque fra il lago di Bolsena ed il Tevere; tutto il territorio da un lato ed almeno per un paio di chilometri dall'altro verso il Tevere, come le istruttive trincee della ferrovia Viterbo-Montefiascone, mostra che i prodotti di eruzioni aeree caddero su terreno asciutto. A Monte Rado, a Montefiascone e più a sud a Monte Jugo, sono così ben conservati che paiono eruttati di fresco. A distanza di soli 4 km. dal detto spartiacque (cioè 14 km. dal centro del lago; a metà distanza fra il lago e il Tevere) cominciano i grandi burroni e le sezioni naturali arrivano molto al disotto del tufo pomiceo ed appaiono i giacimenti d'acqua dolce e diatomiferi, dapprima poco potenti, quasi sopraffatti dalla grande quantità di materie vulcaniche, poi sempre più potenti.

« Nessuna prova finora che il vulcano esordisse sotto le acque marine; la fase sottomarina, se vi fu, dovette essere fugacissima, e tutto porta a concludere che il vulcano sorse in una regione eminentemente palustre o che vi divenne subito dopo. La parte più bassa della falda occidentale del sistema estendendosi successivamente potè raggiungere il mare; ma là gli strati tufacei contengono molluschi marini ».

Anatomia. — *Alcuni fatti che riguardano la cresta neurale nel capo dei Selaci.* Nota di A. Coggi, presentata a nome del Corrispondente Emery.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

A. Andreocci. *Sui quattro acidi santonosi.* Presentata dal Socio Cannizzaro.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Brioschi dà annuncio della dolorosa perdita fatta dall'Accademia nella persona del Socio straniero A. Cayley, e legge una Necrologia del defunto accademico [1].

[1] V. pag. 177.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dal Corrispondente Millosevich, dal Socio straniero Zeuner, dai dottori Berlese e Martorelli, e dall'Osservatorio di Bonn.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale ed il Museo di geologia pratica di Londra; la Società di scienze naturali di Emden; il R. Osservatorio di Vienna; le Univertità di Upsala, di Tokyo e di Coimbra.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Società Geografica Italiana di Roma; l'Università di Pisa.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nell'adunanza del 3 marzo 1895.

Albert I^er^ de Monaco. — Sur les premières campagnes scientifiques de la Princesse Alice. Paris, 1895. 4°.

Berlese A. — Le Cocciniglie italiane viventi sugli agrumi. Parte I. II. Avellino, 1893-94. 8°.

Buchanan J. Y. — Sur la densité et l'alcalinité des eaux de l'Atlantique et de la Méditerranée. Paris, 1894. 4°.

Corradi A. — In memoria di Alfonso Corradi. Bologna, 1895. 4°.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 1^e^ Abth. 6 St. Leipzig, 1894. 4°.

De Angelis G. — Descripcion de los Antozoos fósiles pliocénicos de Cataluña. Barcelona, 1895. 8°.

Id. — I Corellarii fossili dei terreni terziarii, collezione del gabinetto di S. N. di Udine. Siena, 1895. 8°.

Id. — Sopra il primo fossile vegetale trovato tra gli schisti carboniosi paleozoici dell'Elba orientale. Roma, 1895. 8°.

Gasco F. — Commemorazione di F. Gasco fatta al Circolo dei Naturalisti il 10 gennaio 1895. Roma, 1895. 8°.

Janet Ch. — Etudes sur les fourmis. Notes 2. 3. 4. 5. 7. Paris, 1894.

Id. — Transformation artificielle en Gypse du Calcaire friable des fossiles des sables de Bracheux. Paris, 1894. 8°.

Klein C. — Der Universaldrehapparat, ein Instrument zur Erleichterung und Vereinfachung krystallographisch-optischer Untersuchungen. Berlin, 1895. 8°.

Faciola O. — Istituzioni sintetiche di un sistema universale di autosismografi differenziali ecc. Messina, 1895. 8°.

Martorelli G. — Monografia illustrata degli uccelli di rapina in Italia. Milano, 1895. 4°.

Millosevich E. — Don Eugenio dei Principi Ruspoli. Roma, 1895. 8°.

Monari A. e *Scoccianti L.* — La piridina nei prodotti della torrefazione del Caffè. (Ministero dell'Interno, Lab. Chim. Dir. San. pub.). Roma, 1895. 4°.

Oppermann A. e Schuchhardt C. — Atlas der vorgeschichtlichen Befestigung in Nieder-Sachsen. Heft III. IV. Hannover, 1890-94. 4°.

Pagliani L. e *Guerci C.* — Relazione intorno alla coltivazione delle risaie (Ministero dell'Interno. Lab. chim. Dir. San. pub.). Roma, 1895. 4°.

Pavesi P. — Il ponte Lusertino. Pavia, 1895. 8°.

Slossich M. — Osservazioni sul Solenophorus megalocephalus. Trieste, 1895. 8°.

Trabucco G. — Nummulites et Orbitolites dell'arenaria macigno del bacino eocenico di Firenze. Pisa, 1894. 8°.

Id. — Sulla vera età del calcare di Gassino. Roma, 1895. 8°.

Zeuner G. — Neue Sterblichkeitstafeln für die Gesammt bevölkerung des Kön. Sachsen. Berlin, 1894. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 marzo 1895.

A. Messedaglia Vicepresidente

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Di una formola relativa all'integrale ellittico completo di prima specie, contenuta in una precedente Nota, e di altre a quella affini.* Nota di Davide Besso, presentata dal Socio Beltrami.

« Nella Nota *Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche* [1] ho avvertito che l'equazione differenziale

$$\xi^2(1-\xi)\frac{d^3U}{d\xi^3}+\xi\left(3-\frac{9}{2}\xi\right)\frac{d^2U}{d\xi^2}+\left(1-\frac{13}{4}\xi\right)\frac{dU}{d\xi}-\frac{1}{8}U=0 \qquad \text{I}$$

è soddisfatta da $K^2(k)$, quando si ponga

$$k=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{2}},$$

e che è

$$\frac{4}{\pi^2}K^2(k)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^3\xi+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\xi^2+\ldots.$$

« Ho poi osservato che la stessa serie è eguale a

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}K(\sqrt{\xi}\ \mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta,$$

e che in conseguenza è

$$\int_0^1\frac{K(ax)}{\sqrt{1-x^2}}dx=K^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}\right) \qquad (1).\ [2]$$

[1] Inserita in questi Rendiconti (vol. III, 2.° sem., fasc. 12, serie 5ª).
[2] Ivi è scritto, per errore, a^4 in luogo di a^2.

« Alcune altre formole, affini alla (1), sono qui dimostrate.

« I. L'equazione I si può trasformare nella

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2(1-\xi)\frac{d^2U}{d\xi^2}+\left(\xi-\frac{3}{2}\xi^2\right)\frac{dU}{d\xi}-\frac{1}{4}\xi U\right]+\frac{1}{8}U=0$$

dalla quale, ponendo $U = K^2(k)$, e rammentando che è

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2K}{d\xi^2}+\left(1-\frac{3}{2}\xi\right)\frac{dK}{d\xi}-\frac{1}{16}K=0,$$

si ricava

$$\int K^2(k)\,d\xi=\xi K^2(k)-16\,\xi^2(1-\xi)\left(\frac{dK}{d\xi}\right)^2+\text{cost.}$$

e in conseguenza

$$\int_0^{a^2} K^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{2}}\right)d\xi=a^2K^2(c)-4\left[E(c)-(1-c^2)K(c)\right]^2 \quad (2)$$

ove è

$$c=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}.$$

« 2. Ora posto

$$\varphi(a)=\int_0^a K(t)\sqrt{a^2-t^2}\,dt,$$

si ha, in forza della (1),

$$\varphi'(a)=a\,K^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}\right),$$

dalla quale e dalla (2) risulta

$$\int_0^1 K(ax)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}K^2(c)-\frac{2}{a^2}\left[E(c)-(1-c^2)K(c)\right]^2 \quad (3)$$

e in particolare

$$\int_0^1 K(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi^2}{8K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad (3')$$

« 3. L'equazione differenziale

$$x(1-x^2)y''+(1-3x^2)y'-xy=0$$

soddisfatta dalla $K(x)$, si può mettere nella forma

$$\int y\psi\,dx=x(1-x^2)(y\theta'-y'\theta)+\text{cost.} \qquad \text{II}$$

in cui θ significa una funzione arbitraria, ed è

$$\psi=x(1-x^2)\theta''+(1-3x^2)\theta'-x\theta.$$

« Colla posizione

$$\theta = x(1-x^2)^\lambda \quad , \quad y = \mathrm{K}(x),$$

si trova

$$\left.\begin{aligned} &4(\lambda+1)^2\int_0^a (1-x^2)^{\lambda+1}\mathrm{K}(x)\,dx \\ &-(8\lambda^2+8\lambda+3)\int_0^a (1-x^2)^\lambda \mathrm{K}(x)\,dx + 4\lambda^2\int_0^a (1-x^2)^{\lambda-1}\mathrm{K}(x)\,dx = \\ &= 2a(1-a^2)^\lambda\left[\left((1-(\lambda+1)a^2\right)\mathrm{K}(a) - \frac{1}{2}\mathrm{E}(a)\right] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

« Quando si faccia tendere a ad 1 e si ponga

$$\lambda = \frac{2r+1}{2}\,(r \geqq 0) \quad , \quad \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}}\mathrm{K}(x)\,dx = \mathrm{W}_r,$$

si ricava dalla (4)

$$(2r+3)^2\,\mathrm{W}_{r+2} - (8r^2+16r+9)\,\mathrm{W}_{r+1} + (2r+1)^2\,\mathrm{W}_r = 0 \;[1] \qquad (5)$$

mediante la quale, e i valori di W_0 e W_1 dati dalle (1) (3'), si potrà calcolare la W_r per ogni valore dell'intero positivo r.

« 4. Colla sostituzione

$$\theta = (1-x^2)^\lambda$$

si ricava dalla II

$$\left.\begin{aligned} (2\lambda+1)^2\int_0^a x(1-x^2)^\lambda \mathrm{K}(x)\,dx - 4\lambda^2\int_0^a x(1-x^2)^{\lambda-1}\mathrm{K}(x)\,dx = \\ = (1-a^2)^\lambda\left[\mathrm{E}(a) + \left((2\lambda+1)a^2-1\right)\mathrm{K}(a)\right] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

« Ora mediante la serie

$$\mathrm{K}(ax) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 a^4x^4 + \cdots\right\}$$

[1] Moltiplicando per $\sqrt{1-x^2}$ i due membri della nota relazione

$$\mathrm{K}(x) = \frac{1}{1+x}\mathrm{K}(z) \quad ,$$

nella quale è

$$z = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \quad ,$$

si ottiene

$$\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{K}(z) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{K}(x).\right)$$

E da questa, rammentando che è

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{K}(x) < \frac{\pi}{2},$$

risulta

$$\lim\left(\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{K}(z)\right)_{z=1} = 0.$$

si ottiene facilmente

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{K}(ax)\, dx = \frac{\pi}{2} \frac{\mathrm{A}r\, \mathrm{sen}a}{a} \tag{7}$$

e in particolare

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{K}(x)\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

« Perciò dalla (6) risulterà

$$\int_0^1 x(1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \mathrm{K}(x)\, dx = \left(\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots 2r}\right)^2 \frac{\pi^2}{4} \tag{8}$$

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Dopo aver trattato in due Note precedenti [1] il caso di un' equazione differenziale lineare (omogenea) di ordine qualunque n, tale che un sistema di integrali indipendenti di essa $y_1, y_2, \ldots y_n$ soddisfacciano a un certo numero ($\geq n-2$) di equazioni algebriche rappresentanti complessivamente una *curva* nello spazio S_{n-1} delle coordinate (projettive) omogenee y_i, mi propongo di studiare adesso il caso in cui le stesse equazioni algebriche (che si dovranno supporre in numero $\geq n-3$) rappresentino una *superficie* di quello spazio; il caso cioè in cui la curva Γ definita dall'equazione differenziale proposta [2], pur essendo trascendente [3], è contenuta in *una* superficie algebrica. In questa prima Nota (e in un' altra successiva) mi occuperò soltanto delle equazioni differenziali lineari del 4° ordine ($S_{n-1} \equiv S_3$), supponendo perciò che quattro soluzioni indipendenti y_1, y_2, y_3, y_4 siano legate da una (ed una sola) equazione algebrica. Per le equazioni differenziali di ordine superiore al quarto mi propongo anche di esporre alcune considerazioni generali, che formeranno probabilmente oggetto di una terza Nota.

« Questo caso che qui mi propongo di studiare non è ancora stato trattato sistematicamente (ch' io sappia almeno) in modo completo (nemmeno per le equazioni differenziali di 4° ordine [4]). In Francia, Goursat e Halphen

(1) Cfr. questi Rend., pp. 18-26 e 51-57.

(2) loc. cit., p. 19.

(3) E tale possiamo supporla, perchè, se fosse algebrica, si ricadrebbe nel caso già trattato nelle mie due Note citate.

(4) Per le equazioni differenziali lineari di 3° ordine non si può nemmeno porre la questione analoga, perchè l'esistenza di una sola equazione algebrica fra le soluzioni y_1, y_2, y_3 richiederebbe già che fosse algebrica la stessa curva Γ.

hanno studiato in alcune Note (Compt. Rend. t. XCVII, C, CI; Bull. Soc. Math. de Fr., t. XI) il caso in cui la superficie algebrica contenente la curva Γ è una quadrica, oppure la sviluppabile biquadratica circoscritta a una cubica sghemba; e del primo di questi casi Halphen si è occupato anche più a lungo nella Memoria: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du 4^me ordre* (Acta Math., vol. III, p. 325-380). In Germania, Ludw. Schlesinger (Diss. Berlin, 1887) si era proposta la stessa nostra questione (sempre per le equazioni differenziali di quarto ordine) in modo abbastanza generale; ma solo in alcuni casi particolarissimi (quelli stessi trattati dai due matematici francesi, e quello del cono) gli riuscì di giungere a un risultato soddisfacente. [1] Io tratterò invece la questione da un punto di vista completamente geometrico, e mi varrò soprattutto dei risultati sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse, che il Sig. Enriques ha ottenuti nella sua Memoria (e Nota successiva) inserte negli Atti dell' Ist. Veneto, serie 7ª, t. IV e V, e che da me furono completati recentemente colla considerazione delle omografie a punti uniti multipli (cfr. questi Rend., p. 149). Che queste superficie appunto debbano comparire nelle nostre ricerche, è chiaro, perchè le diverse operazioni contenute nel *gruppo monodromico* dell'equazione differenziale proposta daranno altrettante omografie trasformanti in sè stessa la superficie algebrica (unica), in cui la curva Γ (supposta trascendente) deve essere contenuta.

« 2. Sia data un' equazione differenziale lineare (omogenea) del 4° ordine:

$$y^{IV} + A_1 y''' + A_2 y'' + A_3 y' + A_4 y = 0$$

priva di punti singolari essenziali (irregolari), i cui coefficienti si suppongono funzioni algebriche di una variabile indipendente x, e precisamente tutte funzioni razionali di uno stesso ente algebrico (o superficie di Riemann) di genere qualunque. Si supponga inoltre che quattro integrali indipendenti $y_1, .. y_4$ di quest' equazione differenziale siano legati da *una* equazione algebrica (omogenea) a coefficienti costanti (di grado superiore al primo); vale a dire che, interpretate le y_i come coordinate (projettive) omogenee di un punto (y) dello spazio ordinario, la curva Γ descritta da questo punto al variare della x sia contenuta in *una* superficie algebrica F.

« Se il gruppo monodromico dell' equazione differenziale proposta è finito (non contiene cioè che un numero finito di operazioni), le y_i saranno anch' esse funzioni *algebriche* della x (senza essere tuttavia, in generale, fun-

[1] Mentre questa nota era in corso di stampa, avendo avuta occasione di sfogliare alcuni volumi delle Memorie di questa illustre Accademia, mi sono accorto che di alcune questioni, fra quelle di cui vado ora occupandomi, è fatto anche cenno, sempre da un punto di vista puramente analitico, in taluni lavori del prof. D. Besso, inserti nei volumi XIV e XIX di dette Mem. (ser. 3ª). Cfr. ad es., per il caso di una curva Γ contenuta in una quadrica, la Memoria a pp. 219-231 del vol. XIX cit.

zioni razionali dello stesso ente algebrico primitivo). Se questo gruppo è infinito, potranno ancora le y_i differire da funzioni algebriche solo per uno stesso fattore comune a tutte (e che dovrà comportarsi moltiplicativamente sopra ogni superficie di Riemann, sulla quale dette funzioni algebriche risultino razionali (1)). *In ogni altro caso la superficie* F *dovrà certo ammettere infinite trasformazioni projettive in sè stessa.*

« Ora, il gruppo di *tutte* le trasformazioni projettive della superficie F in sè stessa è necessariamente *algebrico;* e perciò, se contiene un numero infinito di operazioni, è certamente *continuo,* o *misto.* In quest'ultimo caso esso si comporrà di un numero finito di schiere continue, *una* delle quali sarà di per sè un gruppo (continuo) (2). Ma, se il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta contiene a sua volta operazioni di un certo numero $k > 1$ di queste schiere (e potranno anche non essere tutte, purchè queste k formino di per sè un gruppo), noi potremo passare dalla superficie di Riemann data ad una seconda in corrispondenza $(k, 1)$ colla prima, sulla quale (seconda) i coefficienti A_i siano ancora funzioni razionali, e, di più, i diversi cammini chiusi corrispondano soltanto a sostituzioni lineari delle y_i, quindi a trasformazioni projettive della superficie F, contenute in quella delle k schiere, che è di per sè un gruppo (continuo) (3). A questa *separazione* delle k schiere

(1) Cfr. anche questi Rend., p. 25. È chiaro però che in questi due casi la curva Γ risulterebbe essa stessa algebrica.

(2) Cfr. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* vol. I, cap. 18; vol. III, p. 180.

(3) Basta perciò ricordare (cfr. Lie, op. cit., vol. I, p. 321-22) che le operazioni di un gruppo misto G si ottengono moltiplicando quelle del gruppo continuo più ampio G′ in esso contenuto per un certo numero (nel nostro caso k, l'identità inclusa) di altre operazioni (soddisfacenti a determinate condizioni, che qui non starò a ripetere). D'altra parte sappiamo che il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta ammette un certo numero $2p + m$ di operazioni (sostituzioni lineari) generatrici, che si possono far corrispondere ai $2p$ tagli canonici, ritenuti ad es. uscenti tutti da uno stesso punto, e a certe linee che congiungono quest'ultimo punto coi punti singolari dell'equazione differenziale, supposti in numero di m (e precisamente in questo senso, che un opportuno sistema di integrali y indipendenti, nell'atto di attraversare una di queste linee, invece di variare con continuità, subisca una determinata di quelle sostituzioni lineari). Di queste $2p + m$ operazioni fondamentali, alcune (forse) saranno contenute nel gruppo continuo G′; le altre, e sia H una qualunque di queste, *permuteranno* fra loro in modo determinato le k schiere di G (una delle quali è appunto G′), intendendo che la permutazione sia precisamente tale da sostituire ad ogni schiera quell'altra, che è il prodotto di questa stessa per l'operazione H considerata. Immaginiamo ora altre $k - 1$ superficie di Riemann, tutte identiche a quella data, e ad essa sovrapposte; e ognuna di queste k si faccia corrispondere a una determinata delle k schiere del gruppo G. Di più, immaginiamo di incidere queste stesse superficie lungo le linee h che corrispondono alle operazioni H; e, volta per volta, raccordiamole l'una coll'altra, lungo queste stesse linee, secondo la permutazione che la corrispondente operazione H determina fra le k schiere del gruppo G. Avremo così una nuova superficie di Riemann (complessiva), che rappresenterà certo un ente algebrico *irriduttibile* (se tale era quello primitivo), perchè le operazioni H, combinate in modo opportuno, permettono di passare da una qualunque delle k schiere a ogni

corrisponderà come operazione analitica la risoluzione di un'equazione algebrica di grado k, a coefficienti razionali sulla superficie di Riemann primitiva (e in particolare di un'equazione binomia, quando dal gruppo continuo si può passare a ciascuna delle altre $k-1$ schiera mediante potenze di una stessa operazione del gruppo monodromico) [1].

« Noi potremo dunque supporre, nella ricerca che ci siamo proposta, che il gruppo monodromico della nostra equazione differenziale sia contenuto nel gruppo *continuo* più ampio di trasformazioni projettive della superficie F in sè stessa. Ogni altro caso potrebbe ridursi a questo coll'estendere in modo opportuno il campo di razionalità primitivo [2].

« 3. Supponiamo anzitutto che la superficie F ammetta un gruppo continuo (soltanto) ∞^1 di trasformazioni projettive. Dalla mia Nota cit. (cfr. questi Rend., p. 152) risulta che i diversi casi possibili devono tutti rientrare in uno dei due seguenti:

« 1° Le infinite omografie del gruppo hanno quattro punti doppi (comuni) distinti e indipendenti (senza escludere con ciò che vi possano essere anche infiniti punti doppi);

« 2° L'equazione caratteristica di un' omografia generale del gruppo ha una sola radice quadrupla.

« Nel primo caso è chiaro (data la forma canonica a cui le equazioni del gruppo potranno ridursi) che fra gli integrali dell'equazione differenziale proposta, ve ne saranno quattro (almeno, e indipendenti) puramente moltiplicativi. L'equazione è dunque integrabile con sole quadrature e funzioni

---

altra, sicchè i raccordamenti eseguiti devono anche permettere di passare in modo continuo da uno *strato* qualsiasi ad ogni altro. Le funzioni razionali sulla prima superficie sono tali anche sulla nuova (ritenuto che esse assumano ora uno stesso valore in ogni gruppo di k punti sovrapposti). E infine, un cammino chiuso qualunque di questa nuova superficie, o evita le linee h, e allora corrisponde certo a una sostituzione lineare contenuta nel gruppo G'; oppure ne incontra qualcuna, ma allora deve incontrarle complessivamente un tal numero di volte, che il prodotto delle corrispondenti operazioni H muti in sè stessa almeno una schiera di G (nel senso che questa schiera moltiplicata per quel prodotto, riproduca sè stessa); e quel prodotto dovrà allora anche appartenere a G'. In ogni caso dunque la sostituzione corrispondente al cammino chiuso è contenuta in G'. (Per tali costruzioni di superficie di Riemann, operando su di una superficie data ad arbitrio come se fosse un piano, cfr. Hurwitz, Math. Ann. XXXIX, pag. 51 e seg.).

(1) Più generalmente, il *Gruppo* dell'equazione algebrica che dovremo risolvere coinciderà col gruppo delle permutazioni (o sostituzioni) che le operazioni H considerate nella nota prec. e i diversi loro prodotti determinano sulle k schiere del gruppo G (cfr. anche Vessiot; Ann. Éc. Norm. Sup., 1892, p. 236).

(2) Quest'osservazione, d'altronde semplicissima, ci dispenserà quindi dal cercare volta per volta, se e come i singoli gruppi continui che incontreremo possano venire ampliati (*erweitert*).

esponenziali (le quadrature essendo da eseguirsi su funzioni *razionali* nel campo prestabilito).

« E a questo stesso risultato si giunge anche nel 2° caso. Ad es., se vi è un solo punto unito quadruplo (se cioè la radice quadrupla dell'equazione caratteristica non annulla tutti i subdeterminanti di 3° ordine del determinante che costituisce il 1° membro di essa), le equazioni del gruppo potranno ridursi alla forma:

$$y_1^{(1)} = y_1 + \lambda_1 y_2 t + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 y_3 t^2 + \frac{1}{6} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 y_4 t^3$$

$$y_2^{(1)} = y_2 + \lambda_2 y_3 t + \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda_3 y_4 t^2$$

$$y_3^{(1)} = y_3 + \lambda_3 y_4 t$$

$$y_4^{(1)} = y_4$$

dove le λ sono costanti, e t è il parametro variabile (cfr. Pittarelli, *I gruppi continui projettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario*; Ann. di Mat., ser. 2ª, t. XXII, p. 285).

« Da queste formule si deduce che la y_4 è puramente moltiplicativa (1); che il rapporto $\frac{y_3}{y_4}$ si comporta additivamente rispetto a tutte le operazioni del gruppo, ed è perciò un integrale Abeliano sulla data superficie di Riemann; e che infine le funzioni:

$$f_1 = \frac{\lambda_2 y_3^2 - 2 \lambda_3 y_2 y_4}{y_4^2} \qquad f_2 = \frac{3 \lambda_3^2 y_1 y_4^2 - 3 \lambda_1 \lambda_3 y_2 y_3 y_4 + \lambda_1 \lambda_2 y_3^3}{y_4^3}$$

si conservano numericamente inalterate rispetto alle operazioni dello stesso gruppo ∞^1, dunque anche rispetto a quelle del *Gruppo di razionalità* dell'equazione differenziale proposta (che è contenuto nel precedente, oppure coincide addirittura con esso (2)), e sono perciò *razionali* sulla stessa superficie di Riemann (3). E poichè la y_3 non è che il prodotto di y_4 per il rapporto $\frac{y_3}{y_4}$, la y_2 è funzione razionale di y_3, y_4 e f_1, e la y_1 è funzione pure razionale

(1) Non si può escludere infatti che essa si riproduca soltanto a meno di certi fattori, i quali dovranno comparire allora anche in tutte le altre y.

(2) A meno che lo stesso *gruppo di razionalità* non contenga più sostituzioni lineari corrispondenti a una medesima trasformazione projettiva del gruppo ∞^1 considerato. Ma quelle sostituzioni lineari si potrebbero allora ottenere applicando prima la trasformazione projettiva corrispondente, e moltiplicando poi ancora tutte le y per uno stesso fattore, il che non altererebbe nemmeno le funzioni f_1 e f_2, essendo esse omogenee (di grado zero).

(3) Le equazioni $f_1 = \text{cost.}$ e $f_2 = \text{cost.}$ rappresentano rispettivamente due fasci di superficie; la prima, di coni quadrici (col vertice comune nel punto $y_2 = y_3 = y_4 = 0$); la seconda, di rigate cubiche di Cayley. Due superficie appartenenti rispettivamente a questi

di y_2, y_3, y_4 e f_2, si conclude che effettivamente tutte quattro le y_i potranno ancora esprimersi con sole quadrature (e funzioni esponenziali).

« Gli altri gruppi ∞^1, in cui l'equazione caratteristica di un'omografia generale ha una sola radice quadrupla, rientrano tutti in quest'ultimo come casi particolari. Se vi è una sola retta di punti uniti, e gli altri due punti doppi coincidono in un punto di questa ([1]), si può aggiungere che la superficie F dovrà contenere un fascio razionale di coniche, segato dai piani per una retta.

« In ogni caso poi, se vi sono due rette di punti uniti, distinte o coincidenti (omografia *rigata*, o *rigata speciale* di Segre), la superficie F sarà una rigata colle stesse due rette per direttrici (contenuta cioè nella congruenza lineare determinata da queste stesse direttrici). E se il gruppo si compone di sole omologie (generali o speciali), la superficie F sarà certamente un cono, e verrà quindi mutata in sè stessa da ∞^4 trasformazioni così fatte (più, forse, altre omografie). Di quest'ultimo caso dovremo perciò occuparci più avanti.

« 4. Passiamo al caso in cui la superficie F ammette un gruppo continuo ∞^2 (e non più) di trasformazioni projettive. Queste superficie si dividono in quattro categorie ([2]):

« 1.° *Superficie* W *di Klein-Lie* (cfr. Compt. Rend., t. LXX, pp. 1222 - 1226);

« 2.° *Rigate (di ordine* ≥ 4*) con due direttrici rettilinee infinitamente vicine*

« 3.° *Superficie contenenti un fascio di coniche, segato dai piani per una retta*;

« 4.° *Superficie di* 6° *ordine a sezioni ellittiche*, rappresentabili sul piano con un sistema di cubiche aventi a comune un flesso e la relativa tangente.

« Nel primo caso non abbiamo che le superficie di grado superiore al secondo, la cui equazione può mettersi sotto la forma:

$$y_1^{\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2}\, y_3^{\alpha_3}\, y_4^{\alpha_4} = \text{cost.}$$

---

due fasci hanno sempre a comune la retta $y_3 = y_4 = 0$, da contarsi tre volte; l'intersezione residua è una cubica sghemba (variabile), le cui equazioni (sotto forma parametrica) sarebbero date dalle stesse formule di trasformazione, dove y_1, y_2, y_3, y_4 si supponessero coordinate di un punto arbitrario di essa. Queste ∞^2 cubiche sono infatti le *trajettorie* determinate nello spazio dal nostro gruppo ∞^1; e la superficie F dovrebbe contenere in questo caso un fascio (non necessariamente razionale) di tali curve.

([1]) Omografia [(31)] di Segre (Mem. di quest'Acc., ser. 3ª, vol XIX) e [(100)] di Predella (Ann. di Mat., ser. 2ª, vol. XVII). È questo il caso n° 9 (p. 292) della Mem. cit. di Pittarelli.

([2]) Cfr. Enriques, Mem. cit., p. 44. Nella mia Nota ultima è dimostrato che anche la considerazione delle omografie con punti uniti multipli non conduce a nessun altro caso (cfr. questi Rend., p. 155).

dove le α sono (o almeno si possono ritenere) numeri interi, aventi per somma zero. Quest'unico caso si presenta infatti quando i quattro punti doppi (che risultano comuni alle ∞^2 omografie del gruppo) sono tutti distinti; negli altri casi si ottengono come superficie W algebriche (all'infuori dei piani uniti) soltanto *rigate cubiche di Cayley*, o *quadriche;* dunque superficie che ammettono rispettivamente ∞^3 o ∞^6 trasformazioni projettive [1].

« È chiaro che in questo caso l'equazione differenziale proposta ammetterà ancora (come nel 1° caso del n° prec.) quattro soluzioni indipendenti puramente moltiplicative, e si potrà perciò integrare con sole quadrature (e funzioni esponenziali) [2].

« 5. Nel secondo caso le equazioni del gruppo ∞^2 possono mettersi sotto la forma (cfr. Enriques, l. c., p. 35):

$$y_1^{(1)} = y_1 + \alpha y_2 \qquad y_3^{(1)} = \varrho^{p+1} y_3$$
$$y_2^{(1)} = \varrho y_2 \qquad y_4^{(1)} = \varrho^p (y_4 + \alpha y_3)$$

dove α e ϱ sono i parametri, e p è una costante (razionale, se il gruppo deve essere (come in questo caso) algebrico, e diversa da 1 e da $\frac{1}{2}$ se la superficie F non deve essere una quadrica, nè una rigata di Cayley).

« La y_2 e la y_3 si comportano dunque moltiplicativamente rispetto a tutte le operazioni del gruppo, e i rapporti $\frac{y_1}{y_2}$ e $\frac{y_4}{y_3}$ subiscono sostituzioni lineari intere (sono dunque integrali di funzioni moltiplicative) [3]. L'equazione diffe-

[1] La rigata di Cayley si ottiene quando vi è un solo punto unito quadruplo (cfr. Compt. Rend., t. LXX, p. 1224). In ogni altro caso, l'equazione della corrispondente superficie W (che qui vogliamo sia algebrica) si ottiene ponendo un'equazione lineare tra funzioni algebriche (razionali, intere) delle coordinate (non omogenee), che risultano di grado non superiore al secondo. L'equazione non può dunque rappresentare che una quadrica (o un piano).

[2] È notevole il fatto che questo gruppo continuo ∞^2 può essere *ampliato* in modo semplicissimo, quando due o tre delle α siano eguali fra loro (nel qual caso appunto le y corrispondenti possono venir comunque permutate). Ciò si verifica ad es. per la superficie cubica $y_1^3 - y_2 y_3 y_4 = 0$. Il caso in cui la curva Γ è contenuta in una tal superficie (o in una varietà analoga $y_1^p - y_2 y_3 \cdots y_{p+1} = 0$ di S_p, quando si trattasse di un'equazione differenziale di ordine $p+1$) è stato studiato analiticamente dal signor Wallenberg in una Nota escita alcune settimane or sono (Journ. de Crelle, t. CXIV, 3° fasc.). E il risultato da lui ottenuto è una conseguenza immediata del fatto che il gruppo delle trasformazioni projettive ammesse da questa varietà di S_p si compone (per $p \geqq 3$) di un gruppo continuo transitivo ∞^{p-1} coi punti uniti fissi, e delle altre $p!-1$ schiera, che si ottengono moltiplicando questo gruppo per le sostituzioni lineari corrispondenti alle diverse permutazioni delle $y_2, y_3, \cdots y_{p+1}$.

[3] E tutto questo continuerebbe a sussistere anche se assieme alle $y^{(1)}$ considerate di sopra se ne dovessero considerare (e così potrebbe occorrere) altre, differenti da queste per uno stesso fattore, forse anche variabile. Lo stesso dicasi per i due casi seguenti (cfr. anche la nota (2) a p. 236).

renziale proposta è ancora integrabile per quadrature e funzioni esponenziali, e ammette in particolare due soluzioni distinte puramente moltiplicative.

« Nel 3° caso le equazioni del gruppo possono mettersi sotto la forma:

$$y_1^{(1)} = y_1 + 2\alpha y_2 + \alpha^2 y_3 \qquad y_3^{(1)} = \varrho^2 y_3$$
$$y_2^{(1)} = \varrho (y_2 + \alpha y_3) \qquad y_4^{(1)} = \varrho^p y_4$$

dove ancora α e ϱ sono i parametri, e p è una costante arbitraria (nel nostro caso razionale). La y_3 e la y_4 si comportano dunque moltiplicativamente; il rapporto $\frac{y_2}{y_3}$ subisce soltanto delle sostituzioni lineari intere, e infine la funzione $y_1 y_3 - y_2^2$ si comporta anch'essa moltiplicativamente ([1]). Tutte quattro le y si potranno dunque esprimere con sole quadrature e funzioni esponenziali.

« Nel 4° caso infine, le equazioni del gruppo ∞^2 si possono mettere sotto la forma (cfr. Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. V, p. 3 della Nota cit.):

$$y_1^{(1)} = \alpha^3 y_1 + 3\alpha^2 \beta y_2 + 3\alpha\beta^2 y_3 + \beta^3 y_4 \qquad y_3^{(1)} = \alpha y_3 + \beta y_4$$
$$y_2^{(1)} = \alpha^2 y_2 + 2\alpha\beta y_3 + \beta^2 y_4 \qquad y_4^{(1)} = y_4$$

sicchè y_4 è ancora funzione moltiplicativa, $\frac{y_3}{y_4}$ è l'integrale di una tale funzione, e le due funzioni:

$$y_3^2 - y_2 y_4 \quad \text{e} \quad y_1^2 y_4^2 - 6 y_1 y_2 y_3 y_4 + 4 y_1 y_3^3 + 4 y_2^3 y_4 - 3 y_2^2 y_3^2$$

sono esse pure moltiplicative. Le y si possono dunque esprimere anche in quest'ultimo caso con sole quadrature e funzioni esponenziali, più (per y_1) un'estrazione di radice quadrata ([2]).

« Anche se la superficie F ammette ∞^2 trasformazioni projettive in sè stessa, l'integrazione dell'equazione differenziale proposta non richiede dunque operazioni più elevate delle *quadrature*. Di queste però ne possono occorrere, e ne occorreranno anzi in generale (almeno nei tre ultimi casi), *due successive*, la prima essendo da eseguirsi su di una funzione razionale. In un'altra Nota vedremo come ciò sia d'accordo colla *composizione* dei diversi gruppi ∞^2 che a noi si sono presentati, e passeremo poi al caso in cui la superficie F ammette ∞^3 o più trasformazioni projettive ».

([1]) Le omografie di questo gruppo ∞^2 mutano infatti in sè stesso il cono $y_1 y_3 - y_2^2 = 0$. Questo cono ha il vertice nel punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, contiene come generatrice fissa la retta $y_2 = y_3 = 0$, e è toccato lungo questa generatrice dal piano fisso $y_3 = 0$. Di più, anche la sezione piana determinata nel cono dal piano $y_4 = 0$ è mutata in sè stessa da tutte le omografie del gruppo (cfr. Enriques, Mem. cit., pp. 23, 40).

([2]) Quest'ultimo gruppo ∞^2 si compone delle omografie che mutano in sè stessa una cubica sghemba con un punto unito (fisso) ($y_2 = y_3 = y_4 = 0$) su di essa; e le due ultime funzioni, che abbiamo detto essere *moltiplicative*, eguagliate a zero, rappresentano rispettivamente il cono quadrico che projetta la cubica da questo punto unito, e la sviluppabile biquadratica circoscritta alla stessa curva. È chiaro perciò che dette funzioni dovranno appunto riprodursi, dopo una qualunque trasformazione del gruppo, a meno di certi fattori.

Elettricità. — *Sulla costante dielettrica di alcune sostanze e particolarmente del vetro* (¹). Nota di D. MAZZOTTO, presentata dal Socio BLASERNA.

« 1) Il vetro è una delle sostanze la cui costante dielettrica, K, non solo non soddisfa alla formula di Maxwell $K = n^2$, almeno quando si prenda per n l'indice di rifrazione ottica (secondo Arons e Rubens [2] vi soddisfa quando n e K sono determinati con oscillazioni rapide), ma presenta valori assai discordi nelle determinazioni dei varî autori. Uno dei risultati che più si allontana dalla media degli altri è quello ottenuto da Lecher [3] coll'apparecchio che porta il suo nome, ond'io, avendo in questi ultimi tempi acquistata una certa pratica nell'uso dell'apparato stesso, credetti opportuno intraprendere con esso alcune ricerche rivolte specialmente allo scopo di determinare, in circostanze piuttosto variate, la costante dielettrica del vetro, deducendola da confronti di capacità, e vedere se si confermava il risultato del Lecher il quale avea trovato per essa costante un valore assai elevato (7,3) e maggiore colle oscillazioni rapidissime che con quelle di media e bassa frequenza. Ciò sarebbe in contraddizione, sia coi risultati di altri esperimentatori, sia colle vedute teoriche secondo le quali all'aumentare del numero delle vibrazioni, il valore di K si dovrebbe abbassare avvicinandosi al limite n^2 (2,36 circa) che dovrebbe raggiungere quando le oscillazioni elettriche raggiungessero la frequenza di quelle ottiche.

« 2) Prima di incominciare le determinazioni col vetro intrapresi una serie di esperienze con altri corpi (petrolio, olio, solfo e paraffina), che potessero servire come termine di paragone dell'attendibilità dei risultati, determinando per essi, come poi pel vetro, la costante dielettrica con lunghezze d'onda variabili entro limiti piuttosto estesi e con condensatori di forma o dimensioni differenti, e così assicurarmi che i risultati non fossero accidentali e valevoli solo nelle condizioni speciali in cui erano ottenuti, il che era ben da temersi in una ricerca come questa in cui varî esperimentatori ottennero risultati tanto differenti.

« 3) I condensatori usati in queste ricerche furono quattro, tutti di lamiera d'ottone; tre di questi, che chiamerò *grande medio* e *piccolo*, erano circolari, colle lamine mantenute a distanze invariabili, e rispettivamente del diametro 9,6; 19,9 e 22,9 cm., dello spessore di 0,14; 0,14 e 0,044 cm. ed alla distanza di 5,11; 5,11 ed 1,13 cm.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Sassari.

(²) Arons et Rubens, Wied. Ann. 42° 581 (1891); 45° 381 (1892).

(³) Lecher, Wied. Ann. 42°, pag. 142 (1891).

« Il quarto condensatore era rettangolare (10,07 × 15,39 cm.) colle lamine di spessore 0,15 cm., le quali potevano fissarsi a quattro distanze differenti $\delta_0 = 2,60$ $\delta_6 = 4,20$ $\delta_4 = 2,80$ $\delta_2 = 1,40$ $\delta_1 = 0,70$ cm.

« I due condensatori circolari medio e piccolo, venivano immersi direttamente nei dielettrici liquidi contenuti in recipienti di terra; il condensatore rettangolare serviva pei dielettrici solidi: quando le lamine aveano la distanza δ_0, esse potevano chiudere esattamente fra di loro una lamina di solfo, di paraffina o di vetro da specchi, di spessore uguale alla distanza delle armature ed i cui orli coincidevano con quelli di quest'ultime; quando invece le lamine aveano le distanze δ_6, δ_4, δ_2, δ_1 poteano chiudere esattamente fra di loro rispettivamente 6, 4, 2, 1 lastre di vetro da specchi tutte di egual spessore e cogli orli pure coincidenti con quelli delle lamine d'ottone. Il condensatore circolare grande si usò solo come condensatore ad aria, per avere come termine di confronto, nelle determinazioni delle capacità, un condensatore ad aria di capacità piuttosto rilevante.

« 4) La costante dielettrica si calcolava facendo il rapporto fra la capacità che presentava uno dei detti condensatori quando conteneva il dielettrico (se solido) od era in esso immerso (se liquido), e quella che presentava il condensatore stessso nell'aria.

« 5) Per eseguire le esperienze si collocava il condensatore al termine dei fili secondarî dell'apparato di Lecher e si ricercava lungo i medesimi la posizione del nodo della vibrazione fondamentale del sistema, cioè di quella che presentava un solo nodo lungo i fili secondarî. Ripetendo queste determinazioni con fili man mano decrescenti da 30 m. a 0,70 m., si ottennero lunghezze d'onda che variarono da 75 m. a 4 m. circa.

« In tutte le presenti esperienze mantenni costante la lunghezza dei fili primarî (21 cm.) e la distanza (2 cm.) e grandezza delle lamine primarie e secondarie, le quali erano costituite da dischi di stagnola del diametro di 36 cm. incollati sopra lastre di vetro rivolte in modo che le superficie metalliche fossero affacciate le une alle altre.

« Incominciai col determinare, usando i fili senza condensatore finale e nel modo descritto nelle mie precedenti Memorie [1], le linee nodali cioè le curve che, per ogni posizione del ponte sui fili secondari, danno la lunghezza d'onda della corrispondente vibrazione fondamentale, così, nelle successive esperienze fatte coi condensatori terminali, bastava conoscere la posizione del ponte al momento della risonanza per ottenere da esse curve la corrispondente lunghezza d'onda.

« 6) Due sono i metodi che seguii per determinare nei singoli casi le capacità del condensatore terminale. Nel primo ricavava il valore di C dalla formula di Cohn ed Heerwagen [2].

[1] Mazzotto, *Nuovo Cimento* 36°, pag. 189 (1894).
[2] Cohn ed Heerwagen, Wied. Ann. 43°, pag. 364 (1891).

$$\operatorname{tg} \frac{2 \pi z}{\lambda} = \frac{\lambda}{8 \pi C \lg_e \frac{b}{a}}$$ in cui

λ = lunghezza d'onda completa
z = distanza del nodo dal condensatore
b = distanza dei fili paralleli = 12 cm.
a = diametro dei fili = 0,085 cm.
C = capacità del condensatore terminale.

« L'altro metodo consisteva nel determinare la capacità del condensatore ad aria che sostituito a quello terminale non alterava la durata della vibrazione, calcolando tale capacità col mezzo delle formule di elettrostatica in funzione delle dimensioni di esso condensatore.

« A tal uopo applicava al termine dei fili secondari un condensatore ad aria costituito da due dischi d'ottone paralleli, del diametro di 19,9 cm. per le capacità grandi e di 4 cm. per le piccole, entrambi dello spessore di 0,14 cm. i quali si potevano spostare parallelamente mediante una vite micrometrica. Avvicinando man mano le lamine, determinava la posizione del nodo fondamentale che corrispondeva alle singole loro distanze; e ripeteva la determinazione per tutte le lunghezze dei fili secondarî usate negli esperimenti, calcolando poi colla formula di Kirchhoff le capacità del condensatore ad aria per le singole distanze delle lamine, poteva riconoscere, col mezzo di una costruzione grafica, le capacità che questo dovrebbe assumere perchè il nodo occupasse una qualunque delle posizioni ottenute coi differenti condensatori terminali. Tale capacità era quella attribuita al condensatore terminale corrispondente, e la chiamerò, per brevità, capacità dedotta colla formula di Kirchhoff.

« È da notarsi che per ogni singolo condensatore terminale e per ogni singola lunghezza dei fili secondarî, la risonanza si otteneva con una lunghezza d'onda differente; per semplificare il riepilogo e la discussione dei risultati, credetti opportuno interpolare graficamente i risultati delle esperienze dirette in modo di riferirli ad alcune lunghezze d'onda tipiche crescenti uniformemente, il che è tanto più opportuno inquantochè, per uguali lunghezze d'onda, il ponte mobile deve trovarsi nelle stesse posizioni, e quindi le esperienze corrispondenti sono meglio paragonabili fra loro.

« Le lunghezze d'onda tipiche prescelte procedevano di 5 in 5 metri da 5 metri a 75. Coi condensatori aventi grandi capacità le onde più corte non potevano determinarsi perchè il nodo riusciva troppo vicino al condensatore.

« 7) Sarebbe troppo lungo e forse superfluo, il riprodurre qui le posizioni dei nodi trovate nelle singole esperienze dirette, od anche semplicemente quelle ricavate dalle costruzioni grafiche per le lunghezze d'onda tipiche; mi limiterò quindi a dare nella Tabella I le capacità dei condensatori terminali ad aria determinate, per le singole lunghezze d'onda, tanto colla formula Cohn ed Heerwagen quanto colla formula Kirchhoff, omettendo, per brevità, di dare le capacità corrispondenti de' condensatori stessi contenenti gli altri dielettrici; queste però si possono ottenere immediatamente moltiplicando i valori della Tabella I pei loro corrispondenti della Tabella II, la quale contiene le costanti dielettriche dei varî mezzi ottenute appunto facendo il rapporto fra quelle due capacità.

Tabella I.	Condensatori circolari			Condensatore rettangolare — distanza delle lamine				
	grande	medio	piccolo	∂_0	∂_6	∂_4	∂_2	∂_1
Dielettrico	aria	aria	aria	aria	aria	aria	aria	aria
Lungh. onda Metri	(CH) Capacità calcolate colla formola Cohn ed Heervagen.							
5	—	7,0	2,4	6,2	4'9	6,3	10,3	—
10	30,8	8,6	3,2	8,5	6,3	7,9	11,5	19,6
15	32,4	9,4	2,7	8,5	6,3	8.1	12,4	19,7
20	36,5	9,7	3,1	9,6	6,6	8,6	13,3	21,7
25	38,4	9,0	3,1	9,6	6,4	8,7	13,6	22,7
30	39,5	9,5	3,0	9,3	6,3	8,8	14,0	23,3
35	39,9	9,4	2,9	9.0	6,2	8;6	14,1	23,8
40	40,3	9,5	3,0	8,8	5,9	8,4	13,9	24,0
45	40,2	9,4	2,9	8,7	5.9	8,2	13.6	24,0
50	40,5	9,4	2,8	8,9	6,0	8,5	13,5	24,3
55	40,9	9,3	2,6	9,0	6,0	8,5	13,6	25,0
60	41,0	9,1	2,3	9,0	6,1	8,6	13,7	24,9
65	41,1	9,0	2,1	8,9	6,2	8,5	13,7	25,2
70	41,0	8,8	2,4	8,9	6,2	8,6	13,7	25,6
75	40,6	8,6	2,9	8,8	6,2	8,6	13,8	26,0
Medie	38,8	9,05	2,75	8,78	6,10	8,33	13,3	23,6
	(K) Capacità determinate colla formola Kirchhoff.							
5	—	—	2,2	7,8	6,2	7,8	10,3	—
10	37,4	8,2	2,5	8,1	5.9	7.6	11,8	24,0
15	37,8	9,0	2,4	8,0	5,9	7,7	12,0	20,2
20	39,8	8,8	2,7	8,7	6,0	7,8	12,3	21,2
25	39,0	8,5	2,6	8,5	5.7	7,7	12,8	21,3
30	38,6	8,4	2,5	8,2	5,5	7,8	12,6	21,7
35	38,4	8,2	2,6	7,9	5,3	7,5	12,5	21,5
40	38,8	8.3	2,7	7,7	5,2	7,3	12,2	21,7
45	38,7	8,4	2,6	7,8	5.3	7,3	12,2	22,1
50	39,0	8,4	2,5	8,0	5,4	7,6	12,2	22,3
55	39,0	8,6	2,5	8,3	5,6	7,8	12,5	22,9
60	39,2	8,6	2,3	8,5	5,8	8,1	12,9	23,7
65	39,3	8,5	2,5	8.4	6,0	8,1	12,9	24,0
70	39,0	8,6	3,0	8,8	6,4	8,4	13,3	24,6
75	33,9	8,3	—	8,5	6,3	8,4	13,0	24,9
Medie	38,8	8,49	2,54	8,21	5,77	7,81	12,4	22,6

« 8) Osservando la Tabella I, e chiamando per brevità (C H) le capacità calcolate colla formula Cohn ed Heerwagen e (K) quelle dedotte colla formula Kirchhoff si vede:

a) Che i valori (C H) sono in generale alquanto maggiori dei corrispondenti (K); il qual fatto si constatò anche nei precedenti miei lavori pel valore delle capacità presentate dai condensatori dell'eccitatore.

b) Che i valori (C H) di uno stesso condensatore si mantengono alquanto al di sotto del valore medio per le minori lunghezze d'onda, ciò che

io credo debba attribuirsi alla perturbazione prodotta dal ponte, la quale influisce di più sul risultato quando il ponte è vicino al condensatore finale, cioè quando le onde sono corte, che quando è lontano e quindi le onde lunghe.

c) Che, prescindendo dai valori cui si riferisce l'osservazione precedente, i valori (C H) e (K), per uno stesso condensatore, si mantengono abbastanza prossimi al loro valore medio, manifestando però una leggera tendenza ad aumentare colla lunghezza d'onda. Le divergenze dal medio sono maggiori nei valori (C H) che nei valori (K). Analoghe osservazioni valgono per le capacità dei condensatori contenenti gli altri dielettrici, le quali si possono ottenere nel modo indicato alla fine del §. 7.

TABELLA II.	Condensatori circolari				Condensatore rettangolare							Medie del vetro
					distanze delle lamine							
	medio	piccolo	medio	piccolo	δ_0	δ_0	δ_0	δ_6	δ_4	δ_2	δ_1	
Dielettrico	petrolio		olio		solfo	paraffina	vetro					vetro
Lungh. onda Metri	Costanti dielettriche dedotte colla formola Cohn ed Heervagen											
5	—	1,66	—	2,00	—	1,57	—	—	—	—	—	—
10	1,85	1,84	2,38	2,32	2,24	1,59	2,99	2,89	2,93	2,80	—	2,90
15	1,80	2,24	2,45	2,81	2,54	1,58	3,74	3,16	3,35	3,30	3,07	3,32
20	1,89	2,10	2,56	2,59	2,39	1,53	3,54	3,29	3,36	3,17	3,26	3,32
25	2,00	2,05	2,70	2,61	2,46	1,57	3,71	3,47	3,42	3,26	3,37	3,45
30	2,02	2,09	2,79	2,71	2,56	1,66	3,92	3,53	3,49	3,28	3,53	3,55
35	2,05	2,13	2,87	2,81	2,66	1,70	4,08	3,83	3,60	3,28	3,64	3,69
40	2,00	2,07	2,85	2,81	2,73	1,72	4,23	3,91	3,71	3,34	3,72	3,78
45	2,02	2,14	2,92	2,86	2,74	1,79	4,26	3,89	3,76	3,42	3,81	3,83
50	2.04	2,33	2,97	2,95	2,67	1,77	4,17	3,87	3,64	3,43	3,84	3,79
55	2,03	2,48	2,98	3,15	2,64	1,76	4,12	3,86	3,61	3,51	3,75	3,77
60	2,06	2,77	3,03	3,54	2,69	1,76	4,14	3,83	3,55	3,43	3,74	3,79
65	2,08	2,85	3,08	3,72	2,75	1,77	4,21	3,83	3,54	3,44	3,69	3,74
70	2,13	2,45	3,16	3,22	2,77	1,77	4,15	3,95	3,50	3,45	3,63	3,74
75	2,18	1.96	3,24	2,57	2,82	1,78	4,21	4,01	3,46	3,48	3,61	3,75
Medie	2,01	2,21	2,85	2,84	2,63	1,63	3,97	3,67	3,50	3,33	3,59	3,61
	Costanti dielettriche dedotte colla formola Kirchhoff											
5	—	2,00	—	2,50	—	—	—	—	—	—	—	—
10	1,93	2,16	2,56	2,80	2,84	1,86	—	3,70	4,08	3,50	—	3,76
15	1,88	2,37	2,69	3,00	2,76	1,61	4,61	3,44	3,87	3,88	4,16	3,99
20	2,00	2,15	2,81	2,67	2,58	1,55	4,13	3,53	3,74	3,80	3,96	3,83
25	2,07	2,12	2,79	2,69	2,61	1,61	4,19	3,66	3,77	3,58	4,15	3,87
30	2,10	2,16	2,95	2,84	2,70	1,67	4,32	3,84	3,76	3,62	4,25	3,96
35	2,11	2,08	2,99	2,77	2,74	1,73	4,45	3,91	3,84	3,61	4,33	4,03
40	2,05	2,00	3,00	2,74	2,74	1,78	4,64	4,02	3,97	3,71	4,39	4,14
45	2,05	2,15	3,04	2,88	2,81	1,81	4,55	3,98	3,97	3,68	4,39	4,11
50	2,06	2,32	3,08	2,92	2,71	1,77	4,44	3,87	3,80	3,65	4,36	4,02
55	2,05	2,36	3,03	3,00	2,67	1,77	4,27	3,84	3,71	3,55	4,22	3,92
60	2,07	2,61	3,08	3,30	2,71	1,77	4,18	3,86	3,58	3,45	4,05	3,82
65	2,09	2,36	3,12	3,00	2,76	1,77	4,23	3,80	3,56	3,48	3,91	3,80
70	1,97	1,70	3,09	2,57	2,70	1,72	4,02	3,67	3,42	3,36	3,78	3,65
75	2,13	—	3,21	—	2,79	1,74	4,19	3,81	3,40	3,52	3,75	3,73
Medie	2,04	2,18	2,96	2,83	2,73	1,73	4,31	3,78	3,73	3,60	4,12	3,92

« 9) Passiamo ad osservare la Tabella II contenente i valori delle costanti dielettriche, K, rammentandoci quanto si è detto in *b*), cioè, che le determinazioni fatte con le minori lunghezze d'onda sono le più affette da errori.

« *Petrolio*. Il valor medio di K è 2,11, valore intermedio e molto prossimo a quelli trovati dagli altri autori [1], ad esclusione del valore 2,42 trovato dal Lecher. Il quadrato dell'indice ottico di rifrazione per lunghezza d'onda infinita sarebbe $n^2 = 2{,}08$ [2] quindi molto prossimo al valore esperimentale.

« Non si osserva variazione sistematica di K col variare della lunghezza d'onda.

« *Olio*. I quattro valori medî di K, molto concordanti, hanno per media 2,87. I valori trovati da altri autori sarebbero: 2,93 (Arons e Rubens colle oscillazioni) valore molto prossimo al mio, e 3,16 (Hopkinson con metodo statico) [3]. Essendo in tal caso $n^2 = 2{,}131$ si vede che il valore esperimentale di K sarebbe sensibilmente maggiore del valore teorico.

« Si osservi però che, secondo le mie esperienze, il valore di K, anche prescindendo dai valori più dubbî ottenuti colle minime lunghezze d'onda, aumenta in modo sensibile col crescere della lunghezza d'onda, e quindi con grandi lunghezze d'onda si avrebbe un valore più prossimo a quello trovato col metodo statico e per le piccole uno più prossimo al valore teorico.

« *Solfo*. Il valore medio trovato per K è 2,68 il quale è intermedio fra i valori 2,9 (J. J. Thomson) e 2,6 (Blondlot) determinati colle oscillazioni Hertziane; staticamente si trovarono valori alquanto maggiori per es. 3,65 (Boltzmann), 3,55 (Cardani).

« *Paraffina*. Il medio valore di K da me trovato è 1,68. Gli altri autori trovarono valori compresi fra 1,68 e 2,32. Il valore da me ottenuto sarebbe quindi alquanto basso rispetto alla media dei valori trovati dagli altri autori; però siccome questi esperimentarono, in generale, staticamente, non è improbabile che anche per la paraffina, come già si è veduto per lo zolfo, la costante dielettrica determinata colle oscillazioni rapide sia inferiore a quella determinata staticamente; ed infatti J. J. Thomson trovò per essa colle oscillazioni rapide $K = 1{,}8$ [4].

« Non si osserva variazione continua di K coll'aumento della lunghezza d'onda.

« *Vetro*. Dal complesso delle determinazioni fatte coi corpi precedenti, mi pare si possa arguire che coi metodi da me seguiti si ottengono valori attendibili, per cui si può con fiducia osservare ora i risultati ottenuti col vetro al quale ho più specialmente mirato nel presente lavoro. Si vede a

(1) Vedi Landolt und Börnstein Tabellen, II ediz. pag. 522.
(2) Thomson J. J., *Recent researches* etc., pag. 469.
(3) Landolt und Börnstein Tabellen, ivi.
(4) J. J. Thomson, op. cit., pag. 472.

colpo d'occhio che i valori di K ottenuti con condensatori di capacità molto differenti, non differiscono che relativamente poco dal valor medio generale, il che indica che, anche potendosi effettuare la correzione per l'influenza dei margini, questa non avrebbe influenza considerevole sul risultato, poichè, se fosse altrimenti, i risultati ottenuti colle armature e distanze differenti, presenterebbero delle differenze notevoli.

« La media generale dei valori di K da me ottenuti è 3,76. Noto come questo valore sia molto prossimo a 3,9 ultimamente determinato dal Beaulard (1) con durate di carica variabili da $^{0,5}/_{100}$ ad $^{8}/_{100}$ di secondo; però diversifica da quelli trovati da altri autori con oscillazioni Hertziane e che sono:

2,26	(Tschegläiew 1891)	5,84	(Thwing 1894)
2,7	(J. J. Thomson 1890)	5,86	(Northrup 1895)
2,8	(Blondlot 1891)	6,50	(Lecher 1890)
da 2,71 a 6,33	(Perot 1892)	7,31	

« Il valore da me ottenuto si trova in mezzo ai detti valori, ma io credo che, più che questa circostanza, valga per ritenerlo attendibile la considerazione che esso è il risultato di un grande numero di osservazioni sufficientemente concordanti, fatte tutte in condizioni diverse, e per di più risultante dalla media di due valori, pure sufficientemente concordanti, ottenuti con metodi diversissimi, cioè l'uno basantesi sulle formule teoriche che dànno il periodo delle oscillazioni elettriche, l'altro indipendente affatto da quelle formule.

« È da osservare che Arons e Rubens (IIª Memoria citata) trovarono, colle oscillazioni rapide, per due qualità di vetro gli indici di rifrazione 2,33 e 2,49; tali valori che, per quanto si è detto al § 1 sarebbero quelli da confrontarsi colla costante dielettrica, darebbero per essa i valori 5,43 e 6,20 superiori a quello da me trovato; è da notarsi però che J. J. Thomson a pag. 480 del trattato sopra citato, dice che il metodo seguito dai detti autori nel calcolo delle loro esperienze, metodo criticato anche dal Waitz (2), non è del tutto giustificato, e che seguendo un metodo da lui indicato si avrebbe $n=1,9$ da cui $K=3,6$ il quale valore sarebbe assai prossimo a quello da me trovato.

» 10) Noterò da ultimo che il Perot (3) avendo determinata la costante dielettrica del vetro col metodo di Blondlot (4) ottenne per K dei valori che, ridotti alle lunghezze d'onda tipiche da me prescelte, furono registrati nella seguente tabella al di sopra di quelli che si deducono dalle mie esperienze facendo le medie dei valori, corrispondenti alle stesse lunghezze d'onda, registrati nell'ultima colonna della tabella II.

(1) Beaulard, *Lumiére Electrique* 53°, pag. 285 (1894)
(2) Waitz, Wied. Ann. 44°, 527 (1891).
(3) Perot, Comptes Rendus 115°, pag. 38 (1892).
(4) Blondlot, Comptes Rendus 113°, pag. 628 (1891).

Lunghezze d'onda in metri	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
K Perot	3,7	4,8	5,6	6.0	6,3	6,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
K Mazzotto	—	3,30	3,65	3,57	3,66	3,75	3,86	3,96	3,97	3,90	3,84	3,80	3,77	3,69	3,72

« I valori del Perot presentano un aumento dapprima rapido, poi più lento, colla lunghezza d'onda; i miei sono dapprima crescenti poi decrescenti colla lunghezza d'onda, con un maximum verso $\lambda = 45$ m. L'aumento avverrebbe appunto nel tratto che abbraccia le esperienze del Perot, ma con una rapidità molto minore di quella da lui trovata; per quanto la presenza di questo massimo sia nettamente indicata dai miei risultati io crederei che, siccome le differenze sono piuttosto piccole rispetto ai possibili errori del metodo, si dovesse attenderne la conferma da esperimenti fatti con altri metodi prima di accettarla definitivamente.

« 11) Riassumendo, le costanti dielettriche dedotte dalle mie esperienze sarebbero:

Petrolio 2,11 — Solfo 2,68 — Paraffina 1,68 — Olio d'oliva 2,87 — Vetro da specchi 3,76

le prime tre sostanze le quali, come è noto, ubbidiscono alla legge di Maxwell $K = n^2$ (anche prendendo per n l'indice di rifrazione delle onde luminose) presentano un valore di K costante, per le varie lunghezze d'onda, entro i limiti di precisione dei miei esperimenti; le ultime due che si allontanerebbero da detta legge, perchè i loro indici di rifrazione ottica dànno: $n^2 = 2,13$ per l'olio ed $n^2 = 2,36$ pel vetro, minori cioè dei rispettivi valori trovati per K, diedero per K dei valori decrescenti colla lunghezza d'onda, il che fa presupporre che, con lunghezze d'onda ancora più corte di quelle da me usate, il valore di K si abbassi fino al valore teorico, dedotto dalla rifrazione delle onde luminose in quelle sostanze ».

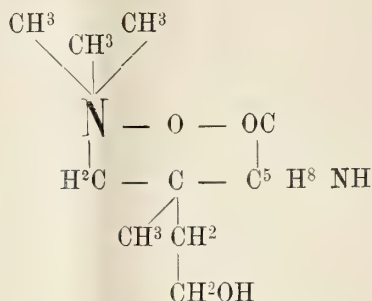
Chimica. — *Sulla Crisantemina* (1) Nota del prof. Francesco Marino-Zuco, presentata dal Socio Cannizzaro.

« In una precedente Memoria (2) io dimostrai come nei fiori di Chrysantemum cinerariaefolium, o pyretrum cinerariaefolium, esiste un alcaloide che io chiamai crisantemina e che ha per formola grezza $C^{14}\ H^{28}\ N^2\ O^3$.

« A questo alcaloide, in base al suo comportamento chimico ed ai suoi prodotti di decomposizione, ho allora assegnato la seguente formola di costituzione:

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Chimica farmaceutica di Genova, 2 marzo 1895.

(2) Gazzetta Chimica t. XXI f. VI.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & CH^3 \quad CH^3 \quad CH^3 & & & \\
 & \diagdown \;\; | \;\; \diagup & & & \\
 & N & - \; O \; - & OC & \\
 & | & & | & \\
 & H^2C & - \; C \; - & C^5 \, H^8 \, NH & \\
 & & \diagup \; | & & \\
 & & CH^3 \; CH^2 & & \\
 & & \quad | & & \\
 & & \quad CH^2OH & &
\end{array}
$$

« Questa formola rappresentava esattamente il risultato dei miei studi già eseguiti sopra questo alcaloide, che io brevemente riassumo.

« Esistono nella crisantemina due atomi di azoto, di cui uno sotto forma di trimetilammonio e l'altro di azoto piperidinico. Esiste inoltre un gruppo alcoolico primario, il quale per ossidazione si trasforma facilmente in gruppo carbossilico passando in tal modo dalla crisantemina alla ossicrisantemina.

« Se si considera la decomposizione che questo alcaloide subisce per l'azione dell'acqua, per cui si ottengono amilglicol, acido piperidincarbonico e trimetilammina, si può certamente ritenere essere desso una vera betaina, nella quale ad una valenza dell'azoto ammonico è legato un radicale complesso l'acido, cioè, ossiamilpiperidincarbonico.

« Nella menzionata Memoria io dimostrava inoltre come il gruppo amilico non poteva essere certamente quello a catena normale; stantechè per l'azione della potassa sulla crisantemina si ottengono come prodotti di decomposizione, trimetilammina, acido piperidincarbonico e l'acido γ-ossibutirico di Saytzeff (1) e Frühling (2) che fu da me, per ossidazione trasformato in acido succinico.

« Nella citata Memoria io cercai ancora di dimostrare come la crisantemina, quantunque fosse una betaina piridica pur nondimeno essa si allontanava affatto per le sue proprietà da questo gruppo betainico, rassomigliando maggiormente alle betaine grasse come la trimetilglicina. È per questo suo comportamento che lo studio di questo alcaloide si rende abbastanza difficile, stantechè gli ossidanti diversi, ed impiegati anche in diversissime condizioni, o si limitano soltanto a trasformare questo alcaloide in ossicrisantemina, o agiscono energicamente dando anidride carbonica, acqua ed ammoniaca, senza aver potuto sinora limitare per nulla la reazione, sia che si agisca cogli ossidanti in soluzione acida, sia in soluzione alcalina.

« Difficilissima ancora riesce la disidrogenazione del gruppo piperidinico, ed io ebbi costantemente dei risultati infruttuosi sia con mezzi energici che

(1) Ann. Ch. und Ph. 95, p. 273.
(2) Monatshefte für Chemie. 1882 p. 703.

con quelli blandi. Mentre, con le basi piperidiniche, si riesce quasi sempre a levare l'idrogeno coi metodi di Tafel [1] o di Peratoner [2], colla crisantemina invece non si ottiene nessun risultato tuttochè io abbia ripetutamente esperimentato i suddetti metodi. Questa resistenza agli ossidanti e questa difficoltà di levare l'idrogeno piperidinico, riavvicina sempre più questo alcaloide alle vere betaine grasse.

« La decomposizione però che subisce la crisantemina per l'azione dell'acido jodidrico concentrato, reazione di cui m' occupo nella presente Nota, serve a chiarire molto la costituzione di questo alcaloide.

« La crisantemina si scioglie completamente nell'acido jodidrico concentratissimo e dalla soluzione, anche dopo prolungata ebollizione, si riottiene l'alcaloide inalterato.

« Però se la soluzione di crisantemina nell'acido jodidrico concentratissimo si pone a distillare fino a che la maggior parte di acido jodidrico sia stato scacciato e si continua a riscaldare il residuo fino a che un termometro, il cui bulbo pesca dentro il liquido, segni 150°, quando il liquido arriva a questa temperatura e vi si mantiene per qualche tempo, si osserva uno spumeggiamento, cessato il quale, il residuo della storta non contiene più traccia di crisantemina. La crisantemina per l'azione dell'acido jodidrico si è decomposta in joduro di tetrametilammonio, in jodidrato dell' acido metilpiperidincarbonico, joduro di metile e di etile.

« L'apparecchio che serve per questa reazione è il seguente:

« Una piccola storta tubulata, munita di termometro, è riscaldata a bagno d'olio: l'allunga di questa storta è munita di manicotto che serve da refrigerante: essa comunica, mediante un tappo di cautchouc a due fori, con un piccolo pallone contenente del fosforo rosso e mantenuto in un bagno ad acqua. Per il secondo foro vi si connette un refrigerante ascendente, il quale a sua volta comunica con un serpentino mantenuto costantemente pieno d'acqua ghiacciata: a questo serpentino si connette un piccolo pallone, anch' esso mantenuto in acqua ghiacciata. Tanto il bagno del primop alloncino quanto i due refrigeranti, contengono dell'acqua calda alla temperatura di 80° durante tutta l'operazione.

« Dieci grammi di crisantemina purissima e secca sono sciolti in circa cinquanta c. c. di acido jodidrico fumante e la soluzione vien messa dentro la storta, situando il termometro in modo che il bulbo arrivi quasi al fondo di essa. Si comincia a distillare l'eccesso di acido jodidrico e si cura che l'acqua dei refrigeranti e del primo palloncino sia mantenuta a 80°; quando il termometro segna 150° s'incomincia ad osservare nella storta uno spumeggiamento e contemporaneamente si condensano dal serpentino, mantenuto co-

(1) Berichte, t. XIV, p. 1619.
(2) Gazzetta Chimica 1892, p. 567.

stantemente freddo con acqua ghiacciata, delle goccette oleose molto più pesanti dell'acqua, che ingialliscono alla luce: quando cessano di venire altre goccioline dal serpentino, allora cessa lo spumeggiamento e l' operazione è finita.

« Bisogna, per la buona riuscita dell' operazione, che il riscaldamento col bagno ad olio sia regolato in modo che la temperatura oscilli soltanto fra i 150^0 e 160^0 senza essere mai superata: quando si ottempera a questa condizione, lo spumeggiamento avviene regolarissimo ed il rendimento dei prodotti è molto alto.

« Finita l' operazione rimane nella storta un residuo bruno molle, il quale è ripreso con acqua bollente dove si scioglie quasi completamente, lasciando poco residuo carbonoso insoluto. In questo liquido acquoso di color rosso scuro si fa gorgogliare un po' di anidride solforosa, e quindi si aggiunge nel liquido molto diluito e freddo a poco per volta del joduro di bismuto e potassio.

« Si forma subito un precipitato fioccoso, pesante, di color rosso cinabro, il quale a poco per volta diventa cristallino: si filtra alla pompa e si lava completamente con acqua distillata. Questo precipitato si sospende poi dentro l'acqua e si decompone con l'idrogeno solforato. La soluzione jodidrica che si ottiene si tratta con cloruro d'argento, allo scopo di eliminare tutto l'acido jodidrico libero e combinato, e la soluzione del cloruro si decolora, se è necessario, con un po' di carbone animale e si svapora a bagno maria a secchezza.

« Il cloruro che si ottiene è cristallino, deliquescente, solubile in alcool assoluto, e trattato con soluzione diluita di idrato potassico non dà odore di trimetilammina. La soluzione del cloruro trattata con cloruro d'oro ha dato un precipitato giallo, cristallino, pesante, pochissimo solubile nell'acqua e nell'acido cloridrico anche concentrato. Non contiene acqua di cristallizzazione e per graduale calcinazione dà prima odore marcatamente alcoolico e poi odore di trimetilammina.

« Le analisi del sale di oro hanno dato:
gr. 0.6122 di sale d'oro diedero di CO^2 gr. 0.2556, di acqua gr. 0.1658
gr. 0.1920 di sale d'oro diedero di oro gr. 0.0908

trovato %		calcolato per $C^4 H^{12} NCl. Au Cl^4$	
C	11.39	C	11.64
H	3.01	H	2.91
Au	47.29	Au	47.59

« Una parte di sale di oro fu decomposta con l' idrogeno solforato ed il cloruro riottenuto, trattato con cloruro di platino, ha dato un cloroplatinato poco solubile nell'acqua fredda, molto solubile invece nell'acqua bollente,

dalla quale per raffreddamento cristallizza in ottaedri regolari. Anche questo cloroplatinato, gradatamente calcinato, dà prima odore netto di alcool metilico e poi odore di trimetilammina.

gr. 0.2199 di sale di platino hanno dato di platino gr. 0.0775

	trovato %		calcolato per $(C^4 H^{12} NCl)^2 Pt Cl^4$
Pt	35.24	Pt	35.31

« Le acque madri, da cui fu separato il composto bismutico di tetrametilammonio, furono saturate di idrogeno solforato e, separato il solfuro di bismuto, il liquido fu trattato con un eccesso di idrato di piombo, allo scopo di eliminare l'acido jodidrico contenuto nel liquido, completando quindi la eliminazione di quest'acido mediante una piccola quantità di ossido umido di argento. Il liquido quindi fortemente alcalino, sbarazzato in tal modo dall'acido jodidrico libero e combinato, fu soprassaturato di anidride carbonica e poscia evaporato a secchezza a bagno-maria.

« Il residuo secco è ripreso con alcool assoluto che lascia indisciolto tutto il carbonato potassico formatosi: la soluzione alcoolica, abbastanza colorata in giallo bruno, evaporata a secchezza lascia un residuo sciropposo, solubilissimo nell'acqua. La soluzione acquosa di questo residuo si acidifica leggermente con acido cloridrico, si fa bollire con carbone animale fino a decolorazione e quindi si filtra e, quando il liquido è freddo, si tratta con un leggero eccesso di cloruro d'oro.

« L'aggiunta di cloruro d'oro non dà luogo ad alcun precipitato, però se la soluzione si fa lentamente evaporare in un ambiente secco, a poco per volta incominciano a comparire in seno al liquido delle punte cristalline, finchè tutto il residuo si rapprende in una massa di bei cristalli giallo-rossi duri e prismatici. Si separa e si lava con poca acqua questo sale d'oro, si scioglie di nuovo nell'acqua e si fa nuovamente cristallizzare come prima. Si ottiene così un sale di bello aspetto di color giallo d'oro carico in bei cristalli duri e prismatici, abbastanza solubile nell'acqua fredda, solubilissimo in quella calda: fonde a 130° in un liquido rosso-bruno senza decomposizione. Questo sale d'oro non contiene acqua di cristallizzazione:

I gr. 0.6405 di sale d'oro hanno dato di CO^2 gr. 0.4097 e di Aq. gr. 0.1895
II gr. 0.6662 di sale d'oro hanno dato di CO^2 gr. 0.4284 e di Aq. gr. 0.1900
I gr. 0.2886 di sale d'oro hanno dato di Au gr. 0.1171
II gr. 0.3664 di sale d'oro hanno dato di Au gr. 0.1488

	trovato % I.	II.	media		calcolato per $C^7 H^{13} O^2 NHCl Au Cl^3$
C	17.44	17.53	17.48	C	17.42
H	3.28	3.16	3.22	H	2.93
Au	40.58	40.61	40.59	Au	40.68

« Una parte di sale d'oro di quest'acido metilpiperidincarbonico fu decomposto con idrogeno solforato ed il cloridrato ottenuto si presenta sotto forma di una massa sciropposa che tenuta per molto tempo nel vuoto sopra l'acido solforico, diventa cristallina; però appena in contatto coll'aria cade rapidamente in deliquescenza.

« Il liquido distillato che si è raccolto dal serpentino mantenuto freddo coll'acqua ghiacciata si presenta sotto forma di un liquido oleoso, pesante, insolubile nell'acqua dalla quale si depone subito al fondo; è di odore che ricorda gli joduri alcoolici di etile e metile: appena ottenuto è completamente incoloro, però appena lasciato un pochino alla luce si colora subito in giallo, ha una forte tensione di vapore e svapora rapidamente se si lascia in vaso aperto. Questo liquido riunito insieme da diverse preparazioni nella quantità di circa 40 c.c., fu sottoposto ad una distillazione frazionata: esso bolle fra i 42° e 70°. Raccolte le prime porzioni che distillano fra i 44° e 50° e quelle che bollono fra i 68° e 70°, e rifrazionando di nuovo queste due porzioni, ho potuto infine ottenere due liquidi mobilissimi, dei quali uno bolliva a 44°,5 e l'altro a 72°. Prese le densità di vapore di questi due liquidi, si ottennero i seguenti risultati:

gr. 0,1591 di liquido bollente a 44°,5 hanno dato:

V aria 26,85: T 21°,5; H 752°,5; V a 0° e 760 mm. = 24,07

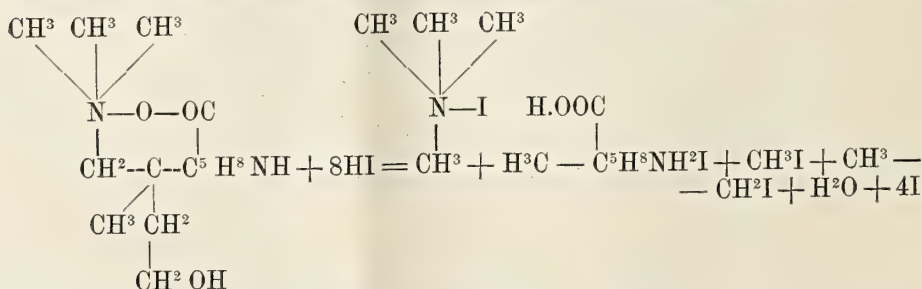
densità trovata	calcolata per CH^3I
5,04	4,91

gr. 0,1168 di liquido bollente a 72° hanno dato:

V aria = 18,7: T = 21,5; H = 752,5; V a 0° e 760 mm. = 16,76

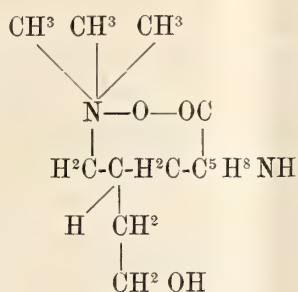
densità trovata	calcolata per C^2H^5I
5,38	5,40

« Dai risultati ottenuti dalle esperienze avanti descritte si desume che la crisantemina per l'azione dell'acido jodidrico nelle descritte condizioni si scinde in joduro di tetrametilammonio, in jodidrato dell'acido metilpiperidincarbonico, in joduro di etile e joduro di metile, secondo la seguente equazione:

```
CH³ CH³  CH³               CH³ CH³  CH³
  \   |   /                  \   |   /
   \  |  /                    \  |  /
    N—O—OC                      N—I     H.OOC
    |    |                      |       |
   CH²--C--C⁵ H⁸NH + 8HI = CH³ + H³C — C⁵H⁸NH²I + CH³I + CH³ —
      /|                                        — CH²I + H²O + 4I
   CH³ CH²
       |
      CH² OH
```

« Questa decomposizione della crisantemina, mentre dimostra evidentemente la presenza di un gruppo trimetilammonico ed il legame di esso

ad un metile della catena grassa, serve altresì a chiarire la costituzione della catena isoamilica. La dimostrazione di una catena derivante dal dimetiletilmetano saldata ad un gruppo piperidinico chiarisce completamente la reazione che la crisantemina subisce per l'azione dell'idrato potassico da me descritta nella Memoria citata, per cui si ottiene trimetilammina, acido piperidincarbonico o l'acido γ-ossibutirico di Saytzeff e Frhüling.

« La reazione quindi sopradescritta non solo conferma, ma avvalora sempre più la formola che io ho già assegnata alla crisantemina. Risultandomi però da ripetute esperienze che la crisantemina è completamente inattiva alla luce polarizzata, io preferisco dare ad essa la formola seguente:

```
CH³ CH³ CH³
  \  |  /
   \ | /
     N—O—OC
     |    |
  H²C-C-H²C-C⁵ H⁸ NH
      /|
     H CH²
       |
       CH² OH
```

la quale, mentre spiega ugualmente bene tutte le reazioni della crisantemina, nello stesso tempo chiarisce ancora meglio il comportamento fisico dell'alcaloide stesso.

« Io sto continuando lo studio di questo alcaloide, e le ricerche sopratutto su questo nuovo acido ottenuto metilpiperidincarbonico, arrecheranno certamente nuova luce alla costituzione della crisantemina ».

Chimica. — *Sopra gli Alcaloidi della Cannabis indica e della Cannabis sativa.* Nota del prof. F. Marino-Zuco e del dott. G. Vignolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

« La canapa comune o *Cannabis sativa,* pianta della famiglia delle urticacee (secondo altri delle cannabacee) rappresenta una specie volgarmente conosciuta per essere estesamente coltivata in Europa sia per le fibre tessili che per i semi oleosi. Nella Persia ed in molte altre regioni dell'Asia cresce spontaneamente, e si coltiva come droga, una pianta assai affine alla precedente chiamata canapa indiana o *Cannabis indica.* Per varie ragioni queste due piante vennero considerate da alcuni come specie distinte [1]. L'altezza

[1] Journal de Pharmacie et de Chimie. Suppl. 1, 15 October 1891. — F. A. Flückiger et D. Hanbury, *Histoire des Drogues.* Paris 1878.

minore del fusto, il fogliame più denso, l'abbondante secrezione di resina non essendo però dei caratteri sufficienti a differenziare la *Cannabis indica* dalla *Cannabis sativa*, la maggior parte dei botanici ammette che queste due piante costituiscano solamente due varietà di una specie unica più o meno modificata dalla coltura e dal clima. Comunque sia è fuor di dubbio che un gran divario esiste nell'attività fisiologica.

« Quantunque qualche caso di avvelenamento sia stato attribuito ai semi della *Cannabis sativa*, per un supposto principio contenuto nel pericarpio dei semi [1], di questa specie non sono conosciute sostanze dotate di segnalata attività. La sola essenza, studiata dal prof. Valente [2], si ritiene possegga deboli proprietà narcotiche alle quali sono dovuti il delirio gaio e le vertigini cui vanno soggetti gli operai che raccolgono la canapa. Recentemente, quando già erano in corso queste ricerche, E. Schulze e S. Frankfurt [3] isolarono dai semi la trigonellina e la colina, basi entrambe quasi inattive. Tra le altre sostanze determinate in gran copia [4] nei semi sono poi da annoverarsi: olio grasso, amido, albuminoidi.

« La *Cannabis indica* giunta a completo sviluppo, cioè dopo la fioritura, possiede una grande efficacia fisiologica. A cagione delle specialissime proprietà inebbrianti e narcotiche, gli Orientali, ed i Maomettani in specie, fanno da remoti tempi gran consumo di canapa indiana e con essa compongono una quantità svariatissima di preparati chiamati senz'altro col nome di *haschisch*. In commercio si distinguono con differenti denominazioni varie qualità di droga [5]. Essenzialmente però la canapa indiana è costituita dalle cime fiorite e fruttificate delle piante femminee, alle quali non sia stata tolta la resina. Sebbene gli effetti straordinarî della canapa indiana siano conosciuti in Europa dal principio del secolo [6] e sieno stati continuamente utilizzati anche a scopo terapeutico, pure le conoscenze intorno ai principî attivi di questa pianta sono ancora assai limitate.

« I primi lavori sulla *Cannabis indica* si debbono ad O'Shaughnessy di Calcutta nel 1838 [7]. I fratelli M. T. e H. Smith di Edimburgo, nel 1846 [8], isolarono una resina speciale dotata di attive proprietà. Personne, dopo di loro, determinò nell'olio essenziale due idrocarburi: il cannabene e l'idrocan-

(1) Ch. Cornevin, *Des plantes vénéneuses et des empoisonnements qu'elles déterminent.* Paris 1887.

(2) L. Valente, *Sopra l'essenza di Cannabis sativa.* Gazzetta chimica italiana, vol. X, XI, 1880-1881.

(3) Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft, 1894, 769.

(4) F. A. Flückiger, *Elementi di Farmacognosia*, pag. 40, Torino 1886.

(5) F. A. Flückiger e D. Hanbury, opera citata.

(6) F. A. Flückiger e D. Hanbury, opera citata.

(7) O'Shaughnessy, *On the preparation of the indian Hemp or Gunjalk.* Calcutta 1839, et Bengal Dispensatory. Calcutta 1842, 579, 604.

(8) Pharm. Journal, 1847, VI, 171.

nabene [1]. Dalla resina preparata dai fratelli Smith, Bolas e Francis [2] ottennero per ossidazione una sostanza cristallizzata, l'ossicannabina. Collo stesso metodo non riuscì però al Flückiger di riaverla. Nel 1876 Presbraschensky [3] in un saggio di canapa della China estrasse un alcaloide che identificò per nicotina. Un anno più tardi però il Dragendorff asserì che la droga studiata dal Presbraschensky era mescolata a tabacco [4]. L. Siebold e T. Bradbury [5] nel 1881 da dieci libbre di canapa indiana estrassero una piccolissima quantità di alcaloide volatile che chiamarono cannabinina, ed espressero la congettura che la pianta dovesse contenere diversi alcaloidi. Ricerche degne di nota sono quelle eseguite da Matthew-Hay [6] nel 1883. Questo autore, isolata dalla *Cannabis indica* una sostanza alcaloidica, (solubile nell'alcool e nell'acqua, difficilmente nell'etere e nel cloroformio), la trasforma poi in solfato, il quale è solubile solamente in parte nell'alcool. La frazione di solfato che si scioglie nell'alcool è ridotta quindi in cloridrato, e la soluzione alcalinizzata estratta con etere. Per evaporazione spontanea del solvente ricava così un alcaloide che iniettato sotto la cute si comporta analogamente alla stricnina. La soluzione acquosa di questo alcaloide precipita coi reattivi generali, non dà però la reazione caratteristica col bicromato e l'acido solforico. Matthew-Hay denominò questo alcaloide tetano-cannabina; ma non potè studiarne la composizione attesa la piccola quantità di droga estratta (1 kg.) e la insufficiente quantità di alcaloide ottenuta. La preparazione della cannabinina isolata da L. Siebold e T. Bradbury venne ripresa nel 1891 con un altro processo da Henry F. Smith [7]; ma egli non indica che reazioni generali di un alcaloide azotato, il quale forma un solfato cristallizzabile dall'alcool. Quest'ultimo dato s'accorderebbe con alcuni fatti riferiti in precedenza dal Matthew-Hay. Secondo Jahus infine [8] la tetano-cannabina di Matthew-Hay non esisterebbe, e l'unico alcaloide della *Cannabis indica* sarebbe la colina, la quale, con notevolissime oscillazioni, è contenuta fino alla proporzione del 0,1 p. c. nei semi. Egli ammette che nessun altro alcaloide sia stato con sicurezza determinato nella *Cannabis indica*, e che nei precedenti lavori sia stata indicata quasi sempre della colina impura. Riguardo poi al tannato di cannabina preparato recentemente da

[1] Journal de Pharmacie et de Chimie, 1857, XXXI, 48; e Jahresbericht de Caustatt. 1857, I, 28.

[2] Chemical News 1871. XXIV, 77 e Flückiger. Hanbury. Opera citata, vol. II, 287.

[3] Pharmaceutische Zeitschrift für Russland, 1 Dic. 1876.

[4] È cosa nota che in Oriente la canapa indiana viene fumata sia sola, sia in unione al tabacco.

[5] Chemisches Centralblatt, 1883, pag. 667.

[6] Pharmac. Journal and Transactions, 1883, June; e Pharm. Centralb. 24, 408-9.

[7] Ap. Z. 6; 454-55 e Chemisches Centralblatt, 1891 = 702.

[8] Arch. Pharm. (3). 25, 479-83. — C. Centralblatt, 1887. — I. Guareschi, *Introduzione allo studio degli alcaloidi*, pag. 353. Torino 1892.

Merck [1] ed alla cannabina pura di Bombelon [2] nulla si conosce che permetta di ritenere queste sostanze come definite e pure. Tutte le altre sostanze ricavate dalla *Cannabis indica* si riducono a preparati medicinali come il cannabinone, l'haschisch puro [3] il cannabindone di Kobert [4] ed altri ancora, oppure a principî secondarî in gran parte comuni alla generalità dei vegetali come: clorofilla, acido canapico cristallizzabile [5], olio di canapa.

« Lo studio iniziato da qualche tempo sopra le due varietà di *Cannabis* ha già condotto uno di noi [6] a riferire sopra l'essenza di *Cannabis indica*.

« Nella presente Nota sono esposti i risultati in ordine alla determinazione degli alcaloidi.

« Della *Cannabis indica* vennero studiate le cime fiorite e fruttificate di provenienza diversa. Della *Cannabis sativa* si studiarono separatamente i semi e le cime espressamente disseccate e raccolte nel Veneto. Queste cime si ebbero tagliandole dal fusto, prima della fruttificazione della pianta, per una lunghezza di circa 50 centimetri.

« Per l'estrazione degli alcaloidi, fatta particolare considerazione al rendimento, il quale in ogni caso è sempre piccolo, e tenuto conto del fatto che i solventi estraggono solo piccolissime quantità di sostanze basiche, dopo svariate prove, fu adottato il metodo seguente come più semplice e pratico.

« In un'ampia caldaia di rame stagnato si pongono a macerare le cime di canapa nell'acqua e dopo circa dodici ore, acidificata la massa con acido solforico, si sottopone a prolungata bollitura, agitando ad intervalli, finchè la droga sia ridotta in poltiglia omogenea. Si filtra il liquido per tela e si spreme al torchio il residuo. Si rinnova l'estrazione con acqua acidulata e quindi i liquidi filtrati riuniti si sottopongono ad una lenta evaporazione, decantando ad ogni occorrenza il liquido dal sedimento di sali inorganici che si vanno deponendo [7]: si sospende lo svaporamento quando l'estratto

(1) Bernhard Fischer, *Die neueren Arzneimittel.* Berlin 1889.

(2) Alcuni autori scrivono: Bourbelon.

(3) B. Fischer, op. citata.

(4) Journal de Pharmacie et de Chimie. Oct. 1894.

(5) B. Fischer, op. cit.

(6) G. Vignolo, *Sull'essenza di Cannabis indica*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. III, 1894.

(7) In tutte le prime operazioni eseguite i liquidi di estrazione venivano prima sottoposti all'azione dell'acetato basico di piombo. Siccome però in altre prove di saggio si potè accertare che anche senza l'uso di questo reattivo, il rendimento in cloridrato greggio era press'appoco costante per quantità e conservava gli stessi caratteri, così questo laborioso trattamento fu tralasciato per l'estrazione delle cime di *Cannabis indica* e della *Cannabis sativa*: queste ultime specialmente dànno liquidi poveri di sostanze estrattive. Per l'estrazione invece dei semi di *Cannabis sativa,* attesa l'abbondanza di tali sostanze,

acquista una consistenza di denso sciroppo, e allora la massa viene ripresa con una quantità conveniente di acqua e decolorata con carbone animale.

« Il filtrato quasi incoloro, dopo la neutralizzazione della maggior parte di acido libero mediante soda caustica, si tratta con soluzione di joduro di bismuto e potassio. Questo reattivo produce immediatamente un precipitato abbondante e fioccoso, che, agitato a lungo, assume forma cristallina e color rosso cupo. Dopo parecchie ore di riposo si filtra il precipitato alla pompa e si lava ripetutamente, quindi si sospende nell'acqua e si sottopone all'azione prolungata dell'acido solfidrico sino a completa decomposizione del sale. Eliminato il solfuro di bismuto, la soluzione contenente gli jodidrati delle basi si tratta a freddo con idrato di piombo, ben lavato, fino a reazione leggermente alcalina. Il filtrato si ritratta a bagno maria con eccesso di cloruro di argento oppure con ossido di argento umido. Acidificata, quando occorra, con acido cloridrico, la soluzione si decolora con carbone animale e si porta a secco a bagno maria procurando di eliminare l' eccesso di acido cloridrico.

« Si ottiene così un residuo, che dopo disseccamento nel vuoto, si presenta sotto forma di una massa cristallina, deliquescentissima e leggermente brunastra. La purificazione di questo cloridrato greggio fu completata precipitando gli alcaloidi di esso allo stato di cloroaurato, decomponendo quindi il sale d'oro coll'idrogeno solforato e riottenendo in tal modo il cloridrato purissimo.

« Questo cloridrato sia che provenga dalla *Cannabis indica* sia dalla *Cannabis sativa*, quando è stato disseccato completamente nel vuoto è incoloro, cristallino, deliquescentissimo e dà coi reattivi generali le seguenti reazioni:

« Una soluzione moderatamente diluita di cloridrato precipita con la soluzione di jodio jodurato e col reattivo di Mayer. Col reattivo di Dragendorff, le soluzioni anche diluitissime dànno un abbondante precipitato fioccoso, giallo-rosso, che, per agitazione, diventa cristallino e rosso-cinabro. Nelle soluzioni concentrate il sublimato corrosivo produce un abbondante precipitato bianco-cristallino solubile nell'acqua bollente. Coll'acido tannico si ottiene un precipitato bianco solubile a caldo; il precipitato è solubile ancora nell'ammoniaca e negli acidi diluiti. Il cloruro di platino non produce precipitato nelle soluzioni acquose, ma dà invece un sale giallo, cristallino colle

---

si dovette necessariamente conservare il trattamento coll'acetato basico. Dopo aver eliminato l'olio, separato per lunga ebollizione con acqua dai semi contusi, si neutralizzava l'eccesso dell'acido con carbonato di piombo e quindi si trattava a freddo con la quantità necessaria di acetato. Si spiombavano in seguito i liquidi con l'idrogeno solforato oppure con acido solforico diluito, curando che per evaporazione prolungata, interrotta di quando in quando con nuove aggiunte di acqua, tutto l'acido acetico fosse eliminato completamente.

soluzioni alcooliche. Il cloruro d'oro dà colle soluzioni anche diluite un cloroaurato giallo, cristallino, abbastanza solubile nell'acqua bollente.

« Oltre al cloridrato fu tentata la preparazione di altri sali come il nitrato ed il solfato; ma essi, presentandosi in una massa sciropposa, cristallizzano con più difficoltà del cloridrato stesso.

« La quantità di alcaloide che si ottiene dall'estrazione tanto della canapa indiana che della nostrana, è sempre piccolissima: dopo ripetute estrazioni possiamo ritenere che la quantità media di alcaloide ottenuta per 50 Kg. di pianta secca non supera i 4 o 5 grammi.

« Importante è l'azione fisiologica del cloridrato descritto.

« Per il cloridrato ottenuto tanto dai semi che dalle cime della *Cannabis sativa* l'azione fisiologica è quasi nulla. Il fatto più importante che si osserva nelle rane è una temporanea depressione dell'attivitità cardiaca.

« Col cloridrato invece ottenuto dalla *Cannabis indica* si hanno effetti notevolissimi e segnatamente un'azione violenta sul cuore.

« Preparato infatti espressamente il cloridrato da 100 grammi di droga e portato il volume del liquido a c.c. 1,5, si ebbero i seguenti risultati sopra le rane preparate col cuore a nudo. Per iniezione di $^1/_2$ c. c. di soluzione, dopo l'intervallo di due minuti, le pulsazioni si abbassano da 60 a 40 e vanno quindi rapidamente diminuendo fino ad avere l'arresto completo del cuore dopo 7 minuti. Contemporaneamente al rallentamento delle pulsazioni si nota grande dilatazione della pupilla ed opistotono. In una seconda esperienza per soli $^2/_{10}$ di c. c. di detta soluzione le pulsazioni si abbassano dopo due minuti da 64 a 40, e dopo altri sette il cuore cessa completamente di battere. Tenuto conto che la quantità di alcaloide contenuta nelle canape è piccolissima, come fu avanti dimostrato, e che la quantità di droga estratta per l'esame fisiologico è anch'essa relativamente molto piccola si può dedurre che certamente gli effetti tanto velenosi dell'estratto siano dovuti, più che alla quantità di alcaloide in esso contenuto, alla grande energia dell'alcaloide stesso.

« Dallo studio ulteriore essendosi potuto accertare che il cloridrato in esame era sempre un miscuglio complesso di diverse basi, si dovette procedere a differenti metodi di frazionamento che noi partitamente descriveremo. E quantunque le analisi che noi presentiamo non sian sempre analiticamente perfette, pur nondimeno esse servono sempre bene a risolvere il nostro problema, quando si tien conto della piccola quantità di base contenuta nella droga e del genere di alcaloidi che compongono questo miscuglio complesso ».

Chimica. — *Sulla trasformazione dell'acido desmotropo-santonoso nell'acido levo-santonoso.* Nota di AMERICO ANDREOCCI, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

« La rassomiglianza perfetta del comportamento chimico dell'acido desmotropo-santonoso con quello degli acidi stereo-isomeri: destro, levo e racemo-santonosi, e l'analoga derivazione degli acidi desmotropo- e levo-santonosi da due desmotropo-santonine isomere, rappresentabili entrambe in un piano colla stessa formola di struttura, furono le ragioni per le quali sempre ho ritenuto molto stretta la parentela dell'acido desmotropo coi suddetti tre acidi stereoisomeri, possibile la sua trasformazione in uno di questi tre e più probabilmente nel levo-santonoso (¹).

« Anzi sul primo ho creduto potere facilmente convertire l'acido desmotropo nell'acido levo per azione dell'idrato potassico a 200°, come ho trasformato la desmotropo-santonina, che ridotta genera l'acido desmotropo-santonoso, nella iso-desmotropo-santonina, che genera l'acido levo-santonoso. Ma i risultati furono negativi; infatti, riottenni l'acido desmotropo-santonoso inalterato, che suddiviso in tre campioni colla cristallizzazione frazionata fondeva costantemente a 175°. Allora ho voluto vedere se l'acido desmotropo riscaldato a 300° desse come l'acido destro-santonoso (²) un' anidride, ed in tal caso se essa rigenerasse l'acido dal quale deriverebbe come fa quella dell'acido destro, oppure un altro acido santonoso. Ecco i risultati ottenuti:

« L'acido desmotropo-santonoso riscadato fra 295° e 305°, in un bagno di lega metallica, per 2 ore, elimina dell'acqua senza svolgere nemmeno una traccia di gas (H od idrocarburi) e si trasforma in una massa oleosa, che per raffreddamento si solidifica, assumendo l'aspetto d'una resina trasparente e fragile, di color paglierino simile all'anidride dell'acido destro-santonoso; è infatti anch'essa un' anidride derivante dall'eliminazione di una molecola d'acqua per ogni due molecole di acido desmotropo, come risulta dalla seguente determinazione:

gr. 11,68 di acido desmotropo-santonoso scaldati fra 295° e 305° perderono gr. 0,42 di H^2O.

	calcolato	trovato
H^2O	3,63	3,60

(¹) *Sopra un isomero della santonina ed un nuovo isomero dell'ac. santonoso.* Questi Rendiconti 1893, 1° sem., vol. II, pag. 494. — *Sopra un altro nuovo isomero della santonina e sopra un altro nuovo isomero dell'ac. santonoso.* Questi Rendiconti 1893, 2° sem., vol. II, pag. 175. — *Sulla struttura degli acidi santonosi.* Questi Rendiconti 1895, 1° sem., vol. IV, pag. 68.

(²) S. Cannizzaro, *Sui prodotti di decomposizione dell'ac. santonoso.* Gazz. chim. Ital., vol. XIII, p. 387.

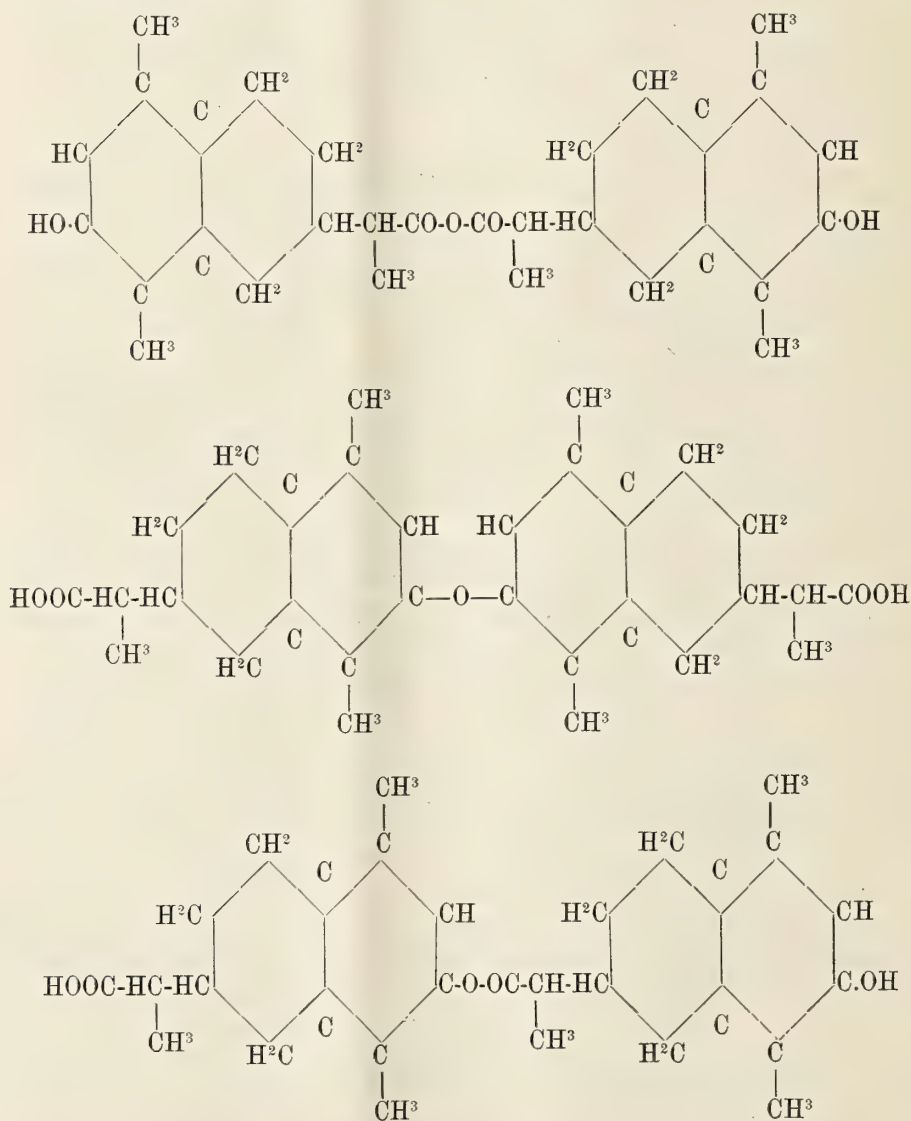
« Questa sostanza, come l'anidride dell'acido destro santonoso, non si discioglie facilmente nell'alcool e nell'etere, però col tempo quest'ultimo solvente ne discioglie una gran parte, lasciando indietro un poco di sostanza polverosa, bianca, quasi insolubile.

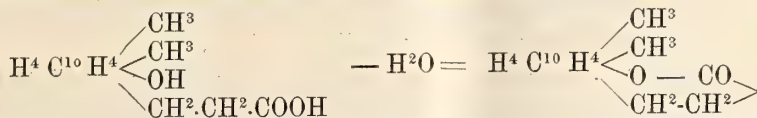
« Per svaporamento dell'etere si riottiene l'anidride col suo aspetto resinoso.

« L'eliminazione dell'acqua dall'acido desmotropo-santonoso può essere avvenuta fra i carbossili, o fra gli ossidrili naftolici, o fra un carbossile ed un ossidrile appartenenti a due molecole, per cui all'anidride spetta una di queste tre formole di struttura:

```
      CH³                                                   CH³
      |                                                     |
      C      CH²                                   CH²      C
    /   \  C   / \                                /  \   C  /  \
 HC/     \/      \CH²                       H²C/      \/       \CH
   |      |       |                            |       |        |
HO·C\     |       /CH-CH-CO-O-CO-CH-HC\        |       |        /C·OH
     \   / \  C  /     |           |    \     / \  C  /
      C        CH²    CH³         CH³     CH²        C
      |                                              |
      CH³                                            CH³
```

```
                     CH³               CH³
                     |                 |
           H²C       C                 C        CH²
          /   \  C  / \              /   \  C  /  \
      H²C/     \/     \CH        HC/      \/       \CH²
         |      |      |           |       |        |
HOOC-HC-HC\     |      /C—O—C\     |       |        /CH-CH-COOH
    |      \   / \  C /       \   / \  C  /            |
   CH³      H²C       C          C        CH²         CH³
                      |          |
                      CH³        CH³
```

```
                          CH³                             CH³
                          |                               |
                 CH²      C                     H²C       C
                /  \   C /  \                  /   \   C /  \
           H²C /    \/       \CH         H²C/      \/      \CH
              |      |        |             |       |        |
HOOC-HC-HC\   |      |       /C-O-OC-CH-HC\  |       |       /C.OH
     |     \  / \  C /            |        \ / \  C  /
    CH³     H²C       C          CH³        H²C       C
                      |                               |
                      CH³                             CH³
```

« La prima e la terza formola rappresentano le strutture più probabili, ma è anche possibile che l'anidride sia un miscuglio di due o di tutte e tre queste probabile anidri di; poichè come ho già detto l'etere non discioglie completamente il prodotto della reazione e quella parte che esso discioglie non è poi completamente solubile, anche dopo una lunga digestione in una soluzione acquosa di carbonato sodico. Il prof. Cannizzaro [1], non avendo determinata l'acqua eliminata dall'acido destro-santonoso a 300°, indicò la formazione dell'anidride, colla seguente equazione:

$$H^4\,C^{10}\,H^4\!\!<\!\begin{matrix}CH^3\\CH^3\\OH\\CH^2.CH^2.COOH\end{matrix} - H^2O = H^4\,C^{10}\,H^4\!\!<\!\begin{matrix}CH^3\\CH^3\\O - CO\\CH^2\text{-}CH^2\end{matrix}\!\!>$$

considerando tale sostanza come un'anidride interna, nella quale il residuo dell'acido propionico avendo perduto l'ossidrile acido si sarebbe attaccato all'ossigeno fenico come negli eteri dei fenoli.

« Io ed il sig. Nicola Rizzo intraprenderemo alcune ricerche sui santoniti etilici e sugli acidi etil-santonosi, colla speranza di poter trasformare questi composti nelle loro anidridi, e dall'eliminazione di alcool o di acqua stabilire le strutture delle anidridi degli acidi santonosi.

« Avrei potuto convertire tutta l'anidride grezza ottenuta dall' acido desmotropo-santonoso nell'acido corrispondente colla potassa alcoolica, come il prof. S. Cannizzaro ritrasformò quella dell' acido destro-santonoso; ma non lo feci nel timore che se avessi riottenuto, invece dell'acido desmotropo-santonoso, un altro acido isomero, non avrei potuto più sapere se tale trasformazione dovesse attribuirsi all'azione del calore, oppure all'azione della potassa alcoolica.

« Perciò rivolsi le mie ricerche su quella parte di anidride, che è solubile nell'etere e che lentamente a freddo si discioglie nelle soluzioni acquose di carbonato sodico. Da queste con acido cloridrico precipitai un acido, che non era acido desmotropo-santonoso; ma invece il levo-santonoso, come risulta dai seguenti caratteri di due campioni ottenuti colla cristallizzazione frazionata:

1° I due campioni, come l'acido levo, fondono fra 179-80° e cristallizzano in piccoli aghi.

2° Il potere rotatorio determinato nel primo campione diede i seguenti valori:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione	3,9088
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{10°}$	— 6,45
Potere rotatorio specifico	— 75,1

[1] Loco citato, pag. 394.

« Questi valori corrispondono con quelli ottenuti da un campione di acido levo-santonoso (dalla isodesmotropo-santonina) per il quale ho trovato

$$(\alpha)_D^{28^\circ} = -74,5;$$

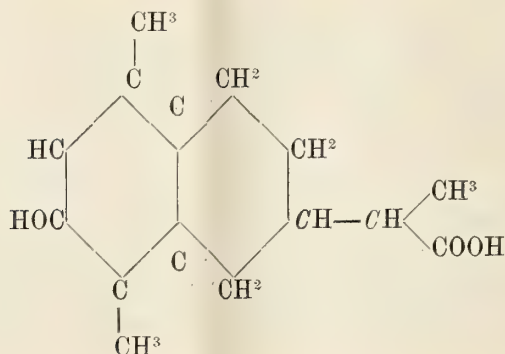
mentre per l'acido desmotropo-santonoso $(\alpha)_D^{18^\circ}$ è $= -53,3$.

3^e L'etere etilico ottenuto dal secondo campione fonde a 116°, come quello dell'acido levo-santonoso presentandone le stesse apparenze e gli stessi caratteri di solubilità.

4° L'etere etilico mescolato con un peso eguale di destro-santonito etilico dà il racemo-santonito etilico fusibile a 125°.

« L'acido desmotropo-santonoso si trasforma perciò in uno dei tre acidi santonosi stereo-isomeri appunto nel levo come avevo dubitato; così tutti i quattro acidi santonosi conosciuti devono considerarsi come stereo-isomeri.

« Colla formola adottata per gli acidi santonosi

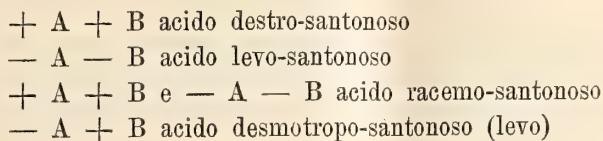
```
            CH³
            |
            C       CH²
          /   \  C  /   \
      HC         \/       CH²
       |          |        |                 CH³
       |          |        |               /
      HOC         /\       CH — CH <
          \     /  C \    /                \
            C          CH²                   COOH
            |
            CH³
```

risultando la dissimetria per due atomi di carbonio, sono possibili, secondo le teorie di J. H. van' t' Hoff e J. A. Le Bel sul carbonio assimetrico, sei isomeri, dei quali quattro attivi: due destro e due levo e due inattivi, sdoppiabili, che risultano dall'unione degli attivi inversi due a due. Tali modificazioni stereo-isomere possono essere espresse nel modo seguente, quando si ritiene l'attività ottica di un carbonio, che dirò A, maggiore di quella dell'altro carbonio che dirò B;

$+ A + B$; destro
$- A - B$; levo
$+ A + B$ e $- A - B$; inattivo

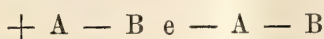
$+ A + B$; destro
$- A + B$; levo
$+ A - B$ e $- A + B$; inattivo

« I borneoli vengono citati come un raro esempio di serie completa; essendo conosciuti tutti i sei isomeri, che furono ottenuti da Montgolfier e Haller [1].

« Nel caso degli acidi santonosi sarebbero noti i quattro isomeri:

+ A + B acido destro-santonoso
— A — B acido levo-santonoso
+ A + B e — A — B acido racemo-santonoso
— A + B acido desmotropo-santonoso (levo)

« Se si potesse ottenere l'acido destro-desmotropo, pure la serie degli acidi santonosi sarebbe completa poichè facile riuscirebbe il preparare l'acido racemo-desmotropo.

« È però anche possibile che l'acido desmotropo-santonoso ed i suoi derivati, che hanno tutti un potere rotatorio più debole dei loro corrispondenti isomeri delle serie levo e destro-santonose, sieno dei racemi parziali; ossia formati dall'unione di due molecole attive, in modo che l'attività d'un carbonio assimetrico d'una molecola viene compensata da quello corrispondente dell'altra molecola, mentre si sommano l'attività degli altri due atomi di carbonio; ciò che si può rappresentare con

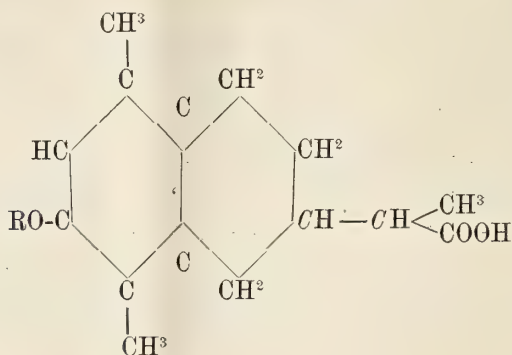
+ A — B e — A — B

« Non volendo per ora decidere se l'acido desmotropo-santonoso debba considerarsi come un racemo parziale, o come uno dei quattro isomeri attivi possibili, citerò soltanto quei fatti per i quali si può ritenere che l'acido desmotropo-santonoso, la desmotropo-santonina ed i loro derivati sieno dei racemi parziali; riserbandomi però, prima di pronunciarmi, uno studio più accurato del potere rotatorio degli acidi santonosi e dei loro derivati.

1° La desmotropo-santonina, per il suo punto di fusione (260°) e per la poca solubilità nei solventi, potrebbe ritenersi come un polimero, mentre la grandezza molecolare, determinata col metodo ebolliscopico, conferma la sua formola semplice $C^{15} H^{18} O^{3}$; inoltre essa si forma per azione dell'acido cloridrico, che tende a racemizzare molte sostanze attive.

2° L'acido desmotropo-santonoso ed i suoi derivati hanno tutti un potere rotatorio più basso dei loro corrispondenti isomeri attivi e sono sempre levogiri, e per le loro proprietà fisiche si rassomigliano più ai derivati racemo-santonosi che non ai levo e destro-santonosi.

[1] Stéréochimie. *Nouvelle édition de dix années dans l'histoire d'une théorie* par J. H. van't' Hoff, pag. 50.

3° I poteri rotatori molecolari degli acidi metil ed etil desmotropo-santonosi

CH^3
C CH² (drawn as CH^2)
C
HC CH^2
RO-C $CH - CH<^{CH^3}_{COOH}$
C
C CH^2
CH^3

sono vicinissimi a quello dell'acido desmotropo-santonoso, anzi potrebbero dirsi uguali, poichè le differenze rientrano nei limiti degli orrori di osservazione; mentre il potere rotatorio molecolare degli acidi metil ed etil levo, o destro-santonosi è superiore a quello degli acidi levo, o destro santonosi; come risulta dal seguente specchio:

	Potere rotatorio molecolare		Pot. rotatorio molecolare
Acido desmotropo-santonoso	— 132	Acidi levo, o destro-santonosi	± 185
» metil-desmotropo-santonoso	— 129	» metil-levo, o destro-santonosi	± 191
» etil-desmotropo-santonoso	— 130	» etil-levo, o destro-santonosi	± 202

« Questi dati sono in favore dell'ipotesi che l'acido desmotropo-santonoso sia un racemo parziale, e preciserebbero anche quale è il carbonio assimetrico la di cui attività ottica vien compensata dal suo corrispondente di segno contrario appartenente all'altra molecola; ossia indicherebbero che tale carbonio è quello del nucleo naftalico.

« Però con questi soli dati non intendo confermare la suddetta ipotesi, perchè a tal fine occorre una osservazione accurata del potere rotatorio fatta, nelle stesse condizioni di temperatura, con soluzioni ugualmente concentrate e con un solvente più adatto dell'alcool assoluto, sopra una serie numerosa di derivati, ottenuti coll'introduzione di radicali alcoolici più pesanti come; il propile, amile e benzile al posto non solo dell' H naftolico, ma anche di quello del carbossile, onde vedere qual sia l'influenza di questi radicali sull'uno o sull'altro atomo di carbonio assimetrico. Mi riserbo comunicare con un' altra Nota il risultato delle ricerche che ho a tal fine intraprese.

4° La forma cristallina dell'acido etil-desmotropo-santonoso (attivo) corrisponderebbe invece a quella di un racemo, come risulta dalle seguenti determinazioni cristallografiche ed osservazioni comunicatemi gentilmente dal dott. Luigi Brugnatelli, il quale le ha eseguite nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Roma.

« *Acido-etil desmotropo-santonoso.* — Sistema cristallino: triclino. Essendo otticamente attivo i suoi cristallli dovrebbero appartenere al gruppo assimetrico di questo sistema. Tutti i cristalli osservati però presentano uno sviluppo della forma perfettamente oloedrico.

« Forme osservate:

$$\{100\} \cdot \{010\} \cdot \{001\} \cdot \{1\bar{1}0\} \quad \{0\bar{1}1\} \cdot \{\bar{1}01\} \cdot \{\bar{1}11\}$$

« Costanti cristallografiche:

$$a:b:c = 1,1269:1:0,613$$
$$A = 69°40' \qquad B = 130°47' \qquad C = 119°52'$$

dedotte dagli angoli fondamentali:

$$(100):(001) = \ 53°48'$$
$$(100):(0\bar{1}0) = 112°26'$$
$$(001):(0\bar{1}0) = \ 88°\ 4'$$
$$(010):(\bar{1}11) = \ 70°31'$$
$$(100):(\bar{1}11) = \ 74°44'$$

« I cristalli hanno sempre aspetto prismatico secondo [001]. Sono dotati di sfaldatura perfetta secondo {001}. Dalle lamine di sfaldatura emerge uno degli assi ottici. Fu constatata la estinzione inclinata su tutte le facce della zona verticale ».

Anatomia. — *Alcuni fatti che riguardano la cresta neurale cefalica dei Selaci.* Nota di A. Coggi, presentata a nome del Corrispondente Emery.

« La definizione che Kastschenko ha dato nell' 88 di ciò che passa sotto il nome di mesenchima, non ha perduto finora nè in attualità nè in verità: « Il mesenchima non è altro che l'insieme delle cellule embrionali che non vengono impiegate nella formazione di organi epiteliali intesi in senso lato ». In questi ultimi tempi sono stati compresi in questa categoria, e indicati con lo stesso nome, elementi embrionali ai quali prima alcuno non avrebbe osato di togliere un certo carattere specifico, dato loro, oltre che dalla maniera e dal luogo di origine, da peculiari relazioni transitorie o definitive, che sembrano avere con varie parti del corpo embrionale: tali sono, ad esempio, le cellule della così detta cresta neurale o cordone o lamina ganglionare.

« Già Kastschenko aveva constatato nei Selaci il disfacimento cui va incontro quella porzione di lamina ganglionare che dal luogo ove si forma

più tardi il ganglio ciliare, scende fino nella regione delle piastre olfattive, e il passaggio delle cellule che la compongono a far parte del mesenchima. In seguito, specialmente per parte di Dohrn, è stato confermato lo stesso fatto anche per altre porzioni del cordone ganglionare; ma è stato riguardato come un fenomeno di regressione. Il disfacimento di certi tratti del cordone ganglionare equivaleva alla scomparsa, nella filogenesi, di nervi prima esistenti in quelle regioni. E per quanto il mesenchima dovesse considerarsi come un insieme di elementi aventi origine varia e molteplice, e l'ectoderma avesse parte nella sua formazione, questa parte non era che indiretta, e sopratutto dovuta a fenomeni di riduzione. Così, con un poco di buona volontà, rimaneva salva nelle sue linee principali, per quanto avariata nei particolari, la compagine della teoria dei foglietti.

« Ma Goronowitsch è andato più innanzi, forse troppo. Le sue osservazioni su Teleostei, Ganoidi e Uccelli gli hanno dimostrato che la cresta neurale è maggiormente sviluppata in regioni nelle quali non ci sono, in seguito, nè gangli nervosi, nè nervi, che le cellule ond' è costituita non formano nè questi, nè quelli, ed entrano nella composizione del tessuto nervoso periferico solo come tessuto di sostegno: esse formano ancora del mesenchima, il quale offrirebbe materiale per le parti scheletriche della testa.

« A queste vedute di Goronowitsch si è in parte convertita la sig.ª Platt, prima riluttante. Dallo studio dello sviluppo di *Necturus*, ella ha ricavato che le cellule della cresta neurale, insieme con altre che derivano da inspessimenti dell'ectoderma, formano nervi e gangli nervosi, non solo, ma danno origine anche a tessuto connettivo « mesectodermico ».

« In embrioni di *Torpedo* e *Pristiurus* io ho veduto formarsi nella parte anteriore del capo, nella regione del cervello anteriore, una porzione di cresta neurale (da me chiamata « cordone ganglionare anteriore ») la quale non può essere considerata semplicemente come propaggine esterna di quel tratto di cresta neurale che occupa il cervello medio, e ch' è ritenuta generalmente come propria del gruppo del trigemino. In embrioni con quattro tasche branchiali, essa è congiunta con quest'ultimo, oltre che sulla linea dorsale mediana del cervello, anche lateralmente, precisamente con la porzione ciliare di esso, a mezzo di un filamento di cellule disposte a catena. La sig.ª Platt che ha veduto codesto filamento in embrioni di *Acanthias*, lo ha considerato come residuo di un nervo dorsale scomparso ed ha proposto per esso il nome di « nervo talamico ». La maniera secondo cui si sviluppa questo filamento, ci dà ragione della forma e della posizione sua nello stadio embrionale suddetto. Esso, che non è in origine se non una commessura che si stabilisce presso la linea mediana dorsale del cervello fra il cordone ganglionare anteriore e quello del gruppo del trigemino, assume più tardi quella posizione che lo ha fatto innalzare alla dignità di nervo segmentale, solo in

seguito allo sviluppo e al dislocamento delle parti del cervello, fra mezzo alle quali le sue cellule sono impegnate.

« Gli elementi che compongono il cordone ganglionare anteriore pigliano origine dalla parete cerebrale e dall'ectoderma, nello stesso modo che quelli delle altre porzioni del cordone ganglionare. La disposizione che essi assumono e la posizione che occupano sono dovute in gran parte all'attività formativa delle pareti del cervello; essi hanno in ciò una parte quasi esclusivamente passiva. Non dànno origine a cellule nervose e nè meno servono di guida e di sostegno ad elementi nervosi che vengano dal cervello. Il loro destino ultimo è quello di passare a far parte del mesenchima che occupa la parte anteriore del capo, fra il cervello e l'epidermide.

« La mancanza in altri gruppi di Vertebrati inferiori di una formazione che, se non per il genere di tessuto embrionale a cui dà origine, almeno per la località ove si sviluppa, possa omologarsi al cordone ganglionare anteriore dei Selaci, fa pensare che la sua apparizione sia dovuta a condizioni locali, tutto proprie di questo gruppo di Vertebrati, e di cui non possiamo valutare la portata. Ma nulla toglie verità al fatto che nei Selaci le pareti dorsali del cervello anteriore danno origine a una porzione di cresta neurale, la quale non può essere sospettata di alcuna relazione con nervi periferici, e diventa poi nella sua totalità tessuto connettivo embrionale.

« La parte passiva ch'è rappresentata dal cordone ganglionare anteriore non è una qualità che gli sia esclusiva. In tutta la cresta neurale del capo io osservo una certa virtù di adattamento alle condizioni di situazione e di dislocamento che le son fatte ora dalla parete cerebrale, ora dall'epidermide. Quest'ultima, che per la sua maggiore superficie si plasma sugli organi epiteliali come fa un drappo stirato sopra un corpo a superficie rientranti, manifesta poi una grande attività formativa in certe sue aree, nelle quali si sviluppano degli organi di senso transitori o permanenti.

« La prima partizione del cresta neurale del capo è dovuta all'ipertrofia dell'epidermide nella regione auditiva, ossia alla formazione dell'avvallamento auditivo. La faccia interna di quest'ultimo s'accosta alla faccia esterna della parete del cervello posteriore, per modo che fra di loro non rimane posto per alcun elemento formato. Le cellule della cresta neurale devono trovar posto o innanzi, o dietro, o sopra l'avvallamento, così che si può distinguere assai presto una porzione preauditiva e una porzione postauditiva della cresta neurale. Queste due porzioni rimangono unite ancora per qualche tempo, a mezzo di elementi poco compatti, al di sopra dell'epitelio auditivo. In seguito, sparisce anche questa connessione, per la formazione della fossa romboidale.

« Una nuova partizione nella porzione preauditiva della cresta neurale, si verifica per il forte accrescimento cui va soggetta la parete laterale della parte anteriore del cervello posteriore. Allora possiamo distinguere

nella cresta neurale del capo: il gruppo del trigemino che occupa la regione del cervello medio, il gruppo del facciale ch' è il rimanente della porzione preauditiva, il gruppo del vago che rappresenta tutta la porzione postauditiva. Il cordone ganglionare anteriore si sviluppa circa in quest'epoca, e rimane poi distinto dal gruppo del trigemino per il forte accrescimento cui va soggetta la parete laterale del telamencefalo.

« Il gruppo del trigemino viene ad essere diviso nella sua porzione ventrale, ch' io distinguo col nome di lamina ganglionare, in due parti conosciute finora come appartenenti l'anteriore al ciliare, la posteriore al trigemino propriamente detto. Questa suddivisione è prodotta dall'accostarsi dell'epidermide alla parete del secondo somite. Ma inferiormente a questo, le cellule della lamina ganglionare si uniscono di nuovo e sembrano fondersi con l'epitelio dell'intestino o ricevere elementi da esso. Van Wijhe avrebbe considerato la parte anteriore di questa connessione come ramo faringeo del ciliare.

« Frattanto la porzione ciliare del gruppo del trigemino è costretta a subire a sua volta una partizione, a livello dell'ipotalamo, per lo sviluppo delle vescicole ottiche. Essa si mette a cavaliero del peduncolo ottico e occupa inoltre, innanzi e dietro di esso, gli spazî che le son lasciati dall'epidermide la quale passa sopra di essi senza inflettersi.

In questi spostamenti e partizioni della lamina ganglionare, questa vi rappresenta una parte passiva, ed è soggetta all'influenza ch' è esercitata ora dall'epidermide, ora della parete cerebrale, ora dai somiti, ora dall'intestino. Sarebbe irrazionale dunque pretendere dalla sua disposizione qualche indicazione sulla metameria della regione del corpo occupata da essa. La cosa sarebbe solo possibile se l'influenza venisse da un solo organo a disposizione metamerica, o pure anche da più organi, ma nei quali la metameria fosse ancora coordinata, e non accadesse che lo sviluppo esagerato o precoce di uno di essi venisse a disturbare o annullare l'influenza che potrebbero esercitare gli altri. Così è che una certa regola nella metamerizzazione della lamina ganglionare del capo s' è mantenuta nella porzione postauditiva di essa.

« Ma a troppe influenze va soggetta la porzione preauditiva perchè dal modo com' essa si presenta divisa in un certo stadio di sviluppo, noi possiamo cavare indizî non imaginosi di metameria di essa o degli organi contigui. Lo studio stesso degli encefalomeri ha presentato fino ad ora difficoltà grandissime, in causa di fatti di ordine secondario che probabilmente hanno mascherato la disposizione segmentale del cervello.

« Un' altro fatto che ha influenza sulla disposizione della lamina ganglionare del gruppo del trigemino sono le relazioni ch' essa acquista con un organo sensitivo epidermico transitorio. Veramente gli organi sono due, l' uno situato innanzi all'altro, l'anteriore in relazione con la porzione ciliare, il posteriore col trigemino propriamente detto, ma è probabile che la divisione sia un fatto secondario dovuto a cause meccaniche. Quest'organo non è una

cosa nuova e di esso ne han parlato quasi tutti coloro che hanno avuto sinora occasione di occuparsi dello sviluppo dei Selaci. Ma io l''osservo conservarsi, e svilupparsi ognora più, fino in istadî a bastanza avanzati, quando gli organi di senso laterale, innervati dal facciale, dal glossofaringeo e dal vago, incominciano a pigliare la disposizione ch' essi avranno nell'adulto. È un organo che non può essere paragonato che all'organo auditivo e a quello olfattivo, è uno di quelli che Kupffer chiama « placodi ».

« Così nei Selaci si possono distinguere, in un certo stadio di sviluppo, tre placodi situati nei due lati della parte preauditiva della testa (organo auditivo compreso).

« Una circostanza, che non è da trascurare, è che la scomparsa di quest'organo coincide con la prima apparizione delle ampolle di Lorenzini. Sullo sviluppo di queste come delle vescicole di Savi e degli organi laterali in *Torpedo* ho dato già alcune notizie preliminari [1] che ora ho occasione di confermare, salvo alcuni fatti che si riferiscono all'innervazione.

« Le cose esposte in questa e nelle Note precedenti, formano argomento principale per un lavoro più dettagliato che uscirà fra breve ».

Matematica. — *Ancora sulle equazioni lineari del 4° ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche. — Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Note del dott. G. Fano, presentate dal Socio Cremona.

Matematica. — *Di una nuova espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo.* Nota di Levi-Civita, presentata dal Corrispondente Veronese.

Chimica. — *Sopra gli alcaloidi della Cannabis indica e della Cannabis sativa.* Nota del prof. F. Marino-Zuco e del dott. G. Vignolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

Chimica. — *Sopra l'Ipnoacetina.* Nota del dott. G. Vignolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

[1] Questi Rendiconti Vol. VII, 2° sem., fasc. 6° e 7°, 1891.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 aprile 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sul problema ottico degli anfiteatri.* Nota del Socio Pietro Blaserna.

« I. La disposizione dei sedili in un anfiteatro deve corrispondere alla condizione, che tutte le persone intervenute ad una dimostrazione o ad una rappresentazione, in qualunque fila siedano, possano vedere quegli oggetti, per cui sono convenuti. La questione si riduce, in pratica, alla scelta di un punto, che tutti devono poter vedere e che è quasi sempre o il centro di un'area più o meno vasta, o un punto limite di questa. La scelta di tale punto dipende dalle condizioni speciali, che guidarono nella costruzione dell'anfiteatro e da una serie di considerazioni d'indole pratica e talvolta anche teorica.

« Il modo classico di disporre un anfiteatro consiste nel collocare le file dei sedili sopra un piano inclinato, la cui inclinazione si fa dipendere da condizioni speciali e talvolta anche da considerazioni architettoniche. Il modo è semplice, ma non è razionale. Con esso le prime file hanno innanzi a sè spazio libero più del necessario, mentre le ultime ne difettano; per cui un architetto desideroso di favorire tutti, deve esagerare la pendenza, con grave scapito dell'architettura e della prospettiva.

« Una semplice considerazione basta a dimostrare la fallacia di tale modo di costruzione. Se noi avessimo gli occhi nella parte più alta del capo, basterebbe scegliere il punto O, che tutti devono vedere, prendere l'altezza raggiunta dalla testa della persona seduta in prima fila, e condurre la visuale da O alla sommità di questa testa. Si avrebbe con ciò la pendenza da darsi al piano inclinato dell'anfiteatro, e basterebbe aumentarla, in via prudenziale, di alcun poco, perchè il problema fosse risoluto.

« Ma noi non abbiamo gli occhi a fior di testa, bensì da 12-15 centimetri più in basso, senza parlare della copertura del capo, che può aumentare sensibilmente tale differenza. Ne segue che la visuale condotta nel modo indicato, già nella seconda fila andrebbe a colpire la sommità della testa, ma non gli occhi della persona seduta. Se vogliamo quindi, che questa veda il punto O, dobbiamo alzare il suo sedile come se il precedente fosse più alto di una quantità a, corrispondente alla detta differenza. La stessa considerazione vale per la terza, per la quarta fila e così di seguito, ciascuna delle quali deve supporsi alzata della quantità a colla regola ora indicata.

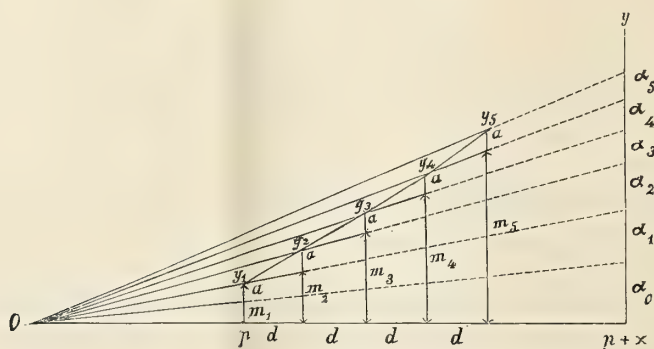



Fig. 1.

« La fig. 1 serve a chiarire il concetto. Se m_1 rappresenta l'altezza degli occhi della persona seduta in prima fila, $y_1 = m_1 + a$ è l'altezza totale. Nello stesso modo m_2 è l'altezza degli occhi per la persona di seconda fila, e $y_2 = m_2 + a$ l'altezza totale, e così via. Per i punti $y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5$ si può far passare una curva, che rappresenta la pendenza variabile dell'anfiteatro. Le ordinate singole sono facili a calcolarsi. Chiamiamo p la distanza del punto O dalla prima fila, d la distanza costante tra fila e fila; dalla somiglianza dei triangoli si ha

$$y_1 = m_1 + a$$

$$y_2 = m_2 + a = (m_1 + a) \cdot \frac{p + d}{p} + a$$

$$y_3 = m_3 + a = (m_2 + a) \cdot \frac{p + 2d}{p + d} + a$$

$$y_4 = m_4 + a = (m_3 + a) \cdot \frac{p + 3d}{p + 2d} + a$$

. . . . .

$$y_n = m_n + a = (m_{n-1} + a) \frac{p + (n-1)d}{p + (n-2)d} + a$$

relazioni che servono a calcolare i punti definiti della curva, ogni qual volta si conoscano p, m_1, a e d. La curva che si ottiene, è molto pronunciata; da cui si deduce che sostituendovi una retta, come si faceva negli antichi anfiteatri, si era molto lontani dalla soluzione del problema ottico.

« Per persuadersene, basta calcolare un esempio numerico. Pongo, come è press'a poco il caso dell'anfiteatro nell'Istituto fisico di Roma,

$$m_1 = \overset{m}{0{,}20}\ ,\ a = \overset{m}{0{,}20}\ ,\ p = \overset{m}{3{,}60}\ ,\ d = \overset{m}{0{,}90}$$

si ha la seguente tabella:

	I diff.	II. diff.	III. diff. (negat.)	Curva logaritmica (Cap. II.)	Diff. tra le due curve
$y_1 = \overset{m}{0{,}4000}$				$y_1 = \overset{m}{0{,}4000}$	0,0000
	$\overset{m}{0{,}3000}$				
$y_2 = 0{,}7000$		400		$y_2 = 0{,}7231$	0,0231
	3400		67		
$y_3 = 1{,}0400$		333		$y_3 = 1{,}0866$	0,0466
	3733		47		
$y_4 = 1{,}4133$		286		$y_4 = 1{,}4835$	0,0702
	4019		36		
$y_5 = 1{,}8152$		250		$y_5 = 1{,}9090$	0,0938
	4269		28		
$y_6 = 2{,}2421$		222		$y_6 = 2{,}3697$	0,1276
	4491		22		
$y_7 = 2{,}6912$		200		$y_7 = 2{,}8326$	0,1414
	4691		18		
$y_8 = 3{,}1603$		182		$y_8 = 3{,}3255$	0,1652
	4873		15		
$y_9 = 3{,}6476$		167		$y_9 = 3{,}8367$	0,1891
	5040		13		
$y_{10} = 4{,}1516$		154		$y_{10} = 4{,}3645$	0,2129
	5194				
$y_{11} = 4{,}6710$				$y_{11} = 4{,}9077$	0,2367

« Questa tabella è molto istruttiva. Confrontando le cifre della colonna colle I. differenze, per la curva calcolata colle relazioni precedenti, si vede che queste differenze importano tra la 1^a e la 2^a fila 30, tra la 10^a e la 11^a quasi 52 centimetri. La salita della curva è quindi piccola al principio e poi si accentua più e più. Ne segue l'inconveniente pratico, che la gradinata che dà l'accesso alle singole file, non può essere uniforme. Si vede difatti che, mentre la pendenza tra la prima e la seconda fila può essere superata con tre gradini di 10 centimetri di altezza ciascuno, la pendenza all'ultima fila richiede tre gradini di 17 centimetri. Ma questo inconveniente, piccolo in sè, è compensato dal vantaggio grandissimo, di risolvere il problema ottico col minor sviluppo possibile dell'anfiteatro. Difatti, se si volesse adottare per l'anfiteatro l'altezza risultante dal calcolo precedente per l'ultima fila in metri 4,6710, ma mantenere il piano inclinato, si avrebbe tra fila e fila la pendenza uniforme di $0^m{,}4271$, pendenza eccessiva fino alla quinta fila, buona tra la quinta e la sesta, insufficiente per le rimanenti file, per cui le ultime rimarrebbero sagrificate. Se si volesse invece favorire l'ultima fila, mantenendo la sua pendenza regolare di $0^m{,}5194$ anche

per tutte le altre, bisognerebbe dare a tutto l'anfiteatro l'altezza di $5^m,594$ invece di $4^m,671$, alzandolo quindi di 92 centimetri. Ne segue che l'antico modo di costruzione non può considerarsi come razionale.

« Dalla stessa tabella risulta inoltre, che anche le II. differenze sono tutt'altro che costanti; per cui la curva non solo si scosta notevolmente dalla linea retta, ma anche dalla parabolica.

« II. La curva, che passa per i punti $y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n$ corrispondenti alle ascisse $p, p+d, p+2d \ldots p+x$, è dunque di ordine superiore, e sorge spontaneo il desiderio di conoscerne la natura e la forma. Posto in questi termini generali, il problema è indeterminato, perchè si possono p. e. immaginare moltissime funzioni periodiche, che soddisfino alla condizione di passare per quei punti. Vogliamo quindi per ora restringere il problema alla ricerca della funzione più semplice, continua e aperiodica.

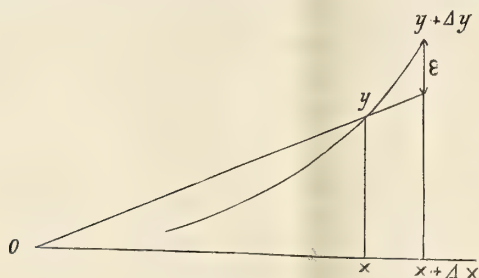



Fig. 2.

« Supponiamo che all'ascissa x corrisponda l'ordinata y. Se x aumenta di Δx, y diviene $y+\Delta y$. Dalla somiglianza dei triangoli si ha

$$(y+\Delta y-\varepsilon) : y = (x+\Delta x) : x$$

da cui

$$x\Delta y - y\Delta x = x\varepsilon\,,$$

dove ε rappresenta una quantità piccola, dell'ordine di Δx. Passando ai differenziali e dividendo per x^2, si ha

$$\frac{xdy-ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\varepsilon}{x}$$

e si tratta di trovare l'espressione di ε. Ora la supposizione più semplice, è questa: di scegliere ε in modo che divenga uguale ad a, quando Δx passi a essere uguale a d, dove d rappresenta la distanza costante tra una fila e la successiva. Abbiamo quindi

$$\varepsilon = \frac{a}{d}\, dx$$

e sostituendo

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{a}{d}\,\frac{dx}{x}$$

da cui

$$\frac{y}{x} = b + \frac{a}{d}\log x \quad \text{ossia} \quad y = bx + \frac{a}{d}\, x\log x \tag{1}$$

dove b rappresenta la costante d'integrazione, da determinarsi dalle condizioni speciali del problema. Per $x=1$, si ha $y=b$, il che vuol dire che b è la prima ordinata corrispondente all'ascissa 1.

« La supposizione, che abbiamo fatto ponendo $\varepsilon = \frac{a}{d} dx$, è la più semplice, ma non è rigorosamente vera; perchè confonde la curva, che riunisce due punti y e y' posti su due ordinate alla distanza d, colla retta tirata fra i due medesimi punti. La quantità ε è in fondo più piccola di quanto risulta da quella supposizione. Ne segue che l'equazione (1) non è rigorosamente esatta e deve condurre per y a valori troppo alti. Per vedere fino a che punto di approssimazione si arrivi, ho calcolato coi medesimi dati dell'esempio numerico precedente, la curva, i cui valori sono riportati nella tabella del cap. I. La differenza tra questa ed i valori esatti non è molto grande, ma non è trascurabile, salendo per l'ultima fila fino a 23 centimetri. Una migliore concordanza si ottiene, considerando l'equazione (1) come una formola empirica, con due costanti a e b da determinarsi. Prendendo p. e. come punti fissi quelli della prima e dell'ultima fila, e calcolando da essi non solo b, ma anche a, si trova

$$a = 0{,}18649 \quad \text{invece di} \quad a = 0{,}20000$$

e per una fila intermedia, p. e. per la settima

$$y_7 = 2{,}7089 \quad \text{invece di} \quad y_7 = 2{,}6912 \quad \text{diff. } 0{,}0177$$

vale a dire una differenza praticamente insignificante di meno di 2 centimetri. Ne segue che l'equazione (1) risolve bensì il problema dal punto di vista pratico, ma non in via teorica.

« Che questo sia così, si può dimostrare anche direttamente. Ponendo in (1) $x + d$ al luogo di x, si ha

$$y' = b\,(x + d) + \frac{a}{d}\,(x + d) \log\,(x + d)$$

Ora, la condizione fondamentale e caratteristica del problema è che

$$(y' - a) : y = (x + d) : x$$

da cui

$$y' - \frac{x + d}{x} \cdot y = a \tag{2}$$

« Ma se si sostituiscono in (2) i valori, si ha con breve riduzione per il primo membro dell'equazione

$$\frac{a}{d}\,(x + d)\,\log\left(1 + \frac{d}{x}\right)$$

il quale valore, invece di essere uguale ad a, è invece espresso dalla serie infinita

$$a\left\{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{x} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2}{x^2} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{d^3}{x^3} - \cdots\cdots\right\},$$

che diviene uguale ad a soltanto per $\lim x = \infty$.

« Scrivendo $p + x$ per x, dove p rappresenta l'ascissa corrispondente alla prima fila, la (1) diviene

$$y = b\,(p + x) + \frac{a}{d}\,(p + x) \log (p + x) \tag{3}$$

« III. Prolungando in fig. 1 le visuali corrispondenti alle singole file fino ad una ordinata y corrispondente all'ascissa arbitraria $p+x$, si hanno, sempre per la somiglianza dei triangoli, le seguenti equazioni

per la 1ª fila $\begin{cases} \alpha_0 = m_1 \dfrac{p+x}{p} \\ \alpha_1 = a \cdot \dfrac{p+x}{p} \end{cases}$ per la 2ª fila $\alpha_2 = a \cdot \dfrac{p+x}{p+d}$

» 3ª » $\alpha_3 = a \cdot \dfrac{p+x}{p+2d}$

per la nª fila $\alpha_n = a \cdot \dfrac{p+x}{p+(n-1)d}$

da cui
$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n = \frac{m_1}{p}(p+x)+a(p+x)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{p+2d}+\cdots+\frac{1}{p+(n-1)d}\right\}$$

« Per trovare la somma della serie finita, messa entro parentesi, prendiamo la progressione geometrica

$$s = z^{p-1} + z^{p+d-1} + z^{p+2d-1} + \cdots + z^{p+(n-1)d-1} = z^{p-1} \cdot \frac{1-z^{nd}}{1-z^d}$$

« Moltiplicando per dz e integrando fra 0 e z, per togliere la costante d'integrazione, si ha

$$\int_0^z s dz = \frac{z^p}{p} + \frac{z^{p+d}}{p+d} + \frac{z^{p+2d}}{p+2d} + \cdots + \frac{z^{p+(n-1)d}}{p+(n-1)d} = \int_0^z z^{p-1} \cdot \frac{1-z^{nd}}{1-z^d} dz$$

« L'integrale, in quella forma generale, non può determinarsi altro che mediante successive integrazioni per parti e riconduce alla serie finita di sopra. Ma esso rappresenta la somma di una serie più generale di quella che si cerca e diviene uguale a questa, quando si ponga $z=1$. Quindi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+d} + \frac{1}{p+2d} + \cdots + \frac{1}{p+(n-1)d} = \int_0^1 z^{p-1} \cdot \frac{1-z^{nd}}{1-z^d} dz \quad (4)$$

« Sia

$$z^d = u \ , \ z = u^{\frac{1}{d}} \ , \ z^{p-1} = u^{\frac{p-1}{d}} \ , \ dz = \frac{1}{d} u^{\frac{1}{d}-1} du$$

l'integrale in (4) si trasforma in

$$\frac{1}{d} \int_0^1 u^{\frac{p}{d}-1} \cdot \frac{1-u^n}{1-u} du$$

ed eseguendo la moltiplicazione e aggiungendo e togliendo 1 nel numeratore, si ha

$$\frac{1}{d} \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{p}{d}+n-1} - (1-u^{\frac{p}{d}-1})}{1-u} du = \frac{1}{d} \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{p}{d}+n-1}}{1-u} du - \frac{1}{d} \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{p}{d}-1}}{1-u} du \quad (5)$$

Questi due ultimi integrali appartengono ad un tipo, che l'analisi contem-

pla ed al quale essa ha dedicato un importante capitolo. Sono le *funzioni gamma* in una forma tutta speciale. Secondo queste, si ha

$$\frac{d \log \Gamma(\mu)}{d\mu} = Z(\mu) = -A + \int_0^1 \frac{1 - u^{\mu-1}}{1-u}\, du \qquad (6)$$

dove il simbolo $\Gamma(\mu)$ è rappresentato dall'integrale definito

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\mu-1}\, dx$$

ed $A = 0{,}5772156\ldots$ è una costante $= -Z(1)$.

« Ponendo nella (6) prima $\mu = \frac{p}{d} + n$, poi $\mu = \frac{p}{d}$, si ha

$$\int_0^1 \frac{1 - u^{\frac{p}{d}+n-1}}{1-u} \cdot du = +A + Z\left(\frac{p}{d} + n\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1 - u^{\frac{p}{d}-1}}{1-u} \cdot du = +A + Z\left(\frac{p}{d}\right)$$

e sostituendo questi valori in (5) e in (4)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+d} + \frac{1}{p+2d} + \cdots + \frac{1}{p+(n-1)d} = \frac{1}{d}\left\{Z\left(\frac{p}{d}+n\right) - Z\left(\frac{p}{d}\right)\right\}$$

e quindi

$$y_n = \frac{m_1}{p}(p+x) + \frac{a}{d}(p+x)\left\{Z\left(\frac{p}{d}+n\right) - Z\left(\frac{p}{d}\right)\right\} \qquad (7)$$

dove n è un numero intero, progressivo, e indica la fila contemplata. La quantità p è arbitraria, purchè sia positiva, le funzioni Γ e Z essendo valide per soli valori positivi; y_n è l'ordinata corrispondente a un numero n di file projettate sopra di essa a una distanza (ascissa) arbitraria $p + x$. La quantità m_1 (o meglio $m_1 + a$) significa l'ordinata della prima fila.

« IV. Per verificare la equazione (7) e per vederne chiaramente il significato, poniamo secondo una nota relazione

$$\Gamma\left(\frac{p}{d}+n\right) = \frac{p}{d}\left(\frac{p}{d}+1\right)\left(\frac{p}{d}+2\right)\cdots\left(\frac{p}{d}+n-1\right)\Gamma\left(\frac{p}{d}\right)$$

valevole per qualsiasi valore di $\frac{p}{d}$, purchè positivo e per valori interi di n.

$$\log \Gamma\left(\frac{p}{d}+n\right) = \log\left(\frac{p}{d}\right) + \log\left(\frac{p}{d}+1\right) + \log\left(\frac{p}{d}+2\right) + \cdots$$
$$+ \log\left(\frac{p}{d}+n-1\right) + \log \Gamma\left(\frac{p}{d}\right)$$

e prendendo le derivate e considerando che

$$\frac{d \log \Gamma\left(\frac{p}{d}+n\right)}{d\left(\frac{p}{d}\right)} = Z\left(\frac{p}{d}+n\right) \quad , \quad \frac{d \log \Gamma\left(\frac{p}{d}\right)}{d\left(\frac{p}{d}\right)} = Z\left(\frac{p}{d}\right)$$

si ha $Z\left(\frac{p}{d}+n\right)-Z\left(\frac{p}{d}\right)=\frac{d}{p}+\frac{d}{p+d}+\frac{d}{p+2d}+\cdots+\frac{d}{p+(n-1)d}$

quindi

$$y_n=\frac{m_1}{p}(p+x)+a(p+x)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p+2d}+\cdots+\frac{1}{p+(n-1)d}\right\}$$

« Scrivendo $n+1$ in luogo di n, si ha

$$y_{n+1}=\frac{m_1}{p}(p+x)+a(p+x)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p+2d}+\cdots+\frac{1}{p+(n-1)d}+\frac{1}{p+nd}\right\}$$

per cui $$y_{n+1}-y_n=a(p+x)\cdot\frac{1}{p+nd}$$

« I valori di y_{n+1} e y_n si riferiscono alla medesima ordinata, posta alla distanza arbitraria $p+x$. Se si vogliono riferire all'ultima fila contemplata, dell'ordine $n+1$, bisogna porre $x=nd$. Si ha

$$y_{n+1}-y_n=a$$

il che è rigorosamente conforme alla condizione del problema.

« Per indicare, in tesi generale e in conformità di tutto il precedente ragionamento, che x si riferisce alla fila n, poniamo

$$x=(n-1)d \quad \text{ossia} \quad n=\frac{x}{d}+1$$

per cui la formola (7) diviene

$$y=\frac{m_1}{p}(p+x)+\frac{a}{d}(p+x)\left\{Z\left(\frac{p+x}{d}+1\right)-Z\left(\frac{p}{d}\right)\right\} \qquad (8)$$

ossia, considerando che

$$\Gamma\left(\frac{p+x}{d}+1\right)=\frac{p+x}{d}\cdot\Gamma\left(\frac{p+x}{d}\right)$$

quindi $$Z\left(\frac{p+x}{d}+1\right)=\frac{d}{p+x}+Z\left(\frac{p+x}{d}\right)$$

la formola (8) prende anche la forma

$$y=a+\frac{m_1}{p}(p+x)+\frac{a}{d}(p+x)\left\{Z\left(\frac{p+x}{d}\right)-Z\left(\frac{p}{d}\right)\right\} \qquad (9)$$

« La restrizione che x sia un multiplo di d, non pregiudica la generalità della soluzione, perchè nelle formole finali (8) e (9) figura sempre $p+x$ e non x soltanto; ed essendo p un valore arbitrario, purchè positivo, anche $p+x$ può avere un valore positivo qualsiasi. Con queste formole è data quindi la soluzione generale del problema. Possiamo ora semplificare la (8) ponendo $$\frac{p+x}{d}=u$$

dove u rappresenta una nuova variabile, la quale può assumere tutti i valori da $u=0$ fino a $u=\infty$, e considerando che il termine $Z\left(\frac{p}{d}\right)$ è costante, ponendo $$c=\frac{md}{p}-aZ\left(\frac{p}{d}\right)$$

la (8) assume la forma semplice e generale

$$y=cu+auZ(u+1) \qquad (10)$$

Si osserverà la grande rassomiglianza di questa equazione colla equazione approssimata logaritmica (3).

« Per fare anche meglio risaltare tale somiglianza, basta trasformare la (3) nello stesso modo, come abbiamo trasformato la (8). Ponendo di nuovo

$$\frac{p+x}{d}=u \quad , \quad c=bd+a\log d$$

la (3) diviene infatti $\qquad y=cu+au\log u\,.$

In ambedue la c è una costante da determinarsi sulle condizioni speciali del problema, e la sola differenza sta in ciò, che al posto di un logaritmo figura una funzione Z. Ma se le due equazioni hanno una forma esterna consimile, la loro vera natura non cessa per ciò di essere diversa. Difatti le funzioni Z possono esprimersi colla serie seguente

$$Z(\mu)=\lim\left\{\log n-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+1}-\frac{1}{\mu+2}-\cdots\frac{1}{\mu+n}\right\} \quad \text{per} \quad \lim n=\infty$$

da cui risulta che soltanto per $\lim\mu=\infty$, si può porre

$$\lim Z(\mu)=\lim\log n$$

vale a dire, la funzione Z si avvicina indefinitamente al logaritmo soltanto per valori grandissimi del suo argomento.

« V. Il medesimo problema può risolversi anche per altra via. Come appare dalla fig. 3, quando $p+x$ diviene $p+x+d$, y diviene y' e sempre per la solita somiglianza dei triangoli si ha

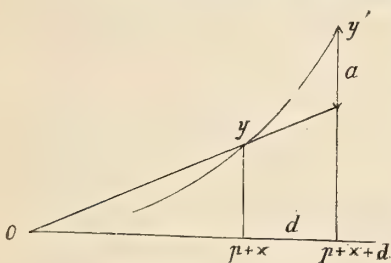



Fig. 3.

$$y'-a=y\cdot\frac{p+x+d}{p+x}$$

ossia

$$y'=y\cdot\frac{p+x+d}{p+x}+a$$

Ponendo $y=f(p+x)$, $y'=f(p+x+d)$ si ha l'equazione funzionale

$$f(p+x+d)=\frac{p+x+d}{p+x}f(p+x)+a$$

che si tratta di risolvere. Poniamo $x=0$, si ha

$$f(p+d)=\frac{p+d}{p}f(p)+a\,.$$

« Prima di proseguire, conviene avvertire che $f(p)$ è il valore dell'ordinata per la prima fila. La soluzione più semplice, consiste nel considerarla costante e per avere una formola direttamente paragonabile alle (8) e (9), porremo $f(d)=m_1+a$; avremo

per la 2ª fila: $\qquad f(p+d)=\frac{m_1}{p}(p+d)+a(p+d)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}\right\}$

Ponendo successivamente $x=d\ ,\ 2d\,,\cdots(n-1)\,d\,,$ con sostituzioni successive avremo

per la 3ª fila: $\qquad f(p+2d)=m_1\cdot\frac{p+2d}{p}+a(p+2d)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p+2d}\right\}$

. . . .

per la n^a fila: $f(p+(n-1)d) =$

$$=m_1 \cdot \frac{p+(n-1)d}{p} + a(p+(n-1)d)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p+2d}+\cdots+\frac{1}{p+(n-1)d}\right\}$$

La serie finita evidentemente è la stessa di quella del cap. III., per la quale abbiamo trovato il valore

$$\frac{1}{d}\left\{Z\left(\frac{p}{d}+n\right)-Z\left(\frac{p}{d}\right)\right\}$$

e sostituendo $x=(n-1)d$, colle stesse avvertenze e colle stesse trasformazioni di prima, si hanno formole identiche alla (8), alla (9) e alla (10).

« Fin qui abbiamo tacitamente supposto, che le persone contemplate per le singole file e il punto O siano collocati nel medesimo piano verticale, normale alle file dei sedili. Questo è il caso, quando l'anfiteatro abbia la forma di un semicerchio e il punto O si trovi nel centro del medesimo. Per altre forme di costruzione il caso è raro e vi sono ben pochi i posti, per i quali quella condizione si verifichi. Si può però facilmente dimostrare, che le formole trovate valgono anche per gli altri posti. Siano le rette (1)(1), (2)(2), (3)(3) le projezioni delle file sopra un piano orizzontale che passi per il punto O; sia OA il piano verticale normale, OB un altro piano verticale formante col primo un angolo ω; le distanze p, d, $p+x$ diventano relativamente $\frac{p}{\cos\omega}$, $\frac{d}{\cos\omega}$, $\frac{p+x}{\cos\omega}$ ed introducendo questi valori nella formola (8), si vede che $\cos\omega$ scompare dalla equazione, la quale rimane inalterata.

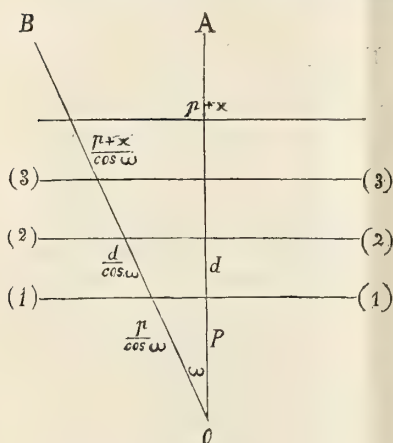



Fig. 4.

« L'equazione (8) e quindi anche la (9) e la (10) sono dunque applicabili alle visuali oblique e la soluzione del problema ottico vale per tutti gli spettatori.

« VI. L'equazione

$$y = cu + au\,Z(u+1)\ , \quad \text{in cui} \quad c=\frac{md}{p}-aZ\left(\frac{p}{d}\right) \qquad (10)$$

è dunque la soluzione generale del problema. Giova quindi esaminarne l'andamento.

« 1. Ponendo $u=0$, considerando che $Z(1)=-0{,}57721\ldots\ldots$ si ha $y=0$; dunque la curva passa per l'origine delle coordinate. Dalla (10) si ha pure

$$\frac{y}{u}=\operatorname{tang}\varphi = c + a\,Z(a+1)$$

dove φ rappresenta l'angolo del vettore visuale colla orizzontale. Per $u = 0$ si ha

$$\tang \varphi_0 = c + a\mathrm{Z}(1)\,.$$

« La costante c può essere positiva o negativa, a seconda che $\frac{md}{p} \lesseqgtr a\mathrm{Z}\left(\frac{a}{d}\right)$. Ne segue che anche $\tang \varphi_0$ può essere positiva o negativa; perchè $\mathrm{Z}(1) = -0{,}57721\ldots$ è negativa. Abbiamo

$$\tang \varphi_0 \text{ positiva, quando } \mathrm{Z}(1) > -\frac{c}{a}$$

$$\tang \varphi_0 \text{ negativa, quando } \mathrm{Z}(1) < -\frac{c}{a}\,.$$

Nel primo caso la curva, partendo dall'origine delle coordinate, va subito nei positivi; nel secondo essa scende nei negativi, arriva a un minimo e ripassa l'asse delle ascisse rimanendo poi positiva.

« 2. Per trovare l'ascissa corrispondente al punto di passaggio per l'asse delle ascisse, basta porre

$$y = cu + au\mathrm{Z}(u+1) = 0$$

condizione che è soddisfatta da $u = 0$ (origine delle coordinate) ed anche da

$$c + a\,\mathrm{Z}(u+1) = 0\,, \quad \text{ossia} \quad \mathrm{Z}(u+1) = -\frac{c}{a}\,.$$

Più difficili a trovare sono le condizioni del minimo. Dalla (10) si ha

$$\frac{dy}{du} = c + a\,u\,\frac{d\mathrm{Z}(u+1)}{du} + a\mathrm{Z}(u+1) = 0\,.$$

Considerando che

$$\mathrm{Z}(u+1) = -\mathrm{A} + \int_0^1 \frac{1-z^u}{1-z}\,dz = \lim\left\{\log n - \sum_1^\infty \frac{1}{u+n}\right\} \quad \text{per } \lim n = \infty$$

$$\frac{d\mathrm{Z}(u+1)}{du} = -\int_0^1 \frac{z^u \log z}{1-z}\,dz = +\lim \sum_1^\infty \frac{1}{(u+n)^2} \quad \text{» » »}$$

sostituendo $\frac{dy}{du} = c + a\lim\left\{\sum_1^\infty \frac{u}{(u+n)^2} + \log n - \sum_1^\infty \frac{1}{u+n}\right\} = 0\,.$

« Le due somme Σ possono facilmente ridursi in una sola. La funzione messa entro parentesi assume quindi la forma

$$\lim\left\{\log n - \sum_1^\infty \frac{n}{(u+n)^2}\right\} \quad \text{per } \lim n = \infty$$

e rappresenta una nuova trascendente, simile alla Z, ma di un ordine superiore. Ponendola uguale a $\Phi(u+1)$, la sua definizione è data da

$$\Phi(u+1) = \frac{d[u\mathrm{Z}(u+1)]}{du}$$

od anche da

$$\Phi(u+1) = \lim\left\{\log n - \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{(u+2)^2} - \cdots - \frac{n}{(u+n)^2}\right\} \text{per } \lim n = \infty.$$

Ciò posto, abbiamo per il minimo $c+a\Phi(u+1)=0$, da cui $\Phi(u+1)=-\frac{c}{a}$. Riassumendo abbiamo questo rimarchevole risultato: Perchè vi sia un minimo, bisogna che $\frac{c}{a}$ abbia un valore tale, che risulti $Z(1)<-\frac{c}{a}$. Allora il minimo corrisponde a $\Phi(u+1)=-\frac{c}{a}$, e la curva ripassa l'asse delle ascisse per $Z(u+1)=-\frac{c}{a}$.

« 3. Quando si sia in possesso di tavole per le funzioni Γ e Z e anche per Φ, il calcolo della curva riesce sempre molto facile [1]. Così nell'esempio posto al cap. I., dove si ha

$$m=0,20 \quad , \quad a=0,20 \quad , \quad d=0,90 \quad , \quad p=3,60$$

si trova facilmente $c=-0,2012$

$\varphi_0=-17°34'$ (inclinazione all'origine)

$u=0,90$ (minimo)

$u=2,24$ (la curva ripassa l'asse delle ascisse)

e per il controllo della curva nella parte positiva, p. e.

per $u=4$ $y=0,400$ 1ª fila

$u=10$ $y=2,692$ 7ª fila

valori esatti.

« Ma anche senza le tavole, in casi speciali, il calcolo può ridursi a piccola cosa. Supponiamo, come è il caso dell'esempio al cap. I., che nella formola (9), non solo x, ma anche p, quindi pure $p+x$ siano un multiplo di d, allora

$$\frac{p}{d}=\nu \quad , \quad \frac{x}{d}=n$$

dove n e ν sono numeri interi. In quest'esempio $\nu=4$ e per l'ultima (11ª) fila $n=10$. Si ha quindi

$$y=0,20+0,70+2,80\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\frac{1}{13}\right\}=4,6710$$

valore identico a quello ivi trovato.

« VII. La funzione, continua e aperiodica, messa nella sua forma più generale

$$y=cu+auZ(u+1)$$

dove u rappresenta qualsiasi valore positivo, è la funzione più semplice, che soddisfi alla condizione di passare per i punti singoli varie volte definiti; ma non è la sola. Si possono immaginare molte funzioni periodiche, che soddisfino alla stessa condizione. Lo sviluppo del cap. V. ci porge la via;

[1] Per le funzioni $\Gamma(\mu)$ esistono le tavole di Gauss da $\mu=1,00$ a $\mu=2,00$. Egli le chiama $\Pi(\mu-1)$, ma è lo stesso. Esistono poi le tavole più complete di Legendre da $\mu=1,000$ a $\mu=2,000$. Infine le tavole di Gauss per $\Psi(\mu-1)=Z(\mu)$ da $\mu=1,00$ a $\mu=2,00$. Renderebbe un vero servizio alla scienza chi volesse estenderle e pubblicarle in forma pratica.

dove come soluzione più semplice abbiamo considerato $f(p)$ come costante, mentre si poteva considerarla come funzione periodica opportunamente scelta. In forma anche più generale, se y data dalla relazione qui sopra indicata, rappresenta una soluzione, anche $y f(2\pi k(u-u_0))$ sarà una soluzione, purchè f sia una funzione periodica, che soddisfi alla condizione di essere $=1$, quante volte $u=u_0, u_0+1, u_0+2\ldots$ ecc, per u_0 intendendosi l'ascissa della prima fila, od anche questa ascissa diminuita di un numero intero, in modo però da rimanere positiva; k è pure un numero intero ed indica il numero delle oscillazioni, che si compiono tra fila e fila. Così, a titolo di esempio, si può porre

$$f(2\pi k(u-u_0))=\frac{2}{A_0}\left\{\frac{1}{2}A_0+A_1e^{-a_1 v}\operatorname{sen}2\pi k(u-u_0)+A_2e^{-a_2 v}\operatorname{sen}4\pi k(u-u_0)+\cdots\right\}$$

Si ottiene in questo caso una curva, che oscilla con ampiezze decrescenti e con forma complicata sopra e sotto la curva semplice y in modo, da passare per tutti i punti singoli fissati per questa e da compiere k oscillazioni in ogni intervallo compreso fra un punto fisso e il successivo. Non ho però bisogno di aggiungere, che con questa soluzione molto più generale si va al di là del problema ottico degli anfiteatri, perchè le visuali procedono per linee rette e non per curve periodiche ".

Meccanica. — *Sopra una proprietà degli integrali di un problema di meccanica che sono lineari rispetto alle componenti della velocità.* Nota del Socio V. Cerruti.

" 1. Perchè le equazioni del moto di un sistema di punti con n gradi di libertà

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k'}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k\qquad (k=1,2,\ldots n)$$

ammettano un integrale primo della forma

$$(2)\qquad C_1q_1'+C_2q_2'+\cdots+C_nq_n'+C=\text{cost.},$$

debbono essere soddisfatte dalle condizioni, che sono volgarmente conosciute, nel caso almeno che le C_i e le Q_i si presuppongono dipendere soltanto dalla configurazione del sistema, e che i vincoli, i quali limitano la mobilità del sistema stesso, non variano col tempo, vale a dire che è

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{ik}a_{ik}q_i'q_k'$$

una forma quadratica omogenea rispetto alle q_i'. Non sembra invece che sia stata espressamente osservata la identità delle mentovate condizioni con

quelle per la possibilità di un movimento rigido nello spazio multiplo S_n, pel quale

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dq_i\, dq_k \tag{3}$$

è il quadrato dell'elemento lineare. Tale identità si può facilmente ricavare da varie comunicazioni del sig. M. Levy all'Accademia delle scienze di Parigi (1), ma col procedimento qui appresso si rende come intuitiva.

« Posto per compendio

$$a = \sum (\pm\, a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}), \quad \alpha_{ik} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{ik}},$$

dalla (1) moltiplicata per α_{ik} e dopo aver sommato rispetto all'indice k, si trae, utilizzando i simboli di Christoffel a tre indici di seconda specie relativi alla forma quadratica (3),

$$q_i'' + \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} q_r'\, q_s' = V_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

con

$$V_i = \sum_k \alpha_{ik}\, Q_k\,.$$

Perchè la (2) sia un integrale delle (1) e quindi delle (4), bisognerà che in virtù delle (4) si abbia identicamente

$$\sum_i C_i\, q_i'' + \sum_{rs} \frac{\partial C_r}{\partial q_s}\, q_r'\, q_s' + \sum_i \frac{\partial C}{\partial q_i}\, q_i' = 0,$$

ossia

$$\sum_{rs} \left[\frac{\partial C_r}{\partial q_s} + \frac{\partial C_s}{\partial q_r} - 2 \sum_i \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} C_i \right] q_r'\, q_s' + \sum_i \frac{\partial C}{\partial q_i}\, q_i' + \sum_i C_i\, V_i = 0\,;$$

e questa equazione, quando le C_i e le V_i dipendono soltanto dalle q_i, si spezza nelle seguenti:

$$\frac{\partial C_r}{\partial q_r} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} rr \\ i \end{matrix} \right\} C_i\,, \quad \frac{\partial C_r}{\partial q_s} + \frac{\partial C_s}{\partial q_r} = 2 \sum_i \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} C_i\,, \quad (r, s = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$\sum_i C_i\, V_i = 0\,. \tag{6}$$

Cioè la C deve ridursi ad una costante che si può anche supporre nulla:

(1) V. Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 86, pp. 463-466, 812-815, 875-878, 947-950.

quanto alle C, che sono in numero di n, debbono soddisfare le $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni (5) alle derivate parziali lineari del primo ordine. Dunque le equazioni (4), e quindi le (1), ammetteranno o non ammetteranno integrali della forma (2) secondochè le equazioni (5) hanno o non hanno soluzioni comuni. Quando le (5) hanno soluzioni comuni, la (6) stabilisce ancora una relazione che deve intercedere tra le forze, perchè sussista l'integrale (2).

« 2. Premesso ciò, si considerino nello spazio S_n tre punti M, M', M_1 infinitamente vicini di coordinate

$$\begin{gathered} q_1, q_2, \cdots q_n; \\ q_1 + dq_1, \; q_2 + dq_2, \cdots q_n + dq_n; \\ q_1 + d'q_1, \; q_2 + d'q_2, \cdots q_n + d'q_n; \end{gathered}$$

accennando con ω l'angolo compreso fra i due elementi lineari $MM' = ds$, $MM_1 = ds_1$, si avrà, per cose note,

$$ds\, ds_1 \cos\omega = \sum_{ik} a_{ik}\, dq_i\, d'q_k .$$

Immaginiamo prodotta nello spazio S_n una deformazione infinitesima per effetto della quale il punto M passi nel luogo di coordinate $q_1 + \delta q_1$, $q_2 + \delta q_2, \cdots q_n + \delta q_n$: la variazione corrispondente di $ds\, ds_1 \cos\omega$ risulterà così espressa

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \delta \cdot ds\, ds_1 \cos\omega &= ds\, ds_1 \cos\omega \left(\frac{d\delta s}{ds} + \frac{d\delta s_1}{ds_1}\right) - ds\, ds_1 \operatorname{sen}\omega\, \delta\omega \\ &= \sum_{ik} \delta a_{ik} dq_i\, d'q_k + \sum_{ik} a_{ik} (d\delta q_i\, d'q_k + dq_i\, d'\delta q_k), \end{aligned}$$

ossia

$$\text{(7}_1\text{)} \qquad \delta \cdot ds\, ds_1 \cos\omega = 2 \sum_{ik} \theta_{ik}\, dq_i\, d'q_k$$

dove

$$2\theta_{ik} = \delta a_{ik} + \sum_r \left(a_{rk} \frac{\partial \delta q_r}{\partial q_i} + a_{ri} \frac{\partial \delta q_r}{\partial q_k} \right).$$

Introduciamo in luogo delle δq altre funzioni u definite dalle equazioni

$$\text{(8)} \qquad u_k = \sum_r a_{rk}\, \delta q_r ,$$

allora, giovandoci de' simboli di Christoffel a tre indici di prima specie relativi alla forma (3), otteniamo per θ_{ik} l'espressione

$$\theta_{ik} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_i} + \frac{\partial u_i}{\partial q_k} \right) - \sum_r \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \delta q_r .$$

Ma dalla (8) si trae inversamente

$$(9)\qquad \delta q_r = \sum_g \alpha_{gr} u_g ,$$

e si sa che

$$\sum \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \alpha_{gr} = \begin{Bmatrix} ik \\ g \end{Bmatrix} ;$$

dunque, sostituendo nell'espressione trovata per θ_{ik} il valore di δq_r dato dalle (9), avremo

$$(10)\qquad \theta_{ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial q_i} + \frac{\partial u_i}{\partial q_k}\right) - \sum_g \begin{Bmatrix} ik \\ g \end{Bmatrix} u_g ,$$

che tra le varie forme sotto le quali si può mettere l'espressione di θ_{ik}, è la più appropriata al nostro scopo. Quanto al significato geometrico delle θ_{ik} esso discende immediatamente dalla (7).

« Se è possibile nello spazio S_n un moto rigido, debbono potersi assegnare delle funzioni δq e quindi delle funzioni u tali che per esse risulti il secondo membro della (7_1) identicamente nullo, cioè tali che si abbia

$$\theta_{ii} = 0 , \quad \theta_{ik} = 0 , \quad (i , k = 1 , 2 , \ldots n) ,$$

od anche

$$(11)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial q_i} = \sum_g \begin{Bmatrix} ii \\ g \end{Bmatrix} u_g , \quad \frac{\partial u_k}{\partial q_i} + \frac{\partial u_i}{\partial q_k} = 2 \sum_g \begin{Bmatrix} ik \\ g \end{Bmatrix} u_g .$$

Ora queste equazioni, salvo la diversità de' simboli, collimano colle (5): dunque le condizioni (5), perchè le equazioni (1) ammettano un integrale della forma (2), si traducono in sostanza nelle condizioni, perchè sia possibile nello spazio S_n un moto rigido infinitesimo: diremo Σ questo moto rigido.

« 3. Quando sia possibile un cosiffatto movimento Σ, le C_i e le u_i corrispondenti non potranno differire che per un fattore costante lo stesso per tutte; si avrà cioè

$$u_i = \eta C_i ,$$

dove η è una costante infinitesima: con ciò la relazione (6) tra le forze, necessaria per la esistenza dell'integrale (2), si potrà scrivere

$$\sum u_i V_i = 0 ,$$

ossia

$$(12)\qquad \sum_{ik} a_{ik} V_i \delta q_k = 0 .$$

E così scritta è suscettiva di una interpretazione elegante. Premettiamo che al moto del nostro sistema di punti può farsi corrispondere, come immagine, il moto di un punto M nello spazio S_n. La trajettoria di M si accenni con s.

Se il moto Σ si concepisce ripetuto indefinite volte, ogni punto di S_n descriverà una certa curva σ. Per il luogo occupato attualmente da M su s conduciamo un elemento MV nella direzione $V_1:V_2:\cdots:V_n$ e la tangente MT alla curva σ che passa per esso: la (12) dice che le due direzioni MV ed MT debbono essere perpendicolari fra loro.

« La ripetizione del moto Σ e quindi gli spostamenti δs de' varî punti di S_n sulla corrispondente curva σ si facciano corrispondere a' successivi incrementi $\delta\tau$ di una variabile ausiliaria τ: allora l'integrale (2) si potrà mettere sotto la forma

$$\sum_{ik} a_{ik}\, dq_i\, \delta q_k = \gamma \delta\tau\, dt\,,$$

dove γ è una costante arbitraria; od anche, se ω è l'angolo compreso fra le due direzioni $dq_1:dq_2:\cdots:dq_n$; $\delta q_1:\delta q_2:\cdots:\delta q_n$,

$$ds\, \delta s \cos\omega = \gamma \delta\tau\, dt\,. \tag{13}$$

Se le forze son nulle, la trajettoria di M è una geodetica di S_n, e $\frac{ds}{dt}$ costante. Immaginando questa costante compenetrata in γ, l'integrale (13) diventerà

$$\delta s \cos\omega = \gamma\delta\tau\,, \tag{14}$$

e, se si introducono nuovamente le funzioni C_i,

$$\sqrt{\sum_{ik} \alpha_{ik}\, C_i\, C_k}\, \cos\omega = \gamma\,, \tag{14$_1$}$$

che costituisce per le geodetiche di uno spazio qualunque S_n, nel quale è possibile un moto rigido, l'analogo di un ben noto teorema relativo alle geodetiche tracciate sopra una superficie di rivoluzione ».

Chimica. — *Sulla costituzione del Dimetilnaftol proveniente dagli acidi santonosi.* Nota di S. Cannizzaro ed A. Andreocci.

« Nella Nota preliminare presentata nella seduta del 2 dicembre 1894, abbiamo annunziato lo studio intrapreso sul dimetilnaftol proveniente dalla decomposizione degli acidi santonosi; diamo ora rapido conto dei risultati ottenuti.

« Abbiamo trasformato il dimetilnaftol nella dimetilnaftilammina corrispondente, preparandone prima il derivato acetilico nel modo seguente. Abbiamo scaldato per circa otto ore tra 250° e 280° in tubi chiusi un miscuglio di 10 parti di dimetilnaftol, 24 di acetato sodico fuso, 10 di acido

acetico glaciale e 16 di cloruro ammonico. Si ottiene così l'acetil derivato dell'ammina che si depura lavandolo con molta acqua, e poi cristallizzandolo dall'alcool bollente più volte. Si presenta in aghi bianchi riuniti in piccoli mammelloni fusibili a 220°; solubile nell'alcool bollente, poco a freddo, quasi insolubile nell'etere.

« Per saponificarlo si scaldò con alcoolato sodico tra 150° e 180° in tubi chiusi, si versò il contenuto dei tubi in una grande quantità di acqua, la dimetilnaftilammina si depose cristallina. Si depurò o cristallizzandola nell'etere, o distillandola in corrente di vapore. È solubilissima nell'etere, nell'alcool, pochissimo nell'acqua alla quale pure comunica una fluorescenza azzurra come fa il dimetilnaftol corrispondente, cristallizza in lunghi prismi aciculari, fonde a 74°, bolle a 333° alla pressione di 745^{mm}, senza alterarsi sensibilmente; fa l'idroclorato, ed il solfato pochissimo solubili nell'acqua, il cloroplatinato di colore arancio ben cristallizzato più solubile nell'alcool che nell'acqua; coll'anidride acetica a freddo dà immediatamente il derivato acetilico da cui provenne.

« Abbiamo voluto eliminare qualsiasi dubbio sulla posizione del NH^2 in quest'ammina, convertendola per mezzo del diazoderivato nel naftol corrispondente, che abbiamo riconosciuto identico al dimetilnaftol da cui eravamo partiti.

« Abbiamo ossidato tanto l'ammina quanto il naftol scaldandoli a bagno maria con una soluzione alcalina di permanganato potassico aggiungendone sinchè non si scolorava, e dall'uno e dall'altro abbiamo ottenuto acido ossalico ed acido ftalico.

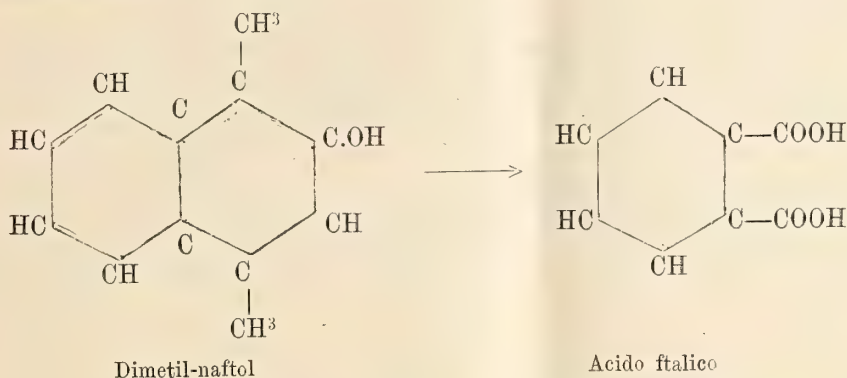
« In questa ossidazione l'ammina dà anche una certa quantità di azoderivato $C^{12}H^{11}N=NC^{12}H^{11}$ il quale si depone insieme all'ossido di manganese, da cui si estrae per mezzo dell'etere che lo lascia in aghi, rossi-arancio fusibili a 253°, volatili senza alterazione. — Non ostante la formazione di questo prodotto, la quantità di acido ftalico ottenuta dalla ossidazione dell'ammina è maggiore di quella che si ottiene dalla ossidazione del naftol, il quale dà molta materia sciropposa da cui non si è potuto estrarre alcun composto definito.

« Con questa produzione dell'acido ftalico per l'ossidazione tanto della ammina che del naftol abbiamo raggiunto lo scopo che ci eravamo proposto nello studio intrapreso, avendo dimostrato direttamente che l'ossidrile fenico nel dimetilnaftol proveniente dagli acidi santonosi, come l'NH^2 nell'ammina corrispondente sono nello stesso anello naftalico che contiene i due metili; poichè l'ossidazione ha dovuto rompere precisamente questo anello reso più vulnerabile per la inserzione dell'OH fenico o dell'NH^2 amminico. Difatti se questi residui fossero stati invece inseriti nell'altro anello non contenente i metili, allora l'ossidazione avrebbe dovuto conservare questi metili nel prodotto, cioè avrebbe dovuto dare l'acido dimetilftalico, come ottennero il Gucci

ed il Grassi da derivati della santonina nei quali, all'opposto di ciò che avviene nel dimetilnaftol, era più accessibile all'ossidazione l'anello non contenente i metili perchè idrogenato ossia aliciclico ([1]).

« Dalle esperienze or ora rammentate del Gucci e Grassi, i quali da derivati immediati della santonina ottennero l'acido paradimetilftalico da cui il paradimetilbenzol, essendo stato posto fuor di dubbio che i due metili sono nella santonina e perciò negli acidi santonosi e nel dimetilnaftol nello stesso anello naftalico in posizioni para, ed essendo risultato dalle nostre esperienze direttamente ben dimostrato che l'ossidrile fenico del dimetilnaftol da noi studiato è nello stesso anello ove sono attaccati i due metili, la costituzione del detto naftol e la sua trasformazione in acido ftalico sono espresse nel modo seguente:

CH^3 — C; CH, C, HC, C.OH, HC, CH, CH, C, C — CH^3 ⟶ CH; HC, C—COOH; HC, C—COOH; CH

Dimetil-naftol — Acido ftalico

« Questa costituzione da noi dimostrata del dimetilnaftol è precisamente quella che era stata suggerita dai lavori sulla santonina e suoi derivati di Cannizzaro, Carnelutti, Gucci, Grassi ed Andreocci ([2]).

« Abbiamo voluto ottenere dalla dimetilnaftilammina e ristudiare la dimetilnaftalina corrispondente.

« A tal fine in alcool assoluto saturo di acido nitroso e raffreddato in un miscuglio di neve e sale abbiamo aggiunto il cloridrato dell'ammina; dopo

([1]) *Sopra alcuni derivati della santonina.* Gazzetta chim. ital., vol. XXII, parte I, pag. 1.

([2]) S. Cannizzaro e Carnelutti, *Su due acidi isomeri santonoso ed isosantonoso.* Gazz. Chim. Ital., vol. XII, pag. 393. — S. Cannizzaro, *Sui prodotti di scomposizione dell'acido santonoso ed isosantonoso.* Gazz. Chim. Ital., vol, XIII, pag. 385. — P. Gucci e G. Grassi-Cristaldi, *Sopra alcuni derivati della santonina.* Gazz. Chim. Ital., vol. XXII, parte I, pag. 1. — S. Cannizzaro e P. Gucci, *Sopra alcuni derivati dell'acido fotosantonico.* Questi Rendiconti, 1892, 2° semestre, pag. 149; e Gazz. Chim. Ital., vol. XXIII, parte I, pag. 286. — A. Andreocci, *Sopra due nuovi isomeri della santonina e due nuovi isomeri dell'acido santonoso.* Gazz. Chim. Ital., vol. XXIII, parte II, pag. 467. — A. Andreocci, *Sulla struttura degli acidi santonosi.* Questi Rendiconti, vol. IV, 1° sem. 1895, pag. 68.

pochi secondi si depose il cloruro del diazocomposto in aghetti gialli. — Si aggiunse una soluzione alcoolica di cloruro stannoso in eccesso, terminata la prima reazione, si scaldò a bagno maria sinchè cessò ogni indizio di sviluppo gassoso. Si distillò in seguito una gran parte dell'alcool a bagnomaria, ciò che restò si distillò in corrente di vapore che trasportò l'idrocarburo insieme ad un po' di dimetilnaftol. Al liquido distillato in cui è sospeso l'idrocarburo si aggiunse potassa per ritenere il naftol e si agitò con etere; la soluzione eterea decantata e svaporata a bagno-maria lasciò l'idrocarburo leggermente colorato che si depurò distillandolo sul sodio. Per separare dall'alcool la piccola porzione di idrocarburo che era distillata insieme, vi si aggiunse acido picrico e si distillò l'alcool, rimase come residuo il picrato, che si decompose distillandolo con potassa in corrente di vapore di acqua; dal distillato si separò l'idrocarburo e si depurò nel modo sopra indicato.

« La dimetilnaftalina così ottenuta ha la composizione ed i caratteri di quella descritta nella Memoria di Cannizzaro e Carnelutti. È un liquido refrangente, più denso dell'acqua che bolle tra 262°-264°. Fa coll'acido picrico un composto di colore giallo arancio fusibile tra 139°-140°,5 della composizione $C^{12}H^{12} . C^6H^2(NO)^3OH$.

« Al residuo della distillazione a vapore aggiungendo potassa e distillando a vapore, si ottiene una piccola quantità di dimetilnaftilammina riprodotta ».

Chimica. — *Sul comportamento crioscopico di sostanze aventi costituzione simile a quella del solvente.* Nota del Socio E. Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Macchie, facole e protuberanze solari osservate nel 1° trimestre del 1895 al R. Osservatorio del Collegio Romano.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Ho l'onore di presentare all'Accademia un primo riassunto delle osservazioni solari fatto al R. Osservatorio del Collegio Romano nel primo trimestre del 1895. La stagione si conservò quasi sempre cattiva, ma ad onta di ciò si riuscì ad osservare il sole in 57 giornate, cioè in 42 da me e in 15 dall'assistente Sig. Palazzo. I risultati ottenuti sono riuniti nelle seguenti tabelle.

1895

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Gennaio . .	17	6,77	7,53	14,30	0,00	0,00	3,77	54,06	65,63
Febbraio. .	14	8,00	9,86	17,86	0,00	0,00	5,21	61,54	53,85
Marzo . . .	26	7,54	11,19	18,73	0,00	0,00	4,27	67,31	74,62
Trimestre .	57	7,42	9,77	17,19	0,00	0,00	4,35	62,09	68,33

« Nel fenomeno delle macchie solari dopo il minimo secondario del Gennaio, si ebbe un aumento progressivo sebbene di poca importanza; le medie però del trimestre risultano tutte inferiori a quelle dell' ultimo trimestre del 1894, e perciò continua la regolare e lenta diminuzione in accordo col periodo undecennale.

« Il numero dei giorni di osservazione per le protuberanze risultò minore cioè di 40 e le osservazioni furono eseguite da me in 31 giorni e in 9 dal prof. Palazzo.

1895

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media della massima altezza	Massima altezza osservata
Gennaio . .	10	2,60	31,9″	2,4°	38,9″	70″
Febbraio. .	12	5,25	43,3	2,2	71,2	144
Marzo . . .	18	6,89	46,0	1,9	79,6	117
Trimestre .	40	5,33	41,6	2,1	66,4	144

« Dopo il minimo secondario del Gennaio, il fenomeno è andato crescendo, così che le medie per questo trimestre risultano tutte un poco superiori a quelle dell'ultimo trimestre del 1894. Tra le protuberanze degne di nota, vi è quella del 1° Marzo da noi osservata dalle $9^h. 15^m$ alle 12^h, 47, le cui forme successive accennano a un movimento vorticoso. Continuò poi la mancanza di eruzioni metalliche, mentre la D^3 si presentò spesso assai viva, e in certi casi in tutta la protuberanza, come in quella del 1° Marzo che era alta 95 secondi d'arco ».

Astronomia. — *Eclisse totale di Luna dell'11 Marzo 1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Trovandomi assente da Roma, il Prof. Millosevich aveva stabilito un programma di osservazioni, che doveva essere da lui compiuto in unione all'assistente dell'Osservatorio Sig. D. Peyra e dall'assistente Prof. Palazzo. Il tempo cattivo però non permise che poche osservazioni, cioè alcune occultazioni di stelle che trovansi in B D Argelander che qui trascrivo, avvertendo che i tempi si riferiscono al meridiano dell'E. C.

Millosevich	Peyra	Palazzo
+ 3°. 2505 I $4^h.22^m.33^s$,15 am	τ Leonis I $4^h.22^m$. 33,92 (1)	
τ. Leonis I 4. 22. 33, 35 »	+ 3, 2502 E 4. 35. 12,12	τ Leonis E $5^h.5^m.52^s$,68 (2)
+ 3, 2506 E 5. 19. 56, 97 »	+ 3, 2506 E 5. 19. 58,05	
+ 3, 2507 E 5. 31. 1, 52 »		

« Il cielo rasserenò, e per qualche istante completamente, verso le 5 $^1/_4$, e allora la colorazione apparve bellissima; la parte più cupa del disco era di colore rosso-rame, e nella parte adiacente all'arco lucido vi era una tinta azzurrina verdastra di spiccata vivezza, come risulta da un grazioso ricordo a colori fatto dal Sig. Peyra.

« Emersione a $5^h.28^m$; contatto dell'ombra col lembo orientale di *Grimaldi* (Palazzo); a $5^h.34^m$ *Aristarco* che già appariva lucido ancora prima che emergesse dall'ombra, è del tutto fuori da questa (Palazzo); a $5^h.45^m$,5 il circolo terminatore dell'ombra tocca *Gassendi* e il *Capo Eraclide* (Peyra). Alle $6^h.26^m$ fra le nebbie dell'orizzonte, essendo prossimo a levare il sole, si accerta l'ultimo contatto coll'ombra (Millosevich) ».

Matematica. — *Ancora sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

« 1. In una Nota precedente (3) ho mostrato come ogni equazione differenziale lineare (omogenea) del 4° ordine, la quale definisca una curva Γ contenuta in una superficie algebrica F (dello spazio ordinario), sia integra-

(1) Probabile ritardo di 0^s,5.

(2) Probabile ritardo di 0^s,3.

(3) Cfr. questi Rend., p. 232 e seg. Sull'equazione differenziale proposta si supporranno fatte anche qui le stesse ipotesi della Nota prec.

bile con sole quadrature (più, forse, operazioni algebriche), quando la stessa superficie non ammette più di ∞^2 trasformazioni projettive in sè. È bene ora osservare che questo risultato è anche d'accordo colla *composizione* dei diversi gruppi di trasformazioni, che a noi si sono presentati. È noto infatti (Vessiot, Ann. Éc. Norm. Sup., 1892; Klein, *Einleitung in die höhere Geometrie* (lezioni litogr.), II, p. 297) che l'*integrazione di una data equazione differenziale lineare dipende essenzialmente dalla composizione del relativo* GRUPPO DI RAZIONALITÀ; e che, in particolare, l'*integrazione stessa può ricondursi a una serie di quadrature sempre e solo quando questo gruppo è* INTEGRABILE [1] (Vessiot, l. c., p. 241; Klein, l. c., p. 298); quando cioè, supposto ch'esso sia ∞^k, esso contiene un sottogruppo *eccezionale* [2] ∞^{k-1}, quest'ultimo un sottogruppo eccezionale ∞^{k-2}, e così via [3]. D'altra parte il *Gruppo di razionalità*, o *Gruppo di Picard-Vessiot* [4], di un'equa-

[1] Denominazione usata per la prima volta dal sig. Lie nei Ber. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig (1887). Il concetto di *gruppo integrabile* è però anteriore e risale ai primi lavori di Lie (cfr. ad es. i lavori inserti negli Atti della Società delle Scienze di Cristiania, 1874).

[2] « *Ausgezeichnete Untergruppe* » secondo F. Klein (l. c., p. 15); « *invariante Untergruppe* » secondo Lie (cfr. ad es.: *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 261). Si chiama così un sottogruppo che venga trasformato in sè stesso da ogni operazione del gruppo complessivo (più ampio), dentro cui lo si considera.

[3] In generale dunque si richiede che vi sia tutto un sistema di $k-1$ sottogruppi ∞^{k-i} $(i=1, 2, \ldots k-1)$, tali che ciascuno di essi sia contenuto come sottogruppo eccezionale entro il precedente (∞^{k-i+1}) (cfr. ad es. Klein, l. c., p. 176; Lie, op. cit., vol. I., p. 265 e seg., vol. III., pp. 679, 680, 709; Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen* ....; p. 537).

[4] Oltre la Mem. cit. di Vessiot: *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires* (Ann. Éc. Norm. Sup., 1892), cfr. anche Picard: Compt. Rend., 1883; Ann. de la Fac. d. Sc. de Toulouse, 1887; Compt. Rend., t. CXIX, séance du 8 oct. 1894. Questo *gruppo di razionalità* gode, rispetto all'equazione differenziale, di proprietà analoghe a quelle del gruppo (di Galois) di una data equazione algebrica; e la sua *composizione* (o *struttura*) determina appunto la natura (e la difficoltà) del problema di integrazione che dobbiamo risolvere, nello stesso modo in cui la composizione del gruppo di un'equazione algebrica qualsiasi determina la possibilità o meno di ricondurre la risoluzione di essa a quella di una serie di altre equazioni più semplici. Al caso (più semplice fra tutti) di un'equazione differenziale integrabile con sole quadrature corrisponderebbe, da un tal punto di vista, quello di un'equazione algebrica risolvibile per radicali. — Più generalmente, ogni singolo « fattore di decomposizione » (*Zerlegungsfactor*) del gruppo di razionalità determina e richiede un certo passo nel problema di integrazione, e un passo (in generale) tanto più difficile ed elevato, quanto più quel fattore è grande (cfr. Vessiot, Mem. cit., p. 235 e seg.). E in questo stesso ordine di idee rientra anche sostanzialmente ciò che nella Nota prec. (p. 234-235) abbiamo detto a proposito dei gruppi *misti*. Entro un tal gruppo, il (sotto)gruppo continuo massimo è appunto *eccezionale;* e come da questo si ottiene il primo moltiplicandolo per un *numero finito* di altre operazioni, così dal primo si ridiscende a questo mediante la risoluzione di un'*equazione algebrica.*

zione differenziale lineare è sempre il minimo gruppo *algebrico* contenente il gruppo monodromico di essa; e nei casi da noi considerati esso sarà perciò contenuto a sua volta nel gruppo (che è appunto algebrico) di tutte le trasformazioni projettive della superficie F in sè stessa, oppure coinciderà addirittura con quest'ultimo (1). Prescindendo perciò dal caso ch' esso contenga soltanto un numero finito di operazioni, esso non potrà essere che ∞^1 — e questo è un caso ovvio di gruppo integrabile — oppure ∞^2; ma allora dovrà coincidere con uno dei quattro gruppi considerati ai nn. 4 e 5 della mia Nota cit. E questi gruppi sono appunto tutti integrabili (2). Il primo di essi si compone infatti di operazioni *permutabili*, sicchè ogni suo sottogruppo ∞^1 è certamente eccezionale; il secondo contiene, per $\varrho = 1$, un sottogruppo eccezionale di omografie biassiali, coi due assi infinitamente vicini alla retta $y_2 = y_3 = 0$ (cfr. Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. IV, p. 1627); il terzo contiene, ancora per $\varrho = 1$, un sottogruppo eccezionale di omografie assiali, colla retta $y_3 = y_4 = 0$ come asse, e due punti uniti coincidenti sopra questa, nel punto $y_2 = y_3 = y_4 = 0$; il quarto infine, per $\alpha = 1$, un sottogruppo eccezionale ∞^1 con quattro punti uniti coincidenti (3).

« La possibilità di integrare l'equazione differenziale proposta, nei casi già considerati, senza ricorrere ad operazioni più elevate, trova dunque la sua conferma, anche se il gruppo di razionalità è ∞^2, nella composizione di questo gruppo (4).

« 2. Passiamo ora al caso in cui la superficie F (dello spazio S_3) ammette ∞^3 o più trasformazioni projettive in sè stessa. Escluso il caso del

(1) A meno che non vi sia nel gruppo monodromico qualche operazione, in seguito alla quale tutti gli integrali risultino moltiplicati per uno stesso fattore. Allora alla considerazione del gruppo di trasformazioni projettive della superficie F bisognerebbe sostituire quella di un certo gruppo di sostituzioni lineari quaternarie, nel quale più, e forse infinite sostituzioni corrisponderebbero ad una stessa trasformazione projettiva dello spazio S_3. In seguito, faremo sempre astrazione da questo caso, il quale non porterebbe con sè che l'aggiunta, in tutti gli integrali, di uno stesso fattore esponenziale, determinabile con una quadratura (cfr. anche la nota (2) a pag. 236 di questi Rend.).

(2) Possiamo verificarlo (e lo verificheremo appunto) in ciascuno dei quattro casi; ma dalle ricerche generali del sig. Lie risulta già senz'altro che ogni gruppo continuo ∞^2 deve essere integrabile (op. cit., vol. III., p. 681, 713).

(3) Sulla cubica unita (cfr. la Nota prec. cit.) questo sottogruppo determina il fascio di omografie paraboliche coll'unico punto unito nel punto che è fisso per tutto il gruppo ∞^2.

(4) Risulta anche confermato in ogni singolo caso il teorema di Vessiot (Mem. cit., p. 245): *Ogni equazione differenziale lineare integrabile con sole quadrature ammette un integrale avente per derivata logaritmica una funzione razionale* (ossia un integrale puramente moltiplicativo). Questo teorema è, d'altronde, una conseguenza immediata della forma a cui possono ridursi le equazioni di ogni gruppo integrabile di sostituzioni lineari (cfr. Lie, op. cit., vol. I, p. 589; Lie-Scheffers, op. cit., p. 537).

piano (perchè se no l'equazione differenziale proposta si ridurrebbe al 3° ordine), questa superficie non potrà essere che [1]:

1° *Una rigata cubica di Cayley* (ossia *colle due direttrici rettilinee infinitamente vicine*);

2° *Una sviluppabile biquadratica circoscritta a una cubica sghemba*;

3° *Un cono*;

4° *Una quadrica.*

« La rigata di Cayley ammette un gruppo continuo ∞^3 (e non più) di trasformazioni projettive, le cui equazioni possono ridursi alla forma:

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_1 \\ y_2^{(1)} &= \varrho\,(y_2 + \alpha y_1) \\ y_3^{(1)} &= \varrho^2\,(y_3 + 2\alpha y_2 + \beta y_1) \\ y_4^{(1)} &= \varrho^3\,(y_4 + 3\alpha y_3 + 3\beta y_2 + \alpha\,(3\beta - 2\alpha^2)\,y_1) \end{aligned}$$

dove ϱ, α, β sono i tre parametri. L'equazione della superficie è data allora da:

$$(2)\qquad y_4 y_1^2 - 3y_1 y_2 y_3 + 2y_2^3 = 0$$

essendo $y_1 = y_2 = 0$ la direttrice rettilinea (unica); $y_1 = 0$ il piano che ha comune colla superficie questa sola retta, contata tre volte; $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ il punto da cui si deve ritenere uscente quella particolare generatrice, che è infinitamente vicina alla direttrice. Queste equazioni permettono di concludere senz'altro che la y_1 sarà funzione moltiplicativa (esponenziale di un integrale Abeliano) sulla data superficie di Riemann, e che i rapporti $\frac{y_2}{y_1}$ e $\frac{y_2^2 - y_1 y_3}{y_1^2}$ saranno integrali di tali funzioni, sicchè anche y_2 e y_3 si potranno ottenere con sole quadrature. La y_4 si potrà poi esprimere razionalmente mediante le altre tre soluzioni, essendo legata a queste dall'equazione (2).

« Anche qui del resto la possibilità di integrare l'equazione differenziale proposta con sole quadrature è d'accordo coll'essere il gruppo ∞^3 rappresentato dalle equazioni (1) un gruppo *integrabile* [2]. Esso contiene infatti, per $\varrho = 1$, un primo sottogruppo eccezionale costituito da ∞^2 omografie con uno stesso (unico) punto unito quadruplo (nel punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$); e poichè queste omografie sono fra loro permutabili, sarà pure eccezionale, entro questo gruppo

[1] Cfr. Lie, op. cit., vol. III, p. 196; Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. IV e V.

[2] Il gruppo di razionalità dell'equazione differenziale potrebbe anche essere un sottogruppo ∞^2 o ∞^1 di questo gruppo ∞^3; ma anche in questo caso sarebbe egualmente integrabile (e non cesserebbe nemmeno di esserlo quando si presentasse il caso considerato nella nota (3) a p. 293).

∞^2, ogni sottogruppo ∞^1. In particolare, per $\varrho=1$, $\alpha=0$, si ha un sottogruppo ∞^1 (eccezionale anche nel gruppo ∞^3) di omografie biassiali (e precisamente di omografie rigate *speciali*) colla retta $y_1=y_2=0$ come luogo di punti e inviluppo di piani uniti.

« Quest'ultimo risultato, unito ai precedenti, ci permette di affermare che: *Se quattro soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale lineare proposta* (cfr. la Nota prec., n. 2) *sono legate da un' equazione algebrica omogenea a coefficienti costanti* (*di grado superiore al primo*), *quell'equazione differenziale sarà certo integrabile con sole quadrature ed operazioni algebriche, quando la superficie rappresentata dall'equazione algebrica che si è supposta esistere non sia una sviluppabile circoscritta a una cubica sghemba, nè un cono, nè una quadrica.*

« In questi tre casi invece l'integrazione della stessa equazione differenziale può richiedere, come ora vedremo, quella di una o due equazioni differenziali lineari di 2° ordine [1].

« 3. Il caso in cui la curva Γ definita dall'equazione differenziale proposta è contenuta in una sviluppabile biquadratica circoscritta a una cubica sghemba è stato già studiato dal sig. Goursat (Compt. Rend., t. C, p. 233); e, più tardi, anche da Ludw. Schlesinger (Diss. cit., p. 29-31). Il primo di essi ricorre anzi sostanzialmente a considerazioni geometriche. — Indicate con z_i ($i=1, 2, 3, 4$) le coordinate del punto in cui la cubica di regresso della sviluppabile è toccata dalla sua tangente passante per un punto generico (y) della curva Γ (sicchè anche le z_i potranno ritenersi funzioni della variabile indipendente x) si avranno relazioni del tipo:

$$y_i = pz_i + qz'_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dove p e q sono, per il sig. Goursat, funzioni *uniformi*, se sono tali i coefficienti dell'equazione differenziale proposta; nel nostro caso, saranno funzioni razionali sulla data superficie di Riemann. Le z_i saranno invece (in generale) funzioni a più, o anche a infiniti valori; ma le diverse operazioni del gruppo monodromico produrranno su di esse sostituzioni lineari identiche a quelle delle y_i [2]; dette funzioni saranno perciò soluzioni indipendenti di una nuova equazione differenziale lineare di 4° ordine, la cui curva Γ è la stessa cu-

[1] Questi tre casi sono precisamente i soli (cfr. la Nota prec.) in cui la questione che ci siamo proposta è già stata studiata. L'equazione differenziale si potrà dunque certo integrare per quadrature ogni qual volta la funzione H di Ludw. Schlesinger (Diss. cit., p. 24) non sia una costante. (Supposta la superficie F rappresentata da un' equazione (omogenea) $f=0$, la funzione H sarebbe la Hessiana della f, divisa, quando sia possibile, per la maggior potenza di quest'ultima che vi è contenuta come fattore).

[2] Potranno però le z_i, come funzioni di x, riprodursi tali e quali (o a meno di uno stesso fattore) dopo talune sostituzioni del gruppo monodromico, senza che ciò avvenga anche per le y_i.

bica; e questa nuova equazione sappiamo già (cfr. questi Rend., p. 52) che dovrà esser soddisfatta dai cubi delle soluzioni di un' equazione differenziale lineare di 2° ordine, sempre a coefficienti razionali nel campo prestabilito. Indicato pertanto con Y l'integrale generale di quest'ultima equazione, dovrà l'equazione differenziale proposta ammettere tutte le soluzioni del tipo:

$$y = p\mathrm{Y}^3 + 3q\,\mathrm{Y}^2\,\mathrm{Y}'$$

dove p e q sono certe funzioni razionali (che si potranno forse scegliere in varî o anche in infiniti modi, ma, una volta fissate, dovranno restar sempre le stesse).

« L'integrazione dell'equazione differenziale proposta si riduce dunque a quella di un' equazione differenziale lineare di 2° ordine (o di una delle forme equivalenti) (¹). Ciò è d'accordo col fatto che il gruppo ∞^3 delle omografie che mutano in sè stessa la nostra sviluppabile è *simile* a quello pure ∞^3 delle projettività binarie (ossia in una forma semplice, o ente razionale).

« 4. Se la superficie F è un cono, prendiamone il vertice come punto fondamentale $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ del sistema di coordinate. Allora è chiaro che in tutte le omografie che mutano questo cono in sè stesso, dunque anche in tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta, le y_1, y_2, y_3 subiranno soltanto sostituzioni lineari ternarie (vale a dire, nelle loro nuove espressioni non comparirà affatto la y_4). E da questo si trae che le y_1, y_2, y_3 sono soluzioni indipendenti di un' equazione differenziale lineare di 3° ordine, a coefficienti razionali nel campo prestabilito (²).

« D'altra parte, nel sistema di coordinate fissato, l'equazione del cono F non conterrà la y_4. Dunque le y_1, y_2, y_3, che già sappiamo essere soluzioni indipendenti di un' equazione differenziale lineare di 3° ordine, sono anche legate fra loro da un'equazione algebrica; ricadiamo perciò, per quanto ad esse si riferisce, in un caso da me già precedentemente studiato (cfr. le mie due Note a p. 18 e 51 di questi Rend.; qui si ha il caso particolare $n = 3$).

« Se il cono è di 2° grado, le y_1, y_2, y_3 si potranno esprimere a loro volta sotto la forma:

$$c_1\,\mathrm{X}^2 + c_2\,\mathrm{XY} + c_3\,\mathrm{Y}^2$$

dove le c sono costanti, e X, Y sono soluzioni distinte di un' equazione differenziale lineare di *secondo* ordine, sempre a cofficienti razionali sulla data superficie di Riemann.

(¹) Questa nuova equazione differenziale si potrà integrare per quadrature sempre e solo quando le diverse operazioni del gruppo monodromico lascino fissa (almeno) una stessa generatrice della sviluppabile considerata.

(²) Cfr. Beke, *Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen* (Math. Ann. XLV, p. 290).

« Se il cono è di grado, superiore al secondo, ma razionale, e la sua equazione può mettersi sotto la forma:

$$y_1^{\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2}\, y_3^{\alpha_3} = \text{Cost.}$$

dove le α sono numeri interi aventi per somma zero (cono *parabolico*), saranno y_1, y_2, y_3 funzioni esponenziali di integrali Abeliani.

« In ogni altro caso le stesse y_i saranno funzioni algebriche di x (a meno forse di un fattore moltiplicativo comune) (¹).

« Quanto alla y_4, ottenute le prime tre soluzioni, essa si potrà determinare con sole quadrature, e precisamente con al più *quattro* quadrature successive, la prima delle quali sarebbe da eseguirsi su di una funzione razionale delle soluzioni già ottenute e loro derivate (²). Questo è anche d'accordo colla composizione del gruppo (intransitivo) ∞^4 delle omologie di dato centro (le quali mutano appunto in sè stesso ogni cono col vertice in questo centro) (³). Le omologie *speciali* ne formano infatti un primo sottogruppo eccezionale ∞^3; e sono poi esse stesse a due a due permutabili, sicchè risulta pure eccezionale entro quest'ultimo gruppo ∞^3 (e anche nel gruppo complessivo ∞^4) ogni sottogruppo ∞^2 o ∞^1 di tali omologie. Il gruppo ∞^4 è quindi *integrabile* (⁴).

« 5. Il caso in cui la curva Γ è contenuta in una quadrica (o superficie di secondo grado) è stato studiato in un altra Nota del sig. Goursat (Compt. Rend., t. XCVII, p. 31); e anche Halphen vi ha dedicate parecchie pagine della sua Memoria: « *Sur les invariants des équations différentielles*

(¹) A questo stesso risultato è giunto anche Ludw. Schlesinger (Diss., cit., p. 25, 26, 29). Il caso delle y moltiplicative rientra per lui in quello degli integrali algebrici (e precisamente radici di funzioni razionali), avendo egli supposti i coefficienti dell'equazione differenziale *razionali* nel senso ordinario (funzioni razionali cioè dell'ente di genere zero).

(²) In generale, quando di un'equazione differenziale lineare di ordine n sono conosciute k soluzioni indipendenti, le altre si possono determinare mediante un'equazione differenziale lineare di ordine $n-k$, e un certo numero di quadrature. Se ne sono conosciute dunque $n-1$ indipendenti, l'ultima si potrà determinare con sole quadrature (cfr. Fuchs, Journ. de Crelle, t. LXVI; Heffter, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen* (1894), p. 52 e seg.; Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (1895), p. 47 e seg.).

(³) È infatti questo gruppo soltanto che ora dobbiamo considerare; perchè la determinazione delle y_1, y_2, y_3 equivale appunto, geometricamente, ad estrarre il gruppo delle omologie dal gruppo, forse più ampio, di tutte le trasformazioni projettive del cono in sè stesso.

(⁴) La composizione del gruppo complessivo di tutte le omografie che trasformano in sè stesso un cono razionale normale di uno spazio qualunque (in particolare dunque un cono quadrico dello spazio ordinario) è stata assegnata dal Sig. Enriques (cfr. questi Rend., vol. II, 1° sem., p. 532).

linéaires du 4^me ordre » (Acta Math., vol. III, p. 325-380). Il sig. Goursat ha dimostrato in particolare, che in questo caso *l'equazione differenziale proposta è soddisfatta dai prodotti degli integrali di due equazioni differenziali lineari di 2° ordine del tipo*:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \mathrm{P}(x).u \quad ; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \mathrm{Q}(x).v$$

dove $\mathrm{P}(x)$ e $\mathrm{Q}(x)$ *sono radici di un'equazione di 2° grado, a coefficienti uniformi* (nel nostro caso sempre *razionali* sulla data superficie di Riemann) (1).

« Anche in questo caso lo *spezzamento* dell'equazione differenziale lineare di 4° ordine in due equazioni differenziali di 2° ordine è d'accordo colla composizione del gruppo continuo massimo (∞^6) di trasformazioni projettive di una quadrica in sè stessa (2). Questo gruppo non contiene infatti che due soli sottogruppi eccezionali, tutti due ∞^3, di omografie biassiali, differenti fra loro solo per lo scambio dei due sistemi di generatrici; e ciascuno di questi due ammette come rette unite tutte le generatrici dell'un sistema, ed opera su quelle dell'altro sistema come il gruppo ∞^3 delle projettività in una forma semplice. Il gruppo continuo ∞^6 si può ottenere per moltiplicazione di questi due sottogruppi (3) (4).

« 6. Fra le curve Γ contenute in una quadrica, Halphen ha studiate in particolare quelle, le cui tangenti appartengono a uno stesso complesso lineare. Egli ha dimostrato che queste curve sono tutte *anarmoniche*, vale a dire che in questo caso l'equazione differenziale proposta può trasfor-

(1) Cfr. anche Besso, Mem. di quest'Acc. ser. 3ª, vol. XIX. p. 219-231; Ludw. Schlesinger, Diss. cit., p. 26-27.

(2) Le operazioni di questo gruppo continuo mutano in sè stesso ciascuno dei due sistemi di generatrici della quadrica. Ma quest'ultima ammette anche un'altra schiera continua ∞^6 di trasformazioni projettive, che scambiano fra loro quei due sistemi; e alla *separazione* di queste due schiere corrisponde analiticamente come prima operazione (e l'abbiamo veduto appunto) la risoluzione di un'equazione algebrica di 2° grado (quella che ha per radici le due funzioni $\mathrm{P}(x)$ e $\mathrm{Q}(x)$).

(3) E a questi due sottogruppi corrispondono rispettivamente le due equazioni differenziali lineari di 2° ordine, di cui sopra. L'integrazione di queste potrà eseguirsi con sole quadrature, quando le operazioni del gruppo monodromico lascino fissa almeno una generatrice di ciascun sistema.

(4) Il risultato ottenuto dal sig. Goursat sussiste soltanto se la quadrica non è un cono; ma il caso in cui invece lo sia è già stato studiato al n.° prec. Allora si può forse dire che le due equazioni differenziali di 2° ordine sono venute a coincidere; e in luogo dei prodotti delle soluzioni di queste due, compaiono infatti i quadrati di quelle dell'unica equazione rimasta. D'altronde, quelle stesse due equazioni differenziali corrispondono, in certo qual modo, ai due sistemi di generatrici della quadrica; e questi ultimi coincidono appunto nel caso del cono.

marsi in altra a coefficienti costanti (Mem. cit., p. 351). Viceversa, l'essere la curva anarmonica e l'appartenere le tangenti di essa a uno stesso complesso lineare sono anche condizioni sufficienti perchè la curva Γ sia contenuta in una quadrica (l. c. p. 342), e, in pari tempo, sia spigolo di regresso di una sviluppabile circoscritta a un'altra quadrica (l. c., p. 343). Le due quadriche hanno a comune un quadrangolo sghembo, e si corrispondono nella reciprocità nulla determinata dal complesso. L'equazione differenziale primitiva coincide allora colla propria *aggiunta* di Lagrange.

« Le curve (algebriche) considerate in una mia Nota prec. (a p. 55 di questi Rend., e per $n=4$), e rappresentate da equazioni del tipo:

$$y_1 y_2 = y_3 y_4 \quad ; \quad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{m-2r} = \left(\frac{y_3}{y_4}\right)^m$$

rientrano appunto in questa categoria. Per le equazioni differenziali che le definiscono è nullo infatti l'invariante v di Halphen (l. c., p. 330), ossia l'invariante a_3 di Brioschi (Acta Math., t. XIV, p. 235) e Wallenberg (Jour. de Crelle, t. CXIII, p. 8), il quale differisce dal precedente solo per un fattore numerico [1]; e l'annullarsi di questo invariante è appunto condizione necessaria e sufficiente perchè le tangenti della corrispondente curva Γ appartengano a uno stesso complesso lineare (cfr. Halphen, l. c., p. 332). Già abbiamo veduto nella Nota cit. come le equazioni differenziali relative a queste curve possano trasformarsi in altre a coefficienti costanti; e che queste equazioni (e le analoghe, per $n>4$) coincidano sempre colle rispettive *aggiunte* di Lagrange, l'aveva notato appunto il sig. Brioschi (l. c., p. 237; cfr. anche Wallenberg, l. c., p. 36) ».

Matematica. — *Una questione di priorità nella teoria della connessione.* Nota del prof. Alberto Tonelli, presentata dal Socio Cremona.

« Nel vol. XLV dei Mathematische Annalen a pag. 142-143 il prof. Felix Klein pose la seguente Nota ad un suo lavoro dal titolo: *Autographirte Vorlesungshefte:*

« Ich möchte hier eine kurze historische Notiz einfügen. Picard nennt in Bd. II « seines Werkes auf pag. 375 als denjenigen, der bei Untersuchungen über den Flächenzu « sammenhang zuerst frei im Raume gelegene Flächen mit p Oeffnungen angewand « habe, Clifford (Proceedings of the London Mathematical Society vol. 8, 1876). Demge- « genüber weist bereits Burkhardt in seiner Recention des Picard'schen Werkes in den

(1) Per la formazione di questo invariante (e dei successivi, per valori qualunque di n) cfr. anche Forsyth, Phil. Trans., vol. CLXXIX.

« Göttinger Anzeigen (1894, Nr. 5) darauf hin dass diese Flächen schon 1875 in einer
« Arbeit von Tonelli auftreten (Atti dei Lincei, tom. 2, ser. II). Es ist keine Frage, dass
« die Benutzung der in Rede stehenden Flächen auf Riemann selbst oder doch auf seine
« unmittelbare Umgebung zurückgeht. Ich habe mich in dieser Hinsicht in der Vorrede
« zu meiner Schrift über Riemann auf eine Unterhaltung mit Herrn Prym vom Iahre 1874
« bezogen. Die Sache wird mir jetzt durch Herrn Schering bestätigt, der sich dahin äus-
« sert, dass er sich allerdings nicht bestimmt erinnern könne jemals mit Riemann über
» den Gegenstand gesprochen zu haben, dass ihm aber die Verwendung der in Rede
« stehenden Flächen von jeher geläufig gewesen sei. *Hiermit ist auch die Quelle ge-*
« *geben, aus welcher Herr Tonelli die Verwendung der in Rede stehenden Flächen ent-*
« *nommen hat*; *denn Herr Tonelli hat seine Arbeit* (*welche übrigens selbständige Unter-*
« *suchungen zur Theorie des Flächenzusammenhangs enthält*) *hier in Göttingen unter*
« *Leitung von Herrn Schering ausgeführt. Man vergleiche hierzu die erste Mittheilung*
« *der Tonelli'schen Resultate in Nr. 13 der Göttinger Nachrichten von 1875.* — Ue-
« brigens bemerke man, dass bei Clifford und Tonelli die in Rede stehenden Flächen
« nur für die Untersuchungen der Analysis situs, nicht aber, wie in meiner Schrift über
« Riemann's Theorie, direct für die functionentheoretische Grundlegung herangezogen
« werden ».

« Se in questa Nota fossero mancati i periodi che ho fatto riprodurre in corsivo non avrei avuto nulla ad osservare, già troppo soddisfatto dal pensiero di essermi incontrato in una idea dovuta al genio di Riemann, e non avrei ora reclamato una priorità che non reclamai dal sig. Picard. Se per rendere più evidente ciò che io opinava relativamente al lemma di Riemann sulla teoria della connessione, io ideai in quell'epoca le superficie di cui ora si tratta, debbo francamente confessare che era ben lungi dal prevedere che esse avrebbero avuto una importanza così grande nella teoria delle funzioni quale ha saputo loro dare il prof. Klein; solamente osservava che quelle superficie potevano sostituire completamente le superficie di Riemann per le considerazioni che io doveva fare (1). Ma l'asserzione del prof. Klein che io abbia attinto da altri e poi data per mia una tale concezione è ingiusta, ed io non poteva rimanere in silenzio sotto una simile accusa. Sicuro nella mia coscienza scrissi al professore Schering richiamando la sua attenzione sulla nota sopra trascritta, e lo pregai di dire ciò che egli ne pensava, lui solo trovandosi nel caso di potere spassionatamente chiarire le cose. Il professore Schering, con quella gentilezza che lo distingue, mi rispose immediatamente la seguente lettera che mi autorizza a pubblicare e di cui io gli rendo qui le più sentite grazie:

Sternwarte Göttingen 1894. Aug. 5.

Verehrter Herr College!

« Sehr dankbar bin ich Ihnen, dass Sie mich auf die Stelle in F. Kleins Mathema-
« tischen Annalen aufmerksam gemacht haben, ich hatte wegen meiner vielen Arbeiten
« dieselbe noch nicht gelesen, auch würde ich aus dem Titel derselben gar nicht ver-

(1) Conf. il mio lavoro: *Osservazioni sulla teoria della connessione* (Atti dell'Accademia dei Lincei, tomo 2°, serie II, 1875).

« muthet haben, dass der Aufsatz eine mich betreffende Stelle enthalte. Prof. Klein hat sie « drucken lassen, ohne meine Erlaubniss eingeholt zu haben, selbst ohne mir eine Nachricht « davon zu geben. Er allein hat die Worte hinzugefügt, welche Ihnen so Unrecht thun. « Ich habe deshalb ihm folgenden Aufsatz für sein Journal eingesendet:

Berichtigung einer den Herrn Professor
Tonelli betreffenden Bemerkung in Herrn
Professor Felix Klein' s Aufsatz « Autographirte
Vorlesungshefte »
von Ernst Schering in Göttingen

« So eben lese ich in genanntem Aufsatze auf Seite 142 im 45 Bande der Mathematischen « Annalen betreffend die Riemann' schen Flächen die Worte: Hiermit ist auch die Quelle « gegeben, aus welcher Herr Tonelli die Verwendung der in Rede stehenden Flächen ent- « nommen hat, denn Herr Tonelli hat seine Arbeit (welche übrigens selbständige Untersu- « chungen zur Theorie des Flächenzusammenhangs enthält) hier in Göttingen unter Lei- « tung von Herrn Schering ausgeführt. Man vergleiche hierzu die erste Mittheilung der « Tonelli 'schen Resultate in Nr. 13 der Göttinger Nachrichten von 1875.

« In diesen Worten finde ich eine Beeinträchtigung der selbständigen Autorenrechte des « Herrn Professor Tonelli, da derselbe die Verwendung der in Rede stehenden Flächen « durchaus selbst erdacht und das Resultat seiner Untersuchung erreicht hatte, bevor « ich über diese Flächen mit ihm sprach. Man kann also durchaus nicht sagen, dass Herr « Professor Tonelli' s Arbeit sich auf eine von mir gegebene Andeutung über diese Art « von Riemann' schen Flächen gründe, noch dass dieselbe unter meiner Leitung ausge- « führt sei.

Göttingen, 1 August 1894.

« Herr Prof. Klein hat mir schriftlich erklärt, dass diese meine Berichtigung bei näch- « ster Gelegenheit gedruckt werden solle.

« Es thut mir ausserordentlich leid, dass Ihre Rechte an der selbständigen Auffindung « dieser Flächen und der Verwendung derselben in Zweifel gezogen worden isind. Nachdem « aber diese Rechte hiernach vollständig anerkannt werden, kommt Ihre Arbeit den Fran- « zosen (Picard) gegenüber zur richtigen Geltung, welcher die erste Verwendung jener « Flächen Herrn Clifford zuschreibt.

« Sie sehen also, dass ich darauf halte, dass die durch mich zur Veröffentlichung ge- « langenden Arbeiten ihr selbständiges Recht beibehalten; deshalb bitte ich Sie, gewähren « Sie mir bald wieder die Ehre, eine Arbeit von Ihnen der hiesigen Gesellschaft der Wis- « senschaften vorzulegen.

« Mit vielen Grüssen . . . .

« Ihr ergebener E. Schering ».

« Come si vede, nell'affermare con tanta sicurezza un fatto che (certamente senza intenzione) veniva ad offendermi più come uomo che come cultore della scienza, il prof. Klein ha creduto di poter fare a meno di interpellare prima coloro, che ne potevano in proposito saper più di lui. In ogni modo l'assicurazione fatta dal prof. Klein per iscritto, che la rettifica del prof. Schering sarebbe stata pubblicata nella più prossima circostanza, mi rese completamente tranquillo. Pur troppo però la giustificazione mia da parte del prof. Klein non è arrivata che 8 mesi dopo l'accusa!

« Certamente io non potrei accampare nissun diritto a speciali riguardi da parte del prof. Klein, ma l'affrettarsi a dichiarare che un'accusa portata verso una persona era ingiusta, quando tale si è dovuto riconoscerla, io ho creduto sempre che sia qualche cosa di diverso da un riguardo.

« Finalmente però nel vol. XLVI fasc. I dei Mathematische Annalen, il sig. Klein a pag. 77-78 stampa la seguente nota ad un suo secondo lavoro dal titolo: *Autographirte Vorlesungshefte II*:

« Ich benutze diese Gelegenheit, um im Anschlusse an die im vorigen Artikel ge-« gebene Fussnote betr. Riemann' schen Flächen im Raume folgende Mittheilung zur Pu-« blication zu bringen, welche mir Herr Schering « im Interesse der bestehenden selb-« ständigen Autorenrechte des Herrn Tonelli » zugehen lässt. Herr Tonelli hatte die « Verwendung der in Rede stehenden Flächen durchaus selsbt erdacht und das Resultat « seiner Untersuchungen erreicht, bevor ich über diese Flächen mit ihm sprach. Man « kann also durchaus nicht sagen, dass Herrn Tonelli's Arbeit sich auf eine von mir ge-« gebene Andeutung über diese Art von Riemann' schen Flächen gründe, noch dass die-« selbe unter meiner Leitung ausgeführt sei ».

« Il prof. Klein non ha stampato la rettifica inviata dal prof. Schering in articolo separato, ma ne ha riprodotto solo la parte sostanziale in una breve nota, la quale potrebbe sfuggire all'attenzione di qualcuno che pure ebbe sentore della prima. Ora, interessando a me, più di ogni altra cosa, di tutelare la mia dignità come uomo, e la stima dei colleghi, mi sono deciso a ripubblicare per conto mio le note del prof. Klein e la lettera del prof. Schering affinchè, colla scorta di questi documenti, possa ognuno formarsi un giusto concetto della cosa.

« Non voglio però terminare senza esprimere i miei più vivi ringraziamenti al prof. Burkhardt, il quale, nel solo interesse della verità, volle a me rivendicare una priorità contrastatami ».

Matematica. — *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Corrispondente Veronese.

« La questione di rappresentare con una funzione il numero dei numeri primi compresi in un intervallo determinato, o l'altra, sotto un certo rispetto equivalente, di fissare un carattere distintivo dei numeri primi diede origine a ricerche importanti di molti matematici, colle quali, se non fu raggiunto l'intento, tuttavia venne largo contributo alla scienza di considerazioni feconde. Basterà ricordare che Gauss, Dirichlet e Tchébicheff, prendendo le mosse da questo problema, furono condotti a notevoli risultati di teoria dei

numeri e oltre a ciò assegnarono espressioni più o meno approssimate del numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo.

« Riemann nella Memoria: *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (1), risolse in certo senso una tale questione, poichè riescì a rappresentare con una funzione $F(x)$ il numero dei numeri primi inferiori ad x; però codesta soluzione, malgrado la sua grande genialità, apparisce oltemodo complicata e, quasi direi, speciosa, se si osserva che, per costruire la funzione $F(x)$ di Riemann si ha la formola:

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f(x^{\frac{1}{m}}),$$

dove, essendo $f(x)$ una funzione, che si può risguardare conosciuta

$$\left(f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s \log \left\{ \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^s} \right\} \frac{ds}{s} \right),$$

la sommatoria va estesa successivamente a tutti i numeri m non divisibili per alcun quadrato all'infuori dell'unità, e μ designa il numero dei fattori primi di m. Ne viene che, per calcolare effettivamente $F(x)$, bisognerebbe immaginare di conoscere, per ciascun numero naturale m, se esso ammette fattori primi eguali e, quando sieno tutti differenti, se il loro numero è pari o dispari. In altri termini si dovrebbe risguardar nota la funzione $\mu(m)$ di Mertens (2).

« Parmi pertanto non superfluo di riprendere sotto un diverso punto di vista questo stesso problema, proponendomi di eliminare la difficoltà, che si incontra nel procedimento di Riemann. In ciò che segue, si troverà assegnata (a mezzo di un integrale definito) l'espressione analitica del numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo: incidentalmente mi si presenterà occasione di indicare un criterio di immediata applicabilità per riconoscere se un dato numero sia primo.

« La serie (di Lambert) (3) $\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{x^m}{1-x^m}$ converge, come si riconosce

(1) Ges. Werke, p. 136, Leipzig 1876; cfr. anche Bachmann, *Zahlentheorie*, Zweiter Theil, p. 382, Leipzig 1894.

(2) *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie.* Giornale di Crelle, Tomo LXXVII, p. 283.

(3) Veggasi ad es.: Eisenstein, giornale di Crelle, Tomo XXVII; Curtze, *Notes diverses sur la série de Lambert et la loi de nombres premiers,* Ann. di Mat., Ser. 2a, T. I, p. 285; Pincherle, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche,* Mem. dell'Acc. di Bologna, Serie IV, Tom. III.

agevolmente, per tutti i punti $|x|<1$ ed è sviluppabile in serie di potenze di x entro il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine. Si sa, e questa costituisce la proprietà caratteristica dello sviluppo, osservata già da Lambert, che il coefficiente di x^n è uguale al numero dei divisori di n; quindi, escludendo per n il valore 1, questo coefficiente sarà eguale a 2, quando n è un numero primo, maggiore di due nel caso opposto.

« Ponendo:

$$\text{(1)} \qquad S(x)=\sum_{1\,m}^{\infty}\frac{x^m}{1-x^m}-\frac{2\,x^2}{1-x}-x\,,$$

si potrà per $|x|<1$, avere $S(x)$ espresso sotto la forma:

$$\text{(2)} \qquad S(x)=\sum_{1\,m}^{\infty} c_m\,x^m\,,$$ dove c_m è nullo, se m è un numero primo, maggiore o eguale ad 1 in tutti gli altri casi.

« Tracciata una circonferenza C col centro nell'origine, di raggio ϱ, eguale per esempio ad $\frac{1}{2}$, la serie $\sum_{1\,m}^{\infty} c_m\,x^m$ convergerà in egual grado lungo C e sarà quindi integrabile termine a termine; lo stesso si potrà dire del prodotto $x^z\sum_{1\,m}^{\infty} c_m\,x^m$, qualunque sia il numero finito z reale o complesso, poichè x non si annulla, nè diviene infinito lungo la circonferenza. C'è da osservare soltanto che, x^z essendo funzione multiforme, bisogna fissare come e su quale degli infiniti rami di $x^z\sum_{1\,m}^{\infty} c_m\,x^m$ si opera l'integrazione. Questo si fa nel modo più semplice, ponendo $x=\varrho\,e^{i\theta}$ e conducendo l'integrazione lungo la circonferenza C da $\theta=0$ a $\theta=2\pi$. Le altre determinazioni dello stesso integrale si avrebbero facendo variar θ da un valore iniziale arbitrario θ_0 a $\theta_0+2\pi$.

« Ponendo pertanto:

$$\text{(3)} \qquad P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C x^{z-1}\,S(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varrho^z\,e^{iz\theta}\,S(\varrho\,e^{i\theta})\;d\,\theta\,,$$

resta determinato in modo unico una funzione uniforme $P(z)$ della variabile complessa z, singolare soltanto per $z=\infty$, cioè una trascendente intera.

« Indicando con n un numero intero, si ha immediatamente:

$$\text{(4)} \qquad P(n)=0 \qquad (n\geq 0)$$
$$\text{(5)} \qquad P(-n)=c_n \qquad (n\geq 1)$$

« La (5) merita di essere notata, perchè, dato ad arbitrio un numero intero n, permette di decidere se esso sia o no primo.

« Per ogni altro valore non intero di z, ponendo ancora $x = \varrho e^{i\theta}$ e tenendo presente l'osservazione fatta, si può scrivere P(z) sotto la forma:

$$(6)\quad P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{1\,m}^{\infty} c_m x^{m+z-1}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{1\,m}^{\infty} c_m \frac{x^{m+z}}{m+z}\right\}_{\varrho e^0}^{\varrho e^{2\pi i}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\varrho^z\,(e^{2\pi i z} - 1)\sum_{1\,m}^{\infty}\frac{c_m\,\varrho^m}{m+z}$$

« Se z non è reale e quindi del tipo $\mu + i\nu$ (con ν diverso da zero), mettendo in evidenza in $\sum_{1\,m}^{\infty}\frac{c_m\,\varrho^m}{m+z}$ la parte reale e la parte immaginaria, potremo scrivere:

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\varrho^z\,(e^{2\pi i z} - 1)\left\{\sum_{1\,m}^{\infty}\frac{c_m\,\varrho^m\,(m+\mu)}{(m+\mu)^2+\nu^2} - i\,v\sum_{1\,m}^{\infty}\frac{c_m\,S^m}{(m+\mu)^2+\nu^2}\right\},$$

da cui apparisce che P(z) non può annullarsi per valori complessi dell'argomento z. Infatti ϱ^z, $e^{2i\pi z} - 1$ non vanno certamente a zero per valori finiti non interi di z e nel terzo fattore il coefficiente dell' unità immaginaria

$$-\nu\sum_{1\,m}^{\infty}\frac{c_m\,\varrho^m}{(m+\mu)^2+\nu^2},$$ siccome i termini della serie sono tutti positivi, non si può annullare per $\nu \lesseqgtr 0$, quindi il fattore stesso è certamente diverso da zero.

« Ciò posto, noi ci proponiamo di determinare per ciascun numero intero negativo $-n$ un cerchio di centro $-n$ e di raggio r_n, entro cui non cade alcuna o tutt'al più una radice dell'equazione P(z) = 0. Siccome si è visto or ora che P(z) non può avere radici immaginarie, basterà prendere in esame i valori reali di z nell'intorno di ciascun $-n$.

« Supporremo dapprima n non primo. Allora, facendo nella (6), $z = -n \pm r_n$, il terzo fattore $\sum_{1\,m}^{\infty}\frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n}$ potrà essere scritto:

$$\sum_{1\,m}^{\infty}\frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n} = -\sum_{1\,m}^{n-1}\frac{c_m\,\varrho^m}{n-m\mp r_n} \pm \frac{c_n\,\varrho^n}{r_n} + \sum_{n+1\,m}^{\infty}\frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n}\qquad (c_n > 0)$$

« Assumendo r_n già minore di $\frac{1}{2}$, avremo manifestamente nelle due sommatorie del secondo membro $\left|\frac{1}{m-n\pm r_n}\right|<2$, $c_m<m$, qualunque sia m, e per conseguenza:

$$\left|-\sum_{1}^{n-1}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{n-m\mp r_n}+\sum_{n+1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n}\right|<2\sum_{1}^{\infty}{}_m\, m\,\varrho^m<\frac{2\,\varrho}{(1-\varrho)^2}<4,$$

per essersi fin da principio assunto $\varrho=\frac{1}{2}$; ne viene che, prendendo r_n in modo da rendere:

$$\frac{c_n\,\frac{1}{2^n}}{r_n}\geq 4,\ \text{cioè per esempio:}$$

$r_n=\frac{1}{2^{n+2}}$, nell'intervallo da $\left(-n-\frac{1}{2^{n+2}}\right)$ a $\left(-n+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$ non cade alcuna radice dell'equazione.

« Se invece n è primo e quindi $c_n=0$, mettendo in evidenza il primo termine non nullo, potremo scrivere (per $n>3$):

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n}=\frac{-\varrho^4}{n-4\mp r_n}-\sum_{5}^{n-1}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{n-m\mp r_n}+\sum_{n+1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n},$$

quì, assumendo ancora $r_n\leq\frac{1}{2}$, avremo dappertutto $\left|\frac{c_m}{m-n\pm r_n}\right|<2\,m$, onde per la parte positiva, sarà:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n}<2\sum_{n+1}^{\infty}{}_m\, m\,\varrho^m<2\,\varrho\left\{\frac{1}{(1-\varrho)^2}-\varrho-2\varrho^2-\ldots-n\varrho^n\right\}$$

$$<2\,\varrho\left\{\frac{\varrho^2+(n+1)\,\varrho\,(1-\varrho)}{(1-\varrho)^2}\right\}<\frac{n+2}{2^{n-1}};$$

d'altronde la parte negativa non è certamente inferiore in valore assoluto al suo primo termine $\frac{\varrho^4}{n-4\pm r_n}$ e siccome:

$$\frac{\varrho^4}{n-4\mp r_n}\geq\frac{1}{16\,(n-4+r_n)}>\frac{n+2}{2^{n-1}}\ \text{per}\ n\geq 12\,,$$

così si può senz'altro asserire che, se n è primo, nell'intervallo da $\left(-n-\frac{1}{2}\right)$

a $\left(-n+\frac{1}{2}\right)$ e quindi a più forte ragione nell'intervallo da $\left(-n-\frac{1}{2^{n+2}}\right)$ a $\left(-n+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$, l'espressione $\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\varrho^m}{m+z}$ si mantiene costantemente negativa.

« Riassumendo si conclude che per $n \geq 12$, qualunque sia il numero intero n, entro il cerchio di centro $-n$ e di raggio $r_n=\frac{1}{2^{n+2}}$ cade nessuna ovvero soltanto una radice dell'equazione $P(z)=0$: Si può proprio asserire soltanto una, poichè i punti $-n$, con n primo, in cui $P(z)$ si annulla, non sono radici multiple. Infatti, essendo $c_n=0$, vale per $P(-n)$ l'espressione (6) e, siccome abbiam visto che in questo caso $\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\varrho^m}{m+z}$ resta, per $z=-n$, finito e diverso da zero, $P(-n)$ si annulla come $e^{-2\pi i n}-1$, cioè semplicemente.

« Noi siamo ora in grado di determinare il numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo $(\alpha\,\beta)$. Supporremo, ciò che si può fare senza restrizione, β, α non interi, $\beta>\alpha>12$.

« Indicando con h un qualunque numero intero compreso fra α e β e con C_h la circonferenza di raggio $\frac{1}{2^{h+2}}$ descritta intorno a $-h$, per un noto teorema di Cauchy, l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_h}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$ rappresenta il numero delle radici di $P(z)$ comprese entro C_h, quindi 0 o 1 secondochè h è numero composto o primo. Ne deduciamo che il numero $N_{\alpha\beta}$ dei numeri primi compresi fra α e β potrà essere espresso da:

$$N_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)}{}_h\int_{C_h}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz, \tag{7}$$

dove $E(\alpha)$, $E(\beta)$ designano, secondo la notazione di Legendre, i massimi interi contenuti in α e β rispettivamente, $P(z)$, come segue dalle (1), (3), è definito da:

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C x^{z-1}\left\{\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{x^m}{1-x^m}-\frac{2\,x^2}{1-x}-x\right\}dx=\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{a_n}{n!}\,z^n$$

con $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\log x)^n \left\{\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{x^m}{1-x^m} - \frac{2x^2}{1-x} - x\right\}\frac{dx}{x}$$

« Nell'espressione di $N_{\alpha\beta}$, le circonferenze C_h si possono anche assumere tutte eguali alla minima tra esse $C_{E(\beta)}$ di raggio $\beta' = \frac{1}{2^{E(\beta)+2}}$.

« Indicando con C' il cerchio di raggio β' col centro nell'origine, si ha con facile trasformazione dalla (7):

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)}{}_h \int_{C'} \frac{P'(z-h)}{P(z-h)}\,dz = \frac{\beta'}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,d\theta \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)}{}_h \frac{P'(\beta' e^{i\theta}-h)}{P(\beta' e^{i\theta}-h)},$$

la qual formola risolve esplicitamente la questione, che ci eravamo proposti. »

Matematica. — *Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari derivate parziali d'ordine superiore.* Nota di O. Niccoletti presentata dal Socio Bianchi.

Astronomia. — *Fotografie della grande nebulosa di Orione, eseguite da A. Riccò e da A. Mascari nel R. Osservatorio di Catania.* Nota di A. Riccò, presentata dal Socio Tacchini.

Fisica. — *Sul magnetismo dei cilindri di ferro.* Nota di M. Ascoli, presentata dal Socio Blaserna.

Fisica terrestre. — *Sui terremoti giapponesi del 22 marzo 1894.* Nota di G. Grablovitz, presentata dal Socio Tacchini.

Fisica terrestre. — *Sulla durata delle registrazioni sismiche.* Nota di E. Oddone, presentata dal Socio Tacchini.

Chimica. — *Sull'azione del cloridrato di idrossilammina sul gliossale.* Nota di A. Miolati, presentata dal Socio Cannizzaro.

Chimica. — *Sulla stabilità delle immidi succiniche sostituite nell'azoto.* Nota di A. Miolati e di E. Longo, presentata dal Socio Cannizzaro.

Chimica. — *Sulla massima temperatura di formazione, e la temperatura di decomposizione di alcuni cloruri di diazocomposti della serie aromatica.* Nota di G. Oddo, presentata dal Socio Paternò.

Chimica. — *Il bromoformio in crioscopia.* Nota di G. Ampola e di C. Manuelli, presentata dal Socio Paternò.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Cannizzaro, relatore, a nome anche del Socio Paternò, legge una relazione sulla Memoria del dott. Andreocci intitolata: *Sui quattro acidi santonosi,* concludendo col proporre l'inserzione del lavoro nei volumi accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Brioschi annunzia la morte del Socio straniero L. Schläfli, dando le seguenti notizie sulla vita e sulle opere del defunto accademico.

« Ho di nuovo il doloroso compito di annunziare all'Accademia la perdita di un Socio straniero nella Sezione delle Matematiche.

« Il chiaro Geometra Lodovico Schläfli moriva in Berna la mattina del dì venti dello scorso marzo. I professori, gli scolari di quella Università, la cittadinanza tutta, tributarono alla memoria di lui i maggiori onori, rimeritando così la feconda opera sua di insegnante, e di scienziato.

« Nato il 15 gennaio 1814 a Grasswyl, piccolo comune del Cantone di Berna, dalla sua prima giovinezza Schläfli diede singolari prove di attitudine

alle scienze matematiche ed alle filologiche. Fondata nell'anno 1834 l'Università di Berna, appartenne alla facoltà Teologica fino al 1838, nel quale anno fu ordinato pastore. Ma contemporaneamente egli continuava da sè lo studio delle matematiche superiori, ed abbandonato l'ufficio di pastore, accettò di insegnare matematica e scienze naturali nel proginnasio di Thun, ove rimase fino al 1847. In questo anno si abilitò come privato docente nell'Università di Berna, nel 1852 vi fu nominato professore straordinario e nel 1872 promosso ad ordinario. Nel 1891, all'età di 77 anni, già da qualche tempo sofferente di salute, chiese il riposo.

« Lo Schläfli accoppiava ad una vasta coltura matematica, le cognizioni di un filologo e di un botanico. Poteva scrivere correttamente in tedesco, in italiano, in francese ed inglese, come lo dimostrano i suoi lavori matematici.

« Fu più volte in Italia ospite costante di un nostro compianto carissimo collega il Casorati; ed aveva fra noi amici, ed ammiratori della sua lucida mente e delle sue modeste abitudini. Ma il suo primo viaggio nel nostro paese, nel 1847, merita speciale menzione, essendo vênuto in Roma in compagnia di Jacobi, di Dirichlet, e di Borchardt.

« I primi lavori dello Schläfli rimontano agli anni 1846, 1847; appartengono alla geometria differenziale, e furono pubblicati in un periodico di Berna. Ma il lavoro che acquistò ben presto a lui fama di insigne matematico, si è quello sulla eliminazione, o sopra il risultante di un sistema di equazioni algebriche, pubblicato nel 1851 negli Atti dell'Accademia di Vienna. Rileggendo ancora negli scorsi giorni quella importante memoria, parmi poter affermare che già nella medesima si rinvengono le qualità predominanti in tutta l'opera dello Schläfli, e cioè, dapprima conoscenza profonda, completa, dei lavori altrui sull'argomento, poi tendenza e facilità nel generalizzare i risultati, perspicacia somma nell'esaminare i problemi sotto i vari loro aspetti.

« Tutti i periodici matematici di Europa, i giornali di Crelle e di Liouville, il Quarterly Journal, i Mathematische Annalen, gli Annali di Matematica, contengono memorie dello Schläfli, e inoltre i Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, e le Philosophical Transactions della Società Reale di Londra.

« Agli Annali di Matematica egli dedicò importanti suoi lavori sopra svariati argomenti. Non è mio intendimento di addentrarmi in un esame dei medesimi, come degli altri pubblicati altrove; ma oggi ancora rammento la grata impressione nel leggere (1868) la memoria « *Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati* » l'altra che ha per titolo — *Sugli spazi di curvatura costante — Nota ad una memoria del prof. Beltrami* (1871) infine quella — *Sopra un teorema di Jacobi recato a forma più generale ed applicato alla funzione cilindrica* (1871). Quest'ultimo lavoro è connesso agli altri di molto valore sulle funzioni di Bessel e di Heine, pubblicati in alcuno degli indicati periodici.

« Schläfli non ebbe altro pensiero, altro amore nella sua vita, che per la scienza e per l'insegnamento. Uno dei suoi scolari scrivevami giorni sono: « Questi, (gli scolari) che erano la sua famiglia, possono dire quale spirito « di abnegazione e di sacrificio, quale tesoro di affetto, fossero nell'animo del « loro maestro ». E di questa abnegazione diede prova allorquando invitato ad assumere una cattedra in altra Università con sensibile vantaggio nelle condizioni pecuniarie, rifiutò per non abbandonare la patria, e la famiglia dei suoi scolari.

« Al lutto dell'Università di Berna per la morte dell'eminente scienziato si associa di cuore la R. Accademia dei Lincei ».

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci Gegenbaur, von Helmholtz, Kühne, Thomsen, Pincherle, e dei signori Peano e Barone.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; l'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; la Società degli Spettroscopisti italiani di Roma; la Società Reale di Londra; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Washington.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di studî superiori di Firenze; l'Accademia delle scienze di Marsiglia; la Società Adriatica di scienze naturali di Trieste; la Società scientifica di Santiago; la Società di scienze naturali di Francoforte s. M.; le Università di Kiel, di Heidelberg e di Greifswald; la Scuola politecnica di Parigi.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nell'adunanza del 7 aprile 1895.

Aievoli E. — A proposito di un lavoro sugli innesti di spugne preannunziato all'Accademia dei Fisiocritici dal sig. V. Giannettasio. Siena, 1894. 8°.

Barone G. — Distribuzione dei pesci della superficie del mare. Venezia, 1894. 8°.

Berlese A. — Estratto di una memoria sulla *Mytilaspis fulva* Targ. Toz. e mezzi per combatterla. Avellino, 1893. 8°.

Id. — La tignuola del melo, ed il modo di combatterla. Padova, 1893. 8°.

Carlinfanti E. — La reazione del baudouin per la ricerca dell'olio di sesamo nell'olio di olivo. (Ministero dell'Interno, Div. San. Pub.). Roma, 1895. 8°.

Catalogue de la Bibliothèque de la Société Linnéenne de Bordeaux. Fasc. 1°. Bordeaux, 1894. 8°.

Claisen L. — Untersuchungen ueber die Oxymethilenderivate der Ketone. Leipzig, 1894. 4°.

Crisafulli G. — La reazione rossa del legno di pino per la ricerca dell'indolo nelle culture in brodo dei microrganismi. (Ministero dell'Interno, Div. San. Pub.). Roma, 1895.

Döllen W. — Ephémérides des étoiles pour la détermination de l'heure et de l'azimut au moyen d'un instrument des passages. S. Pétersbourg, 1895. 8°.

Formulaire de mathématique publié par la « *Rivista matematica* ». Turin, 1895. 8°.

Gallardo A. — Flores e insectos. Buenos Aires, 1895. 8°.

Halhed Wm. B. — Silver production; can it be internationally controlled? London, 1895. 8°.

Hawley. — Report of the national Academy of sciences made in compliance with a requirement of the law (H. R. 6500) entitled « An Act to define and establish the Units of electrical measure ». Washington, 1894. 8°.

Helmholtz H. v. — Handbuch der physiologischen Optik. Lief. 10. Leipzig, 1895. 8°.

Henry Ch. — Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques à l'usage des candidats à la licence ès sciences mathématiques. Paris, 1895. 8°.

Manson M. — Physical and geological traces of permanent cyclone belts. S. Francisco, 1893. 8°.

Id. — The cause of the Glacial Period and an explanation of geological climates. S. Francisco. 1891. 8°.

Id. — The importance of North Pacific Weather Stations. S. Francisco, 1893. 8°

Id. — The Swamp and Marsh Lands of California. S. Francisco, 1888. 8°.

Palmieri L. — Rivelazioni delle correnti telluriche studiate all'Osservatorio vesuviano con fili inclinati all'orizzonte ecc. Napoli, 1895. 4°.

Perot A. — Sur l'existence et la propagation des oscillations électro-magnétiques dans l'air. Marseille, 1894. 8°.

Pincherle S. — L'algebra delle forme lineari alle differenze. Bologna, 1895. 4°

Raina M. — Sull'escursione diurna della declinazione magnetica a Milano in relazione col periodo delle macchie solari. Milano, 1895. 8°.

Rizzardi U. Risultati biologici di una esplorazione del lago di Nemi. Roma, 1894, 8°.

Segovia (de) y Corrales A. — Les producciones naturales de España. Zaragoza, 1895. 8°.

Siedck R. — Versuche ueber das Magnetische Verhalten des Eisens etc. Wien, 1895. 8°.

Smith W. — Observations on the New England weather Service in the year 1893. Cambridge Mass., 1894. 4°.

Stossich M. — I disdomi dei rettili. Trieste, 1895. 8°.

Id. — Il genere *Ankylostomum Dubini*. Trieste, 1895. 8°.

Id. — Notizie elmintologiche. Trieste, 1895. 8°.

Thomsen J. Relation remarquable entre les poids atomiques des éléments chimiques. Poids atomiques rationnels. Copenhague, 1894. 8°.

Trabucco G. — Se si debba sostituire il termine di Burdigaliano a quello di Langhiano nella serie miocenica. Pisa, 1895. 8°.

Zareczny St. — Atlas geologiczny Galicyi. Krakow, 1894. 8°.

Zurria G. — Risoluzione delle equazioni di terzo grado, dedotta dallo integrale di una equazione a differenze di terzo ordine. Catania, 1895. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 aprile 1895.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sulla teoria cinetica dei gas.* Nota del Socio Blaserna.

« Dai recenti studi di Amagat [1] sulla compressibilità dell'anidride carbonica risulta, che le isoterme (aventi p per ascissa, pv per ordinata) presentano un minimo. Egli riunisce tutti questi minimi corrispondenti alle varie temperature con una linea punteggiata, la quale ha press'a poco la forma di una parabola.

« Si esamina, se la teoria di Van der Waals sia in grado di prevedere questa curva e di tracciarne il carattere.

« Da

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=\mathrm{RT}$$

si ha

$$pv+\frac{a}{v}-bp-\frac{ab}{v^2}-\mathrm{RT}=0\,.$$

« Il processo più diretto sarebbe quello di considerare (pv) come la funzione e p come la variabile indipendente, ponendo $v=\frac{(pv)}{p}$. Ma si arriva a calcoli complicati. Più semplice e più elegante è lo sviluppo, considerando il volume v come variabile indipendente. Ponendo $p=\frac{(pv)}{v}$ si ha

$$(pv)+\frac{a}{v}-\frac{b\,(pv)}{v}-\frac{ab}{v^2}-\mathrm{RT}=0$$

[1] Mémoires sur l'élasticité et la dilatabilité des fluides jusqu'à des très-hautes pressions.

da cui

$$(pv) = \frac{RTv - a + \frac{ab}{v}}{v - b} \qquad 1)$$

e ponendo il quoziente differenziale uguale a zero, e riducendo

$$v^2 - \frac{2b}{1 - \frac{b\,RT}{a}}\,v = - \frac{b^2}{1 - \frac{b\,RT}{a}}$$

$\frac{b\,RT}{a}$ è una quantità proporzionale alla temperatura assoluta; ponendola $= \tau$ si ha

$$v^2 - \frac{2b}{1 - \tau}\,v = - \frac{b^2}{1 - \tau}$$

da cui si hanno per v le due radici

$$v = \frac{b}{1 \mp \sqrt{\tau}} \qquad 2)$$

« Sostituendo questi valori in 1) si ha per minimo (pv) con breve riduzione

$$(pv) = \frac{a}{b}(\pm\, 2\sqrt{\tau} - 1)\,.$$

« Siccome (pv) non può avere valore negativo, dei due valori $\pm \sqrt{\tau}$ il negativo non può sussistere, conseguentemente anche in 2) il valore $\frac{b}{1 + \sqrt{\tau}}$ che conduce a quest'ultimo, deve essere abbandonato.

« Si hanno quindi i valori

$$v = \frac{b}{1 - \sqrt{\tau}} \qquad 3)$$

$$(pv) = \frac{a}{b}(2\sqrt{\tau} - 1) \qquad 3)$$

dai quali, considerando che $p = \frac{(pv)}{v}$, si deduce facilmente

$$p = \frac{a}{b^2}(3\sqrt{\tau} - 2\tau - 1) \qquad 3)$$

« Le formole in 3) dànno la soluzione del problema. Tutte e tre vanno sottoposte alla condizione che i valori di v, (pv), p devono essere positivi o tutt'al più uguali a zero. Ora risulta che ciò avviene:

per la prima, tutte volte che $\sqrt{\tau} \leqq 1$, ossia $\tau \leqq 1$

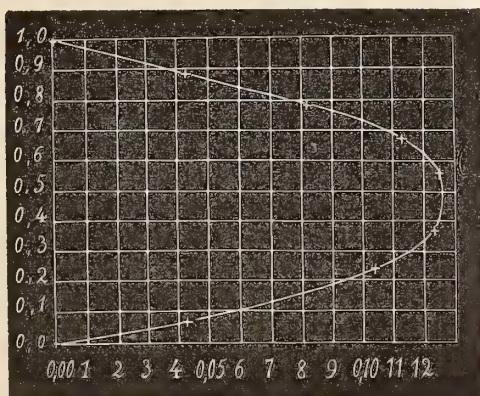
per la seconda » » » $2\sqrt{\tau} \geqq 1$, » $\tau \geqq \frac{1}{4}$

per la terza » » » $3\sqrt{\tau} \geqq 2\tau + 1$ » τ compreso fra $\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

« Ne segue che la condizione della positività sussiste sempre, quante volte i valori di τ non superino l'unità e non rimangano inferiori a $\frac{1}{4}$.

« Con queste avvertenze si ottiene la seguente tabella dalle formole 3)

$\tau =$	$\frac{v}{b} =$	$\frac{b}{a} \cdot (pv) =$	$\frac{b^2}{a} \cdot p =$
0,25	2,00	0,000	0,000
0,30	2,21	0,096	0,044
0,40	2,74	0,270	0,105
0,50	3,41	0,414	0,121
0,60	4,44	0,549	0,124
0,70	6,17	0,676	0,114
0,80	9,44	0,788	0,082
0,90	19,40	0,896	0,044
1,00	∞	1,000	0,000

« Per la soluzione del problema, che qui ci occupa, sono importanti la 3ª e la 4ª colonna, che dànno i valori di (pv) e di p. Si traccia la curva, prendendo (pv) per ordinata, p per ascissa.

« È una curva *molto* rassomigliante a quella trovata da Amagat.

« Si domanda se sia una parabola. Ponendo:

$$y = 2\sqrt{\tau} - 1$$

$$x = 3\sqrt{\tau} - 2\tau - 1$$

eliminando τ si ha l'equazione

$$x = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} y^2$$

la cui forma parabolica risulta evidente.

« Ne segue dunque, che per rapporto alla curva tanto importante di Amagat, la formola di Van der Waals conduce a risultati soddisfacenti, e che *per questo punto* non occorre sostituire quella formola con altre più complicate, come sono quelle proposte da Clausius e da altri ».

Chimica. — *Sul comportamento crioscopico di sostanze aventi costituzione simile a quella del Solvente.* Nota del Socio E. Paternò.

« Da alcuni anni sono stati raccolti numerosi fatti sperimentali per provare che il comportamento crioscopico anormale di molte sostanze è dovuto alla analogia della loro costituzione con quella del solvente adoperato. E veramente i lavori di Ferratini e Garelli (1), di Garelli (2) e di Garelli e Montanari (3) mostrano senza dubbio che questa supposizione è tutt'altro che infondata. Però a me è sembrato che nell'ultima delle citate memorie i signori Garelli e Montanari si siano lasciati spingere un po' troppo oltre nelle loro conclusioni; ed invero a p. 235 (4) si esprimono così: tutti i fenoli sciolti nell'idrocarburo, dal quale derivano per introduzione di un solo ossidrile, danno depressioni anormali, ed a p. 237 insistono sulla regola che ogni corpo ciclico, che differisce dal solvente per un solo ossidrile o per un gruppo amminico deve, sciolto in esso, fornire abbassamenti termometrici più piccoli dei teoretici, a questa regola trovano tuttavia una eccezione nei corpi, nei quali l'ossidrile è in posizione para (idrochinone in fenolo, acidi para ossi e para amido benzoico in acido benzoico). Se noi diamo uno rapido sguardo alle determinazioni crioscopiche fatte fino ad ora, mi sembra che prima di tutto si debbano distinguere tre categorie di anomalie. In alcuni casi come per il tiofene, pirrolo, piridina nella benzina si ha depressione molecolare inferiore alla normale, ma variando la concentrazione, l'andamento del fenomeno è lo stesso, come per le sostanze che si comportano normalmente. In altri casi, come per gli alcooli nella benzina, l'anomalia sta principalmente nell'andamento del fenomeno col variare della concentrazione; poichè le depressioni molecolari, normali o quasi per soluzioni diluite, decrescono rapidamente con il crescere della concentrazione; vi sono finalmente dei casi, esempio quelli del carbazolo e dell'antrocene nel fenantrene, nei quali l'aggiunta della sostanza anzichè produrre un abbassamento nel punto di congelazione del solvente lo innalza, sicchè i miscugli dei due corpi in varie proporzioni hanno

(1) Gazzetta chimica, XXII, 2ª, p. 245 — ibidem XXIII, 1ª, p. 442.
(2) Gazz. chim., XXIII, 2ª, p. 354 — e XXIV, 2ª, p. 442.
(3) Gazz. chim. XXIV, 2ª, p. 229.
(4) Gazz. chim., XXIV, 2ª.

sempre punti di congelamento intermedî tra quelli delle due sostanze prese isolatamente.

« Ciò premesso, mi è sembrato che se per la prima e terza categoria di anomalie, possa ricercarsi la causa nella analogia di costituzione o nell'isomorfismo, ed in generale nella formazione delle cosidette soluzioni solide, lo stesso non si può dire per le anomalie della seconda categoria, quali quelle che presentano gli alcooli ed i fenoli nella benzina, e forse anche, per altre considerazioni, gli acidi.

« Per fermarmi a discutere la regola annunziata da Garelli e Montanari, dirò subito che mi pare che le anomalie riscontrate nel comportamento dei fenoli in varii solventi, sieno generalmente un fenomeno dovuto alla funzione chimica, senza escludere che in alcuni casi possano essere dovute ad analogia di costituzione o ad isomorfismo col solvente; e più nettamente dirò che da un attento studio del comportamento degli alcooli e dei fenoli, mi sembra giustificato l'ammettere che esso sia collegato alla loro funzione chimica, che è forse in relazione con la complessità molecolare. La funzione alcoolica di una sostanza si manifesta subito, studiandone il comportamento crioscopico per soluzioni di concentrazione diversa nella benzina, nel paraxilene nel bromoformio ed in altri solventi. Lo stesso avviene per i fenoli, con la differenza però che mentre per alcooli il comportamento anomale si conserva anche per i termini più elevati della serie, mentre per i fenoli, il fenomeno marcato nel primo termine (fenol ordinario) si rende meno sensibile negli omologhi superioriori sino a sparire o quasi in quelli più elevati; così mentre il fenol nella benzina fornisce già in soluzioni diluite, una depressione molecolare metà della normale, il paracresol dà in soluzioni diluite valori normali, ed arriva ad una depressione circa metà della normale solo in soluzione molto concentrata (18 $^0/_0$); pel timol e per il salicilatometilico anche in soluzioni molto concentrate l'allontanamento dai valori normali è relativamente piccolo. Lo stesso avviene per soluzioni in paraxilene, e le esperienze pubblicate da me e Montemartini lo scorso anno, hanno provato che il timol, paracresol e salicilato metilico si comportano nel paraxilene in modo simile che nella benzina; da ciò, per chi bene consideri, la supposizione che le anomalie dipendano da analogia di costituzione tra solvente e sostanza sciolta, perde molto del suo valore. Inoltre mi pare che dalle stesse esperienze di Garelli e Montanari non si possano dedurre conseguenze precise e ben definite. Infatti le soluzioni di diossibenzina nel fenol danno per concentrazioni comprese tra 8 e 9 $^0/_0$ abbassamenti che conducono da un peso molecolare di 129,3 (minimo per la resorcina) ad uno di 142,0 (massimo per la pirocatechina) invece di 110; gli acidi ossibenzoici nell'acido benzoico non conducono ad alcuna regola, perchè ognuno di essi presenta una speciale anomalia senza che si abbia il fenomeno caratteristico nei composti ossidrilici, del rapido decrescimento della depressione molecolare col crescere

della concentrazione; per l'acido ortossibenzoico per concentazioni variabili da 1,12 a 6,84 l'abbassamento molecolare varia da 41,9 a 39,9 pel meta da 28,5 a 21,4, pel para da 84.6 a 78,7 per concentrazioni analoghe: la depressione normale è di 78,5.

« L'assieme di questi fatti e di altri che per brevità ometto, non mi pare giustifichi la regola suenunciata di Garelli e Montanari.

« A maggior conferma di questo dubbio, ho voluto fare alcune nuove esperienze. Supponendo vera la regola di Garelli e Montanari il paraxilenol $C_4H_3 \begin{cases} CH_3 (1) \\ CH_3 (4) \\ OH\ (2) \end{cases}$ nel quale l'ossidrile non è rispetto ai metili in posizione para, avrebbe dovuto nel paraxilene comportarsi in modo omomalo, ed allontanarsi dalla legge di Raoult più marcatamente del fenol ordinario, mentre il fenol nella benzina dovrebbe allontanarsi più che il paraxilenol. I risultati ottenuti sono i seguenti:

Paraxilenol in paraxilene.

P. cong. del p. xilene 13°,445

	sostanza %	abbassamento termometrico	coefficiente abbassamento	abbassamento molecolare	P.M
1	0,4757	0,19	0,399	48,68	107,7
2	1,3334	0,485	0,356	43,43	120,7
3	2,0509	0,65	0,317	38,77	135,6
4	4,1393	1,265	0,303	36,97	141,9
5	4,3313	1,285	0,296	36,11	145,2
6	5,6585	1,585	0,280	34,16	153,5
7	7,6876	2,055	0,267	32,57	161,0
8	12,2243	2,995	0,245	29,89	175,5
9	16,9112	3,82	0,225	27,45	190,7
	Paraxilenol in benzina.				
1	1,0628	0°,44	0,414	50,51	118,3
2	2,9665	1',14	0,384	46,85	127,4
3	9,2615	3",02	0,326	39,77	159,5

« La poca solubilità del paraxilenol non permette di operare in soluzione più concentrata.

« Come è noto pel fenol negli stessi due solventi si ha:

Fenol in benzina.

	sostanza %	abbassamento termometrico	coefficiente abbassamento	abbassamento molecolare	P.M
1	2,4465	0,71	0,290	27,26	168,9
2	3,7396	1,04	0,279	26,23	175,6
3	4,8853	1,34	0,274	25,75	178.8
4	9,8152	2,335	0,237	19,91	206,7
5	15,8717	3,405	0,214	17,97	228,9

Fenol in paraxilene.

1	1,251	0,55	0,439	41,27	97,9
2	2,765	1,115	0,403	37,88	106,7
3	4,874	1,745	0,358	33,65	120,1
4	6,813	2,26	0,332	31,21	129,4
5	9,759	2,865	0,293	27,54	146,7
6	13,117	3,44	0,262	24,63	164,1
7	19,235	4,245	0,221	20,77	196,5
8	25,094	5,03	0,200	18,80	215,0
9	34,051	5,925	0,172	16,17	250,6

« Osservando questi numeri non rimane alcun dubbio, che il fenol si comporti in modo identico nella benzina e nel paraxilene, e che similmente il paraxilenol si comporta in modo identico nei due solventi, solo l'allontanamento dalla legge di Raoult pel fenol è più marcato che per il paraxilenol ma in tutti e due i solventi, in corrispondenza a quanto ho detto più sopra.

« Meglio ancora si scorge il fenomeno esaminando i diagrammi, che a colpo d'occhio mostrano il parallelismo fra l'andamento del fonomeno pel fenol in soluzione nella benzina e nel paraxilene, e del paraxilenol nei medesimi due solventi, quindi la relazione di costituzione tra solvente e sostanza sciolta non esercita alcuna influenza in questi casi, che sono pure dei casi tipici.

« A maggior conferma di quanto ho sopra detto, volli pure studiare il comportamento del fenolbenzilato nel difenilmetano: secondo la regola di Garelli e Montanari, il fenol avrebbe dovuto essere normale nel difenilmetano ed il fenolbenzilato anormale.

« I risultati ottenuti sono i seguenti:

Fenol in defenilmetano.

Difenilmetano P. cong. 24,58

	sostanza %	abbassamento termometrico	coefficiente abbassamento	abbassamento molecolare	P.M
1	0,4666	0,29	0,621	58,37	105,6
2	1,2392	0,745	0,604	56,77	108,6
3	2,0588	1,22	0,592	55,65	110,8
4	3,7254	1,98	0,535	50,29	122,6
5	5,6715	2,72	0,474	44,55	138,3
6	8,7941	3,73	0,424	40,85	154,7
7	16,6056	6,285	0,378	36,53	173,5
8	20,0535	7,485	0,372	34,97	176,3
9	26,1504	8,195	0,313	29,42	209,5

Fenolbenzilato in difenilmetano.

1	1,0528	0,17	0,161	29,62	407,5
2	6,6270	0,955	0,144	26,49	455,5
3	17,1838	2,30	0,134	24,65	489,9

« La nuova conferma che io mi aspettavo non risulta da queste esperienze, sia perchè il comportamento del fenol nel difenilmetano si avvicina più al normale che nella benzina e nel paraxilene, sia principalmente perchè il fenolbenzilato nel difenilmetano si comporta in modo affatto anomalo, e l'allontanamento dal caso normale è maggiore che per qualunque altro fenol in qualsiasi altro dei solventi studiati. Nemmeno questo fatto, dopo quanto ho prima esposto, è sufficiente a risolvere la questione in favore alla regola di Garelli e Montanari, e prova solamente che la parte sperimentale è ancora troppo incompleta per poter trarre delle regole di generale applicazione. A confermare che il comportamento anomalo del fenol nella benzina non è dovuto a relazione di costituzione tra sostanza e solvente, citerò che da esperienze di Ampola e Manuelli risulta che il fenol ed il timol, impiegando come solvente il bromoformio, si comportano in modo del tutto corrispondente che nella benzina, e nel paraxilene, e che invece il cloroformio si comporta normalmente ».

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

« 1. In questa terza Nota mi propongo di estendere, in quanto è possibile, alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque n i risultati già ottenuti nelle due Note precedenti (¹) sulle equazioni differenziali lineari di 4° ordine; di studiare cioè il caso in cui dette equazioni differenziali ammettono un sistema di soluzioni indipendenti $y_1, y_2, \dots y_n$ legate da equazioni algebriche rappresentanti complessivamente una superficie dello spazio S_{n-1}, in cui le y_i si suppongono interpretate quali coordinate projettive omogenee. Si sappia, in altri termini, che la curva Γ (di questo spazio) descritta dal punto variabile (y), pur non essendo algebrica (caso già considerato in altre due Note a p. 18 e 51 di questi Rend.), è però contenuta in una superficie algebrica F.

« L'equazione differenziale proposta potrà certo integrarsi algebricamente (a meno forse di un fattore comune a tutte le soluzioni, e determinabile con una quadratura), se questa superficie non ammette che un numero finito di trasformazioni projettive in sè (ma la curva Γ risulterà in tal caso algebrica); e si potrà certo integrare per quadrature, se essa ne ammette soltanto un gruppo continuo ∞^1. (²).

(¹) Cfr. questi Rend.; p. 232 e 292. Sull'equazione differenziale proposta si suppongono fatte le stesse ipotesi delle diverse Note prec. (cfr. anche p. 23 di questi Rend.).

(²) È questa un'estensione immediata del risultato già ottenuto per $n=4$. Si noti che quando il gruppo di tutte le trasformazioni projettive della superficie F in sè stessa

« A questo stesso risultato si giunge anche se la superficie F ammette un gruppo continuo (soltanto) ∞^2 di trasformazioni projettive; ed è facile anzi riconoscere direttamente che questo gruppo ∞^2 deve appunto contenere sempre un sottogruppo *eccezionale* ∞^1 (deve essere cioè *integrabile*) (¹). Infatti ogni punto, il quale sia unito per un'omografia (non ciclica) del gruppo, e quindi per tutte quelle di un certo sottogruppo ∞^1, ma non per le rimanenti (²), vien portato dalle diverse operazioni del gruppo ∞^2 nei punti di una linea (luogo di un punto unito *variabile*), che è mutata in sè stessa da tutte le omografie del gruppo complessivo (∞^2); dunque nei punti di una curva razionale normale di un certo ordine $r \leq n-1$, la quale conterrà anche un punto unito fisso (³). La superficie luogo delle tangenti a questa curva verrà segata dall'S_{r-1} osculatore ad essa in quel punto unito fisso secondo una curva di ordine $r-1$ (⁴), che sarà anche unita rispetto alle stesse omografie (perchè intersezione di due varietà unite), e conterrà del pari un nuovo punto unito variabile. Analogamente si dimostrerebbe che gli altri $r-2$ punti uniti contenuti nello spazio S_r della curva C^r primitiva descrivono rispettivamente una C^{r-2}, una C^{r-3}, ... (tutte razionali normali), e infine una conica e una retta, passanti sempre per il punto unito fisso sulla curva C^r (e aventi ivi con quest'ultima curva contatti di ordini gradatamente decrescenti). In generale, se fra gli n punti uniti dello spazio S_{n-1} (⁵) ve ne sono k fissi, tutti gli n si distribuiranno secondo k aggruppamenti di questo stesso tipo (⁶). Imponendo ora a ciascun punto unito variabile di coincidere con quello fra

risultasse *misto*, noi potremmo sempre limitarci a tener conto del suo sottogruppo continuo più ampio (cfr. questi Rend., p. 234-235; e anche: Vessiot, Ann. Ec. Norm. Sup., 1892; p. 236).

(¹) Dalle ricerche generali del sig. Lie (*Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 681 e 713) risulta anzi che *ogni* gruppo continuo ∞^2 è integrabile; ma noi vogliamo vedere anche *come* si ottenga, nel nostro caso, il sottogruppo eccezionale ∞^1.

(²) Se le ∞^2 omografie avessero tutte gli stessi punti uniti, esse sarebbero permutabili, e ogni sottogruppo ∞^1 contenuto nel gruppo ∞^2 risulterebbe perciò eccezionale.

(³) Cfr. Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. IV, p. 1607 (per il caso $n=4$), e anche la mia Nota a p. 149 di questi Rend. (n. 3). Il gruppo ∞^2 non potrebbe subordinare su questa curva un solo gruppo ∞^1 di projettività, perchè se no sulla curva stessa vi sarebbero già *due* punti uniti fissi (comuni a tutte queste projettività); ed essendovi, oltre a questi, anche un (terzo) punto unito variabile, risulterebbero uniti per ogni omografia del gruppo ∞^2 tutti i punti della curva C^r, e quindi anche quelli dello spazio S_r in cui questa curva è contenuta.

(⁴) Più la tangente alla curva nello stesso punto unito, da contarsi $r-1$ volta.

(⁵) In questo ragionamento si suppone che l'omografia generale del gruppo ∞^2 non abbia che un numero finito di punti uniti (i quali saranno però tutti distinti; cfr. questi Rend., p. 155); ma il risultato vale anche in ogni altro caso.

(⁶) Si noti che due diversi fra questi aggruppamenti non possono corrispondere a uno stesso punto fisso, a meno che ogni omografia del gruppo non abbia infiniti punti doppi (cfr. ad es. Enriques, l. c., p. 1608).

i k punti fissi che sta sulla sua trajettoria (e basta che l'imponiamo ad uno, perche così avvenga per tutti), noi veniamo appunto a staccare dal gruppo complessivo ∞^2 un sottogruppo ∞^1, che è certamente eccezionale, perchè ogni gruppo ∞^2 di projettività in una forma semplice (o ente razionale) — gruppo che ammette necessariamente un elemento unito fisso (¹) — contiene come sottogruppo eccezionale il fascio di omografie paraboliche con questo stesso (unico) elemento unito. Il gruppo ∞^2 considerato è dunque effettivamente integrabile (²).

« 2. Supponiamo ora che la superficie algebrica F contenente la curva Γ ammetta un gruppo transitivo anche tre o più volte infinito di trasformazioni projettive, e vediamo come si possa ancora trarne, per altra via, qualche risultato generale. — Ricordiamo perciò che ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive, è *razionale* (cfr. p. 159 di questi Rend.), e dà luogo perciò, in ogni sua rappresentazione piana, a un sistema lineare di curve (piane) mutato in sè stesso da un certo gruppo continuo di trasformazioni *Cremoniane*. Questo gruppo può sempre ridursi con un' ulteriore trasformazione Cremoniana (se già non è tale) a uno dei *tre* tipi seguenti (³):

1°) *Gruppo* ∞^8 *delle omografie, e suoi sottogruppi;*

2°) *Gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè due fasci di raggi* (ovvero: *gruppo delle inversioni rispetto ai circoli del piano*), *e suoi sottogruppi;*

3°) *Gruppo* ∞^{m+5} (*con* m *arbitrario*) *delle trasformazioni di Jonquières* (*di ordine* m) *che mutano in sè il sistema lineare* ∞^{m+1} *delle curve di ordine* m *con un punto base* $(m-1)^{plo}$ *e le* $m-1$ *tangenti fisse, e suoi sottogruppi;*

e noi possiamo anzi supporre ch'esso appartenga già a uno di questi stessi tipi, perchè se no tutto si ridurrebbe a modificare opportunamente la rappresentazione piana della superficie proposta (a sostituire cioè al primo sistema rappresentativo di essa un altro sistema, identico a questo dal punto di vista delle trasformazioni birazionali).

« Ma, nel secondo dei tre casi, noi possiamo ancora considerare il piano come projezione stereografica di una quadrica di S_3, per modo che i due

(¹) Cfr. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 569.

(²) È chiaro come in questo caso (e anche in tutti gli altri casi di gruppi integrabili considerati nell'ultima mia Nota) risulti confermato il teorema del sig. Lie (op. cit., vol. I, p. 289; o anche: Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen* ..., p. 532), che cioè ogni gruppo integrabile di trasformazioni projettive di uno spazio S_r deve lasciar fisso almeno un punto di questo spazio, e che per ogni S_k $(k=0,1,2,\ldots r-2)$, il quale sia unito per tutte le trasformazioni del gruppo, deve passare almeno un S_{k+1}, del pari unito per queste.

(³) Cfr. Enriques, Rend. di quest'Acc., vol. II, 1° sem., p. 468.

punti fissi siano immagini delle generatrici di questa uscenti dal centro di projezione; e allora il gruppo considerato di trasformazioni Cremoniane darà luogo, su questa quadrica, a un gruppo di omografie (avremo cioè, nello spazio S_3 in cui la quadrica è contenuta, un gruppo di projettività trasformanti quest'ultima superficie in sè stessa). Nel terzo caso, potremo costruire un cono razionale normale di ordine m, appartenente a uno spazio S_{m+1}, e riferibile birazionalmente allo stesso piano in modo che alle sue sezioni iperplanari corrispondano precisamente le curve di ordine m con punto $(m-1)^{plo}$ dianzi considerate. E allora il gruppo considerato di trasformazioni di Jonquières si muterà in un gruppo di omografie su questo cono.

« Dunque: *Ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè stessa, si può trasformare birazionalmente in un piano, in una quadrica dello spazio* S_3, *o in un cono razionale normale di un certo spazio* S_{m+1}, *in modo che il gruppo considerato di omografie su di essa dia luogo rispettivamente a un gruppo di omografie nel piano, oppure a un gruppo di omografie dello spazio* S_3 *o* S_{m+1}, *le quali trasformino in sè stessa quella certa quadrica o quel cono razionale normale* (1).

« Questa stessa trasformazione birazionale muterà la curva Γ proposta in una certa curva Γ', piana (nel primo caso), oppure contenuta in una quadrica di S_3 o in un cono razionale normale di S_{m+1} (nel secondo o terzo caso). Le coordinate (omogenee) z_i di un punto variabile di questa nuova curva saranno in ogni caso funzioni razionali delle y_i, e così queste di quelle; di più, *ad ogni sostituzione lineare delle* y_i, *la quale determini una trasformazione projettiva della superficie proposta* F *in sè stessa, corrisponderà* (per il modo stesso in cui la trasformazione birazionale è stata fissata) *una sostituzione pure lineare delle* z_i. In particolare, i diversi gruppi di valori che le z_i potranno assumere in uno stesso elemento dell'ente algebrico dato (sul quale i coefficienti dell'equazione differenziale proposta si sono supposti razionali) si dovranno anche ottenere gli uni dagli altri con sostituzioni lineari. Indicati pertanto, nel primo caso, con z_1, z_2, z_3 tre rami (*Zweige*) particolari di queste funzioni (corrispondenti cioè a rami particolari y_i), è chiaro che le z saranno integrali dell'equazione differenziale lineare di 3° ordine:

$$\begin{vmatrix} z''' & z'' & z' & z \\ z_1''' & z_1'' & z_1' & z_1 \\ z_2''' & z_2'' & z_2' & z_2 \\ z_3''' & z_3'' & z_3' & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

(1) Questo risultato si può ritenere un'applicazione immediata di quelli ottenuti dal sig. Enriques (l. c.) sulla riduzione dei gruppi continui di trasformazioni Cremoniane nel

e che i coefficienti di quest' equazione, supposto ridotto all'unità uno qualunque di essi, ad es. quello di z''', saranno funzioni *razionali* nel campo prestabilito. Essi rimangono infatti numericamente invariati per ogni sostituzione lineare delle z_i, dunque anche per ogni sostituzione lineare delle y_i la quale determini una trasformazione projettiva della superficie F in sè stessa, e quindi certo per ogni operazione contenuta nel *Gruppo di razionalità* dell'equazione differenziale proposta (¹).

« Nel secondo e nel terzo caso si giunge a un risultato perfettamente analogo (vale a dire a un' equazione differenziale lineare del 4° o dell'$(m+2)^{\text{simo}}$ ordine, sempre a cofficienti razionali), solo che nel secondo caso le soluzioni z_i saranno ancora legate da un' equazione algebrica omogenea di secondo grado, e nel terzo caso da un sistema di equazioni rappresentanti il cono considerato di S_{m+1} (un' equazione sola per $m=2$) (²).

« 3. Nel primo caso le (tre) z_i saranno dunque integrali indipendenti di un' equazione differenziale lineare di 3° ordine, a coefficienti razionali; ma non saranno più legate, naturalmente, da nessuna equazione algebrica a coefficienti costanti (se no la curva Γ sarebbe essa stessa algebrica). E, in generale, non si potrà dirne altro. Questa nuova equazione differenziale potrà avere come gruppo di razionalità l'intero gruppo ∞^8 delle omografie piane, ovvero un suo sottogruppo qualsiasi (³), e per ciascuno di questi casi deve esistere e si potrebbe costruire una particolare teoria di integrazione (⁴).

---

piano a (tre) tipi determinati (cfr. anche la Nota succssiva a p. 532 del vol. cit. di questi Rend., e la mia Nota a p. 149 di questo vol.). Il sig. Enriques aveva anzi già notato come queste sue ricerche si potessero mettere in relazione con quelle sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse (cfr. Atti Ist. Ven , ser. 7ª, t. IV, p. 1592).

(¹) Ed è questa appunto la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione razionale delle soluzioni z e loro derivate sia anche funzione razionale della variabile indipendente (cfr. Vessiot, Mem. cit., p. 231). È bene notare però che si tratta sempre di invariabilità *numerica,* non *formale;* un fatto questo che anche nella memoria classica e così importante del Sig. Vessiot non è messo forse abbastanza in evidenza (cfr. ad es. le lez. litogr. del Sig. Klein: *Einleitung in die höhere Geometrie,* II, p. 299).

(²) Queste nuove equazioni differenziali sarebbero dunque *trasformate razionali* dell'equazione differenziale proposta. Per calcolarle effettivamente, bisognerà conoscere, caso per caso, le formule che servono a trasformare la superficie data F in un piano, in una quadrica, o in un cono razionale, nel modo già stabilito.

(³) O anche il gruppo ∞^9 di tutte le sostituzioni lineari ternarie, quando si tenga conto altresì della possibile esistenza di un fattore esponenziale comune a tutte le soluzioni (e che si potrà determinare con una quadratura).

(⁴) I gruppi continui di omografie piane sono stati determinati tutti dal sig. Lie (cfr. ad es.: *Theorie der Transformationsgruppen,* vol. III, cap. 5°; o anche Lie-Scheffers: op. cit., cap. 11). Dalle sue ricerche risulta in particolare che il gruppo ∞^8 di tutte queste omografie (e anche il gruppo analogo per uno spazio qualunque) è un gruppo *semplice*

« Nel secondo caso le (quattro) z_i saranno i prodotti di due coppie di soluzioni distinte di due equazioni differenziali lineari di 2° ordine, i cui coefficienti si potranno ottenere razionalmente, quando al campo di razionalità primitivo si sia aggiunta una certa radice quadrata (cfr. il n. 5 della mia Nota a p. 292 di questi Rend.). In casi particolari l'integrazione di queste due equazioni potrà subire ulteriori semplificazioni.

« Nel terzo caso infine, tutte le z_i meno una (ad es. per $i = 1, 2, \ldots m+1$) dovranno soddisfare a una stessa equazione differenziale lineare di ordine $m+1$, a coefficienti razionali, la quale ammetterà come soluzioni le potenze m^{sime} degli integrali di una determinata equazione differenziale lineare di 2° ordine, pure a coefficienti razionali. Siamo dunque ricondotti all'integrazione di quest' ultima equazione (1). — La z_{m+2} si potrà poi determinare, conosciute le soluzioni precedenti, con una serie di quadrature (2).

« 4. Ci rimane ora a considerare il caso in cui la superficie F ammette soltanto un gruppo *intransitivo*, due o più volte infinito, di trasformazioni projettive (3). Vi è allora su di essa un fascio (non necessariamente razionale) di curve razionali normali C^r, appartenenti a spazi S_r $(r < n-1)$,

---

(privo cioè di sottogruppi eccezionali — teorema già comunicato nei Math. Ann., vol. XXV, p. 130 —); sicchè l'integrazione di un'equazione differenziale lineare di 3° ordine (e anche di ordine superiore) del tipo più generale è un problema *irriducibile* (che non si può ricondurre cioè a problemi meno elevati), quando solo si prescinda da quella semplificazione, forse più apparente che reale, che proviene dal fatto che il gruppo ∞^9 di tutte le sostituzioni lineari ternarie (e analogamente per più variabili) contiene come sottogruppo eccezionale il corrispondente *gruppo lineare omogeneo speciale*, caratterizzato dai determinanti unità, il quale è appunto *isomorfo* a quello di tutte le omografie (piane, o di un opportuno S_r). — I diversi casi che si possono presentare per le equazioni differenziali lineari di 3° ordine sono stati studiati nella Mem. cit. di Vessiot (pag. 265 e seg.), dove è anche osservato che, fatta astrazione da quella quadratura che corrisponde al passaggio dal gruppo ∞^9 a quello semplice ∞^8, il problema si può ridurre, anche nel caso generale, all'integrazione di un'equazione differenziale (non lineare) di 2° ordine (come anche a un'equazione differenziale lineare di 2° ordine si può sempre sostituire un'equazione non lineare di 1° ordine, e precisamente un'*equazione di Riccati*).

(1) Questa è infatti la generalizzazione, per m qualunque, del caso di una curva contenuta in un cono quadrico di S_3 $(m=2)$. Nello spazio $z_{m+2} = 0$, le $z_1 z_2, \ldots z_{m+1}$ sarebbero infatti coordinate di un punto (variabile) di una curva razionale normale di ordine m. — Anche qui potrebbero presentarsi, in casi particolari, ulteriori semplificazioni; così p. e. le z, ... z_{m+1} sarebbero tutte razionali quando il gruppo considerato di omografie sul cono si componesse di sole omologie.

(2) Come nuova (ultima) soluzione di un'equazione differenziale lineare di ordine $m+2$, della quale sarebbero già note $m+1$ soluzioni indipendenti.

(3) In questo caso non si può più asserire infatti che la superficie F sia *razionale*, e questa è stata appunto la base di tutto il ragionamento dei due nⁱ. precedenti. Quello però che si è detto al n. 1 per i gruppi ∞^2 non escludeva il caso di un gruppo intransitivo (nel qual caso però un' omografia generale deve sempre avere infiniti punti doppi. Cfr. anche la nota (4) a p. 153 di questi Rend.).

ciascuna delle quali è mutata in sè stessa da tutte le omografie del gruppo. Se quest'ultimo è solo ∞^2, esso è certo integrabile (e sarebbe anzi simile a un gruppo ∞^2 di projettività binarie); in ogni altro caso noi potremo imporre ai punti di una particolare curva C^r di essere tutti uniti. Se questa condizione è soddisfatta dalla sola trasformazione identica [1], l'integrazione dell'equazione differenziale proposta potrà ricondursi a quella di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine (perchè i diversi valori che le y_i assumono in uno stesso elemento dell'ente algebrico dato si potranno far dipendere razionalmente da un parametro, che potrà subire a sua volta un certo gruppo di sostituzioni projettive). Se invece la stessa condizione è soddisfatta da tutto un gruppo infinito di projettività (gruppo che sarà certo eccezionale entro quello primitivo), è facile riconoscere che le omografie così subordinate sulle (altre) curve C^r dovranno essere tutte paraboliche (perchè se no ogni omografia dovrebbe avere, entro ciascun S , $r+1$ punti doppi indipendenti, appartenenti (in generale) ad altrettanti spazi di punti uniti, i quali tutti dovrebbero incontrare l'S_r della prima curva, che pure sarebbe luogo di punti uniti. E poichè due spazi (distinti) di punti uniti non possono mai incontrarsi, a meno di non esser contenuti in uno stesso spazio più ampio e pure luogo di punti uniti, se ne trae subito che una tale omografia non potrebbe essere diversa dall'identità). Di più, sopra ogni curva C^r le diverse omografie paraboliche così subordinate avranno tutte lo stesso punto unito (perchè è questo l'unico caso possibile di un gruppo costituito da sole omografie paraboliche). E questi punti uniti formeranno una curva (direttrice) d, che sarà unita anche rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo primitivo [2]. Infatti, se una projettività P di questo gruppo la mutasse in un'altra direttrice d', indicata con Q una projettività qualunque del sottogruppo eccezionale dianzi considerato (rispetto a cui d è certo curva unita), sarebbe $P^{-1}QP$ (la *trasformata* cioè di Q mediante P) una proiettività di questo stesso sottogruppo, la quale muterebbe d' in sè stessa; e ciò è assurdo, a meno che il prodotto $P^{-1}QP$ non sia l'identità, nel qual caso però anche Q dovrebbe coincidere colla trasformazione identica (mentre invece si era detto di prenderla ad arbitrio entro un gruppo almeno ∞^1).— Tutte le omografie del gruppo proposto lasciano

(1) Nel caso (supposto possibile) di un gruppo complessivo *misto*, questa condizione sarebbe soddisfatta da un numero finito di projettività (una per schiera), formanti un gruppo discontinuo finito; e queste projettività dovrebbero subordinare sulle altre curve C^r (per ragioni che si vedranno in seguito) omografie *paraboliche*. Ma poichè in una forma semplice non esistono gruppi finiti di tali omografie, così questo caso non potrà certo presentarsi.

(2) Questa curva potrebbe in particolare ridursi ad un punto (comune a tutte le curve C^r); ed è chiaro allora che un tal punto dovrebbe anche essere unito rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo complessivo (supposto almeno ∞^2, — o anche ∞^1, ma continuo —).

dunque fissa la direttrice d; e se anche le projettività subordinate sulle singole curve C^r non sono in generale paraboliche, vi sarà certo un sottogruppo (eccezionale), di dimensione inferiore soltanto di un' unità, composto di sole omografie così fatte. Queste omografie saranno tutte permutabili, e perciò il gruppo proposto sarà in ogni caso *integrabile* (quando non sia simile a quello ∞^3 delle projettività binarie (1) (2)).

« Dunque: *Se la curva Γ definita dall'equazione differenziale proposta è contenuta in una superficie algebrica trasformata in sè stessa soltanto da un gruppo intransitivo di omografie, l'equazione differenziale è certo integrabile per quadrature, a meno che questo gruppo non sia precisamente* ∞^3, *e simile al gruppo delle projettività binarie. In quest'ultimo caso occorrerà, in generale, l'integrazione di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine.*

« Come risultato ultimo, abbiamo dunque che *l'integrazione di un'equazione differenziale lineare di ordine qualsiasi, la quale definisca una curva contenuta in una superficie algebrica, può sempre ricondursi, astrazion fatta da quadrature e da operazioni algebriche* (*e quando queste operazioni non bastino*), *a quella di*:

1°) *Un' equazione differenziale lineare del* 3° *ordine;* oppure di:

2°) *Una o due equazioni differenziali lineari di* 2° *ordine.* — Questo secondo caso si presenta ogni qual volta la superficie in discorso contiene uno o rispettivamente due fasci *razionali* di curve, tali che le curve

(1) Anche qui, per ragioni analoghe a quelle accennate in una nota prec., non può presentarsi il caso di un gruppo complessivo *misto.*

(2) Queste considerazioni completano il cenno brevissimo sui gruppi intransitivi di trasformazioni projettive di una superficie algebrica in sè stessa, già contenuto in una nota a p. 159 di questi Rend.: *Se una superficie algebrica ammette un gruppo intransitivo, due o più volte infinito, di trasformazioni projettive, vi è sempre una curva* (*direttrice*) *luogo di punti uniti per tutte le trasformazioni del gruppo* (*e che potrà anche, in particolare, ridursi ad un punto;* ad es. nel caso del cono), *oppure vi è un fascio razionale di direttrici, sulle quali il gruppo* (*che sarà in tal caso* ∞^3) *opera come sui punti di una punteggiata.* La direttrice uscente da un punto qualunque della superficie è precisamente il luogo dei punti che risultano uniti sulle singole curve C^r, quando a quel primo punto si imponga di essere unito. — Del resto, si può anche vedere direttamente che le direttrici *minime* (ossia di ordine minimo) della nostra superficie non possono essere (come sulle rigate) che in numero finito, oppure ∞^1 (perchè se fossero almeno ∞^2, si potrebbe ancora abbassarne l'ordine, imponendo a una di esse di contenere due punti distinti di una stessa curva C^r, e quindi tutta questa curva. Nè è possibile che non vi siano affatto direttrici, perchè le projettività del gruppo considerato danno facilmente (coi loro punti uniti) modo di costruirne). Se le direttrici minime sono ∞^1, il gruppo di omografie opera su di esse come sui punti di una curva, ed è quindi al più ∞^3. Se invece le direttrici minime sono in numero finito, lo stesso gruppo di omografie, se è continuo (o, se è misto, ogni gruppo continuo in esso contenuto) deve ammetterle tutte come curve di punti uniti, dal che segue senz'altro che non può esservene che una sola (o al più due, quando il gruppo fosse ∞^1).

di ciascun fascio siano trasformabili l'una nell'altra con operazioni di un gruppo ∞^3 simile a quello delle projettività binarie (e contenuto nel gruppo complessivo di tutte le trasformazioni projettive della stessa superficie in sè medesima) ».

Matematica. — *Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore.* Nota del dott. O. Niccoletti, presentata dal Socio Bianchi.

« Il sig. prof. Luigi Bianchi, nell'ultima sua Nota sull'estensione del metodo di Riemann [1], ha dato una formula notevole di calcolo integrale, colla quale ha esteso il metodo di Riemann all'equazione:

$$\Omega(u) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} + \sum_{i_1} a_{i_1} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}} + \cdots + a_{12\ldots n}\, u = \mathrm{F}(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

trattando per essa il problema delle *caratteristiche*, cioè della determinazione dell'integrale, quando ne siano assegnati i valori (in modo compatibile) su n iperpiani paralleli agli iperpiani coordinati dell' S_n, di cui $x_1, x_2 \ldots x_n$ sono le coordinate cartesiane ortogonali. Ma per l'equazione antecedente, affatto analogamente che per le equazioni del 2° ordine del tipo iperbolico, ci si può proporre un altro problema, quello della determinazione dell'integrale, quando siano dati i valori suoi e di $n-1$ sue derivate sopra una ipersuperficie di S_n, le cui proiezioni sugli iperpiani coordinati corrispondano biunivocamente (almeno nel campo che si considera) all'ipersuperficie stessa. Questo secondo problema, per la cui risoluzione bastano in fondo le formule del prof. Bianchi, è trattato nella presente Nota.

« 1. In tutto ciò che segue usiamo, finchè non si dica esplicitamente, le medesime indicazioni della Nota citata del prof. Bianchi. Osserviamo, posto ciò, la formula di derivazione

$$\text{(I)} \quad v \frac{\partial^r u}{\partial x_1 \ldots \partial x_r} - \sum_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(v \frac{\partial^{r-1} u}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}} \right) + \sum_{i_1 i_2} \frac{\partial}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \left(v \frac{\partial^{r-2} u}{\partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_r}} \right) +$$

$$+ \cdots + (-1)^s \sum_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} \left(v \frac{\partial^{r-s} u}{\partial x_{i_{s+1}} \ldots \partial x_{i_r}} \right) + \cdots + (-1)^r \frac{\partial^r (vu)}{\partial x_1 \ldots \partial x_r} =$$

$$= (-1)^r u \frac{\partial^r v}{\partial x_1 \ldots \partial x_r}$$

la quale, applicata ripetutamente, ci darà la risoluzione del nostro problema.

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei del 3 Marzo 1895. In seguito questa Nota sarà indicata colla lettera B.

« Per dimostrare la (I) si osservi che essa è vera per $r=1,2\ldots$; basterà quindi procedere per induzione e, suppostala vera fino ad un certo numero r, dimostrarla per $r+1$. Si sostituisca perciò nella (I) ad u, $\frac{\partial u}{\partial x_{r+1}}$ e nella formula che così si ottiene si osservi che

$$(-1)^r \frac{\partial u}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial^r v}{\partial x_1 \cdots \partial x_r} = (-1)^{r+1} u \frac{\partial^{r+1} v}{\partial x_1 \cdots \partial x_r \partial x_{r+1}} + \\ + (-1)^r \frac{\partial}{\partial x_{r+1}} \left(u \frac{\partial^r v}{\partial x_1 \cdots \partial x_r} \right)$$

e a quest'ultimo termine si applichi di nuovo la (I): si ha allora la formula stessa, cambiato r in $r+1$. La formula è così dimostrata in generale.

« 2. Consideriamo ora l'espressione differenziale lineare

$$(1)\quad \Omega(u) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} + \sum_{i_1} a_{i_1} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}} + \cdots + \sum_{i_1 \ldots i_s} a_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial^{n-s} u}{\partial x_{i_{s+1}} \cdots \partial x_{i_n}} + \cdots \\ + \cdots + a_{12\ldots n} u$$

e le sue componenti dei diversi ordini (B, pag. 135)

$$\Omega_{i_1 i_2 \ldots i_r}.$$

« Definiamo quindi (un po' diversamente dal prof. Bianchi) l'espressione aggiunta della $\Omega(u)$

$$(2)\qquad \Phi(v) = (-1)^n \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} + (-1)^{n-1} \sum_{i_1} \frac{\partial^{n-1}(a_{i_1} v)}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}} + \cdots + \\ + (-1)^{n-s} \sum_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial^{n-s}(a_{i_1 \ldots i_s} v)}{\partial x_{i_{s+1}} \ldots \partial x_{i_n}} + \cdots + a_{12\ldots n} v$$

e le sue componenti

$$\Phi_{i_1 i_2 \ldots i_r}.$$

Sarà allora $(-1)^r \Phi_{i_1 \ldots i_r}$ l'espressione aggiunta di $\Omega_{i_1 i_2 \ldots i_r}$

« 3. Vogliasi ora l'integrale regolare u della equazione $\Omega(u) = 0$, quando lungo un'ipersuperficie σ, che soddisfi alle condizioni enunciate in principio, siano assegnati i valori della funzione u, di una delle sue derivate prime, di una delle sue derivate seconde, ..., di una delle sue derivate di ordine $n-1$. Limitandoci a quella regione di S_n, per la quale ogni S_1 parallelo agli assi coordinati incontra effettivamente σ in un punto, sia A il punto di coordinate $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, dove si vuole calcolare l'integrale; $A_1, A_2 \ldots A_n$ i punti in cui gli S_1 condotti per A parallelamente agli assi coordinati $x_1, x_2 \ldots x_n$ incontrano σ; sia poi σ_{i_1} la varietà ad $n-2$ dimensioni intersezione dell'ipersuperficie σ coll'iperpiano $x_{i_1} = \alpha_{i_1}$, e in generale sia $\sigma_{i_1 \ldots i_s}$ la va-

rietà ad $n-s-1$ dimensioni, in cui l' $S_{n-s}\,(x_{i_1}=\alpha_{i_1}\,,\,x_{i_2}=\alpha_{i_2}\,,\dots\,x_{i_s}=\alpha_{i_s})$ sega l'ipersuperficie σ.

« Indicando allora con v la soluzione *principale* della $\Phi(v)=0$, relativa al punto A, (B, pag. 138), formiamo l'espressione

$$v\Omega(u)=v\Omega(u)-u\Phi(v)\,.$$

« Applicando la (I) a ciascun termine

$$a_{i_1 i_2 \dots i_r}\, v\, \frac{\partial^{n-r} u}{\partial x_{i_{r+1}} \dots \partial x_{i_n}} - (-1)^{n-r}\, u\, \frac{\partial^{n-r}(a_{i_1\dots i_2})v}{\partial x_{i_{r+1}}\dots \partial x_{i_n}}$$

avremo

$$(3)\qquad v\,\Omega(u)=\sum_{i_1}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(v\Omega_{i_1}(u))-\sum_{i_1 i_2}\frac{\partial^2}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(v\Omega_{i_1 i_2}(u))+\cdots+$$

$$+(-1)^{s-1}\sum_{i_1\dots i_s}\frac{\partial^s}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_s}}(v\Omega_{i_1\dots i_s}(u))+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\partial^n(v\Omega_{1\dots n}(u))}{\partial x_1\,\partial x_2\dots\partial x_n}=$$

$$=\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}$$

dove

$$(4)\ X_{i_1}=v\Omega_{i_1}(u)-\tfrac{1}{2}\sum_{i_2}{}'\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(v\Omega_{i_1 i_2}(u))+\tfrac{1}{3}\sum_{i_2 i_3}{}'\frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}}(v\Omega_{i_1 i_2 i_3}(u))+\cdots+$$

$$+(-1)^{s-1}\frac{1}{s}\sum_{i_2\dots i_s}{}'\frac{\partial^{s-1}}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_s}}(v\Omega_{i_1 i_2\dots i_s}(u))+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{\partial^{n-1}(v\Omega_{i_1 i_2\dots i_n}(u))}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}}$$

indicando col simbolo $\sum\limits_{i_2\dots i_s}{}'$ che nella somma corrispondente deve essere omesso l'indice i_1.

« Quindi, se u è una soluzione della $\Omega(u)=0$, per una formula nota [1] si avrà:

$$\int_\Sigma (X_1\cos(\nu x_1)+X_2\cos(\nu x_2)+\cdots+X_n\cos(\nu x_n))\,d\Sigma=0$$

indicando con Σ il campo ad $(n-1)$ dimensioni che limita l' $(n+1)$edro S a base curva, i cui vertici sono i punti $A\,,A_1\dots A_n$, con ν la normale a Σ diretta verso l'interno di S, con (νx_i) l'angolo della direzione ν colla direzione positiva dell'asse x_i. Supponendo allora, per fissare le idee, che l' $(n+1)$edro S abbia il suo interno dalla parte positiva di tutti gli iperpiani coordinati, la formula antecedente diviene:

[1] Beltrami, *Sulla teoria generale dei parametri differenziali*. Bologna 1869, pag. 31.

$$\sum_{i_1}\int\int\cdots\int X_{i_1}\,dx_{i_2}...dx_{i_n}+\int_\sigma \{X_1\cos(\nu x_1)+\cdots+X_n\cos(\nu x_n)\}\,d\sigma=0$$

nella quale ciascun integrale del 1° termine va esteso al campo ad $n-1$ dimensioni, che sull'iperpiano $x_{i_1}=\alpha_{i_1}$ viene limitato dagli altri iperpiani e dall' ipersuperficie σ, e nel secondo termine $d\sigma$ indica l'elemento di spazio dell' ipersuperficie σ.

« Ma, poichè nell' iperpiano $x_{i_1}=\alpha_{i_1}$ la v soddisfa all' equazione $-\Phi_{i_1}(v)=0$ (aggiunta della $\Omega_{i_1}(u)=0$), in questo iperpiano sarà

$$v\Omega_{i_1}(u)=v\Omega_{i_1}(u)+u\Phi_{i_1}(v)=\sum_{i_2}{}'\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(v\Omega_{i_1i_2}(u))-\sum_{i_2i_3}{}'\frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}}(v\Omega_{i_1i_2i_3}(u))+$$

$$+\cdots+(-1)^{s-2}\sum_{i_2\ldots i_s}{}'\frac{\partial^{s-1}}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_s}}(v\Omega_{i_1i_2\ldots i_s}(u))+$$

$$+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_n}}(v\Omega_{i_1i_2\ldots i_n}(u))$$

e quindi

$$X_{i_1}=\frac{1}{2}\sum_{i_2}{}'\frac{\partial X_{i_1i_2}}{\partial x_{i_2}}$$

dove, con notazioni analoghe alle antecedenti,

$$X_{i_1i_2}=v\Omega_{i_1i_2}(u)-\frac{2}{3}\sum_{i_3}{}'\frac{\partial}{\partial x_{i_3}}(v\Omega_{i_1i_2i_3}(u))+\cdots+$$

$$+(-1)^{s-2}\frac{2}{s}\sum_{i_3\ldots i_s}{}'\frac{\partial^{s-2}}{\partial x_{i_3}\cdots\partial x_{i_s}}(v\Omega_{i_1\ldots i_s}(u))+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{2}{n}\frac{\partial^{n-2}(v\Omega_{i_1\ldots i_n}(u))}{\partial x_{i_3}\cdots\partial x_{i_n}}$$

e quindi

$$\sum_{i_1i_2}\int\int\cdots\int X_{i_1i_2}\,dx_{i_3}...dx_{i_n}+\frac{1}{2}\sum_{i_1}\int_{\sigma_{i_1}}\Big\{\sum_{i_2}{}'X_{i_1i_2}\cos(\nu_{i_1}x_{i_2})\Big\}d\sigma_{i_1}-$$

$$-\int_\sigma\Big\{\sum_{i_1}X_{i_1}\cos(\nu x_{i_1})\Big\}\,d\sigma=0$$

essendo ν_{i_1} la normale a σ_{i_1} nell'iperpiano $x_{i_1}=\alpha_{i_1}$ diretta verso l'interno del campo ad $n-1$ dimensioni già menzionato e $d\sigma_{i_1}$ l'elemento di spazio della varietà σ_{i_1}.

« Affatto analogamente sarà in generale

$$(5)\qquad \int_\sigma \Big\{\sum_{i_1} X_{i_1}\cos(\nu x_{i_1})\Big\} d\sigma_{i_1} - \frac{1}{2}\sum_{i_1}\int_{\sigma_{i_1}}\Big\{\sum_{i_2}{}' X_{i_1 i_2}\cos(\nu_{i_1} x_{i_2})\Big\} d\sigma_{i_1} +$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{i_1 i_2}\int_{\sigma_{i_1 i_2}}\Big\{\sum_{i_3}{}' X_{i_1 i_2 i_3}\cos(\nu_{i_1 i_2} x_{i_3})\Big\} d\sigma_{i_1 i_2} + \cdots +$$

$$+(-1)^{s-1}\frac{1}{s}\sum_{i_1\ldots i_{s-1}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}}}\Big\{\sum_{i_s}{}' X_{i_1\ldots i_{s-1} i_s}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{s-1}} x_{i_s})\Big\} d\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}} +$$

$$+(-1)^{s-1}\sum_{i_1\ldots i_s}\int\int\cdots\int X_{i_1\ldots i_s}\, dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n} = 0$$

dove gli ultimi integrali sono estesi al campo ad $n-s$ dimensioni che sull' $S_{n-s}(x_{i_1}=\alpha_{i_1}\ldots x_{i_s}=\alpha_{i_s})$ viene limitato dagli altri iperpiani e dalla varietà $\sigma_{i_1\ldots i_s}$ e dove

$$(6)\qquad X_{i_1 i_2\ldots i_s} = v\Omega_{i_1 i_2\ldots i_s}(u) - \frac{s}{s+1}\sum_{i_{s+1}}{}'\frac{\partial}{\partial x_{i_{s+1}}}(v\Omega_{i_1\ldots i_{s+1}}(u)) + \cdots +$$

$$+(-1)^{n-s}\frac{s}{n}\frac{\partial^{n-s}}{\partial x_{i_{s+1}}\cdots\partial x_{i_n}}(v\Omega_{i_1\ldots i_n}(u)).$$

« Per dimostrare le due formole (5) e (6), basterà osservare che esse sono vere per $s=1$, $s=2$ e quindi, ricordando che lungo l' $S_{n-s}(x_{i_1}=$ $=\alpha_{i_1}\ldots x_{i_s}=\alpha_{i_s})$ la v soddisfa alla equazione $(-1)^s\Phi_{i_1 i_2\ldots i_s}(v)=0$, trasformare le $X_{i_1\ldots i_s}$ in una somma di $n-s$ derivate rapporto ad $x_{i_{s+1}}\ldots x_{i_n}$. Applicando allora di nuovo la formula del Beltrami, si ottengono la (5) e la (6), cambiatovi s in $s+1$.

« Facendo in particolare $s=n-1$, avremo per la (5)

$$\int_\sigma \Big\{\sum_{i_1} X_{i_1}\cos(\nu x_{i_1})\Big\} d\sigma - \frac{1}{2}\sum_{i_1}\int_{\sigma_{i_1}}\Big\{\sum_{i_2}{}' X_{i_1 i_2}\cos(\nu_{i_1} x_{i_2})\Big\} d\sigma_{i_1} + \cdots +$$

$$+(-1)^{s-1}\frac{1}{s}\sum_{i_1\ldots i_{s-1}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}}}\Big\{\sum_{i_s}{}' X_{i_1 i_2\ldots i_s}\cos(\nu_{i_1 i_2\ldots i_{s-1}} x_{i_s})\Big\} d\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}} + \cdots +$$

$$+(-1)^{-2}\frac{1}{n-1}\sum_{i_1\ldots i_{n-2}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{n-2}}}\left\{\sum_{i_{n-1}}{}' X_{i_1\ldots i_{n-1}}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{n-2}}x_{i_{n-1}})\right\}d\sigma_{i_1\ldots i_{n-2}}+$$

$$+(-1)^{n-2}\sum_{i_1\ldots i_{n-1}}\int X_{i_1\ldots i_{n-1}}\,dx_{i_n}=0$$

dove, per la (6):

$$X_{i_1\ldots i_{n-1}}=v\Omega_{i_1\ldots i_{n-1}}(u)-\frac{n-1}{n}\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}(v\Omega_{i_1\ldots i_n}(u))=v\left(\frac{\partial u}{\partial x_{i_n}}-a_{i_n}u\right)-$$

$$-\frac{n-1}{n}\frac{\partial(uv)}{\partial x_{i_n}}=\frac{1}{n}\frac{\partial(uv)}{\partial x_{i_n}}.$$

E poichè gli ultimi integrali vanno estesi lungo degli S_1 da A_{i_n} ad A, avremo:

$$\int X_{i_1\ldots i_{n-1}}\,dx_{i_n}=\frac{1}{n}u_A-\frac{1}{n}(uv)_{A_{i_n}}$$

e si avrà quindi finalmente la formula:

$$(7)\quad \begin{aligned}u_A=&\frac{1}{n}\sum_i^n{}_1(uv)_{A_i}-\frac{1}{n-1}\sum_{i_1\ldots i_{n-2}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{n-2}}}\left\{\sum_{i_{n-1}}{}' X_{i_1\ldots i_{n-1}}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{n-2}}x_{i_{n-1}})\right\}d\sigma_{i_1\ldots i_{n-2}}+\\&+\frac{1}{n-2}\sum_{i_1\ldots i_{n-3}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{n-3}}}\left\{\sum_{i_{n-2}}{}' X_{i_1\ldots i_{n-2}}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{n-3}}x_{i_{n-2}})\right\}d\sigma_{i_1\ldots i_{n-3}}+\\&+\cdots+(-1)^{n-s}\frac{1}{s}\sum_{i_1\ldots i_{s-1}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}}}\left\{\sum_{i_s}{}' X_{i_1\ldots i_s}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{s-1}}x_{i_s})\right\}d\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}}+\cdots\\&+(-1)^{n-1}\int_\sigma\left\{\sum_{i_1}X_{i_1}\cos(\nu x_{i_1})\right\}d\sigma\end{aligned}$$

che è la formula cercata. Per essa il valore dell'integrale nel punto A è dato dalla media del prodotto (uv) nei punti $A_1\ldots A_n$; da $\frac{n(n-1)}{2}$ integrali

curvilinei, da $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ integrali di superficie,.... da $\frac{n(n-1)...(n-s+1)}{1.2...s}$ integrali estesi a varietà ad $s-1$ dimensioni,.... da un integrale esteso ad un'ipersuperficie. Dalla (7) risulta anche l'unicità dell'integrale, che soddisfa alle condizioni iniziali assegnate.

« Qualora l'equazione data non fosse omogenea, ma avesse invece la forma

$$\Omega(u) = \mathrm{F}(x_1...x_n)$$

basterebbe aggiungere al 2° membro della (7) l'integrale nplo

$$(-1)^{n}\int\int....\int v\,\mathrm{F}(x_1...x_n)\,dx_1...dx_n$$

esteso all' $(n+1)$edro S.

« In modo affatto analogo si risolve il medesimo problema pei sistemi di più equazioni della stessa forma (B. pag. 139) (1).

« 4. Non sarà inutile, io credo, far vedere la relazione intima che lega la formula (I) di derivazione del n.° 1, colla formola (I) d'integrazione della Nota citata del prof. Bianchi.

« Si pensino perciò nella formula del Bianchi le quantità $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_r$, non più costanti, ma variabili, e si indichino con $x_1 \ldots x_r$. Derivando allora r volte la formula del Bianchi rispetto ad $x_1 \ldots x_r$, si ha la (I) del n.° 1.

« Reciprocamente, si moltiplichino tutti i termini della (I) del n.° 1 per $dx_1 \ldots dx_r$, e si integri da α_1 a β_1 rispetto ad $x_1, \ldots$; da α_r a β_r rispetto ad x_r. Ricordando allora che l'integrale

$$\int_{a_1}^{b_1}....\int_{a_s}^{b_s} \frac{\partial^s z}{\partial x_1 \ldots \partial x_s}\, dx_1 \ldots dx_s$$

dove z è una funzione di $x_1 \ldots x_s$, le a e le b quantità costanti, è uguale ad un aggregato di 2^s termini, che sono i valori di z nei vertici del parallelepipedo ad s dimensioni, a cui è estesa l'integrazione, presi positivamente o negativamente, secondochè il numero delle coordinate del vertice uguali alle a è pari o dispari, su ciascun integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}....\int_{\alpha_r}^{\beta_r} \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} \left(v\, \frac{\partial^{r-s} u}{\partial x_{i_{s+1}} \ldots \partial x_{i_r}} \right) dx_1 \ldots dx_r$$

(1) Colgo l'occasione per rettificare un lieve errore sfuggitomi nella nota: « *Su un sistema di equazioni a derivate parziali del 2° ordine* » inserita in questi Rendiconti del 3 Marzo 1895. Ivi è detto che il sistema (15) è aggiunto di sè stesso: mentre invece il sistema aggiunto del (15) è

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\, \partial y} = \sum_k c_{ki}\, u_k$$

il quale però ha la stessa natura del sistema (15) stesso e non ne differisce che per le indicazioni.

si eseguisca prima l'integrazione rispetto ad $x_{i_1} \dots x_{i_s}$: quindi a ciascuna delle funzioni che compariscono sotto il segno dei 2^s integrali così ottenuti, tranne a quello

$$(-1)^s \int_{\alpha_{i_{s+1}}}^{\beta_{i_{s+1}}} \cdots \int_{\alpha_{i_r}}^{\beta_{i_r}} \left(v \frac{\partial^{r-s} u}{\partial x_{i_{s+1}} \dots \partial x_{i_r}} \right)_{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_s}} dx_{i_{s+1}} \dots dx_{i_r}$$

si applichi di nuovo la (I). Eseguendo successivamente queste trasformazioni per $s = 1, 2 \dots r$, dopo le riduzioni necessarie, si ottiene la formola (I) del Bianchi. Le due formule sono dunque perfettamente equivalenti ».

Astronomia. — *Fotografie della grande nebulosa di Orione e della minore presso la stella* 42 Orionis, *eseguite da A. Riccò e da A. Mascari nel R. Osservatorio di Catania.* Nota del prof. A. Riccò, presentata dal Socio Tacchini.

« Nel marzo 1893 si fecero nell'Osservatorio di Catania le prime fotografie della nebulosa d'Orione con esposizione fino di un'ora, che riuscirono abbastanza interessanti: ma allora il nostro equatoriale fotografico non era idoneo ad agire per pose molto più lunghe, seguendo esattamente il corso degli astri anche nelle posizioni molto lontane dal meridiano, nelle quali le difficoltà dell'equilibrio e del maneggio dello strumento, e l'influenza perturbatrice della rifrazione atmosferica sono più gravi.

« All'equatoriale fotografico, quantunque costruito con molta abilità ed intelligenza dall'ing. A. Salmoiraghi di Milano, sono occorsi parecchi miglioramenti e modificazioni: il che non deve far caso se si pensa che questo strumento è uno dei primi grandi equatoriali costruiti in Italia, ed è anzi l'unico per la fotografia celeste, per la quale la complicazione della costruzione e le esigenze di precisione sono ancora maggiori.

« Anche il grande obbiettivo fotografico di $0^m,328$ di apertura libera, sebbene costruito dalla rinomata casa Steinheil di Monaco e dichiarato da autorità competentissima perfetto come quello dell'osservatorio di Potsdam per l'uso ordinario, invece per le pose lunghissime dava le stelle lucide accompagnate da una immagine parassita, che siamo riusciti ad eliminare completamente solo dopo lunghe indagini e scabrose prove, modificando la distanza reciproca dei vetri flint e crown costituenti l'obbiettivo in discorso.

« Perfezionato lo strumento siamo giunti a fare una fotografia della nebulosa d'Orione di $4^h,8^m$ di posa, che non ci pare inferiore alle migliori fatte altrove anche con strumenti maggiori od esposizione più lunga. Anzi, per quanto ci consta, la fotografia della nebulosa minore attorno *42 Orionis* sarebbe superiore a quelle fatte finora.

« La serie delle nostre fotografie di questi oggetti celesti è la seguente,

ove sono ommesse alcune riuscite colle stelle difettose in causa di una abbondante deposizione di rugiada sull'obbiettivo durante la lunga esposizione: inconveniente che abbiamo poi evitato, riparando l'obbiettivo stesso dalla irradiazione notturna con un tubo addizionale postovi dinanzi.

Numero progressivo	DATA	Tempo di posa	Estensione della Grande Nebulosa fra	
			le ali	la testa e la coda
1	7 Febbraio 1894	10^m	7'.0	
2	15 Gennaio 1895	30^m	19. 0	la testa è completamente distaccata dalle ali.
3	25 Marzo 1894	$39^m,5$	12. 0	
4	20 Marzo 1893	50^m	19. 5	
5	9 Febbraio 1894	50^m	19. 5	
6	7 Febbraio 1894	$1^h\ 13^m$	21. 5	
7	27 Marzo 1895	$1^h\ 39^m$	29. 5	26'.0
8	29 Marzo 1895	$1^h\ 39^m$	27. 0	26. 0
9	19 Marzo 1895	$2^h\ 37^m$	36. 5	31. 0
10	24 Gennaio 1895	$3^h\ 3^m$	31. 5	29. 0
11	14 Febbraio 1895	$3^h\ 14^m$	33. 0	33. 0
12	21 Gennaio 1895	$3^h\ 36^m$	39. 5	46. 3
13	25 Gennaio 1895	$4^h\ 8^m$	42. 3	49. 5
(*)14	30 Gennaio 1885	$4^h\ 42^m$	50. 0	55. 0

« Queste fotografie, come tutte quelle della *carta fotografica internazionale del cielo*, sono nella scala di 1 millimetro per 1 minuto d'arco.

« Di alcune di queste negative si è fatto l'ingrandimento positivo su carta al bromuro d'argento con sistemi diversi, ed abbiamo finito per adottare un apparato combinato da noi medesimi, formato di due camere fotografiche, l'una ordinaria 13×18, alla quale abbiamo adattato un eccellente obbiettivo Voigtländer di $0^m,058$ apertura e $0^m,20$ lunghezza focale, munito di diaframma di soli 9 millimetri; al luogo del vetro smerigliato si applica la negativa da ingrandire. L'altra camera 30×30, è quella che ordinariamente ci serve per le fotografie delle nubi: è messa in faccia alla prima, ed è congiunta ad essa con una manica a mantice; e al luogo del suo obbiettivo si è posto un otturatore pneumatico. Tutto l'apparato è sostenuto da un robusto piede di bronzo che permette di rivolgerlo ad una parte del cielo ben azzurra, ordinariamente a nord.

(*) Nella fotografia n°. 14 le stelle sono difettose per un piccolo spostamento dello strumento, da noi non avvertito.

« L'ingrandimento che abbiamo preferito per i nostri confronti e studî è nel rapporto 1:2, che dà quindi i positivi nella scala di 2 millimetri per 1 minuto d'arco; che è la scala adottata anche dal Tempel nelle pubblicazioni dei suoi disegni delle nebulose in discorso.

« Le fotografie ingrandite che si presentano sono le seguenti:

1.	del	7 febbraio 1894	con posa di	10	minuti
	»	15 gennaio 1895	»	30	»
	»	7 febbraio 1894	»	73	»
2.	»	27 marzo 1895	»	99	»
3.	»	25 gennaio 1895	»	248	»

« Occupandoci intanto della grande nebulosa, dall'esame di queste fotografie si vede che al crescere del tempo di esposizione da alcuni minuti ad alcune ore, l'immagine che prima è formata solo dalla parte centrale e più lucida della nebulosa (*Frons*, *Rostrum*, *Occiput*, *Regio Picardiana*, *Proboscis major*, ecc., secondo Herschel), si va di mano in mano allargando alle parti esterne non luminose, ove appaiono nuove masse e nuovi particolari: nello stesso tempo si nota che mentre colle pose minori si ottengono abbastanza distinte le stelle contenute nella nebulosità (gruppo del *trapezio*, ecc.) ed altre particolarità di questa, colle pose più lunghe la parte centrale tende a divenire uniforme, senza gradazioni di intensità e distinzione di parti.

« In altri termini, mentre colle più lunghe esposizioni nell'immagine rovesciata si scorge come l'abbozzo di una specie di volatile ad ali spiegate e rialzate le cui punte o remiganti si prolungano e si congiungono indietro con piume leggere ed irregolari a festone, con pose successivamente più brevi la testa si stacca dal corpo, questo si restringe alla parte centrale, l'ala destra scompare, la sinistra che era doppia si fa semplice e svanisce pur essa: nel corpo appaiono ognora più distinte diverse stelle ed il *seno* oscuro che lo intacca sempre più.

« Della fotografia colla posa $4^h,8^m$ si è fatto anche l'ingrandimento nel rapporto ::1:3,4.

« Confrontando questa fotografia colle migliori che conosciamo, e cominciando da quella della Specola Vaticana, fatte con 9^h di posa ed obbiettivo di eguale apertura (se si giudica dalla riproduzione in fotoincisione che trovasi nelle *Pubblicazioni della Specola Vaticana*, vol. IV), risulta la nostra alquanto più netta e completa: confrontata con quella del Roberts fatta con $3^h,25^m$ di posa e telescopio di $0^m,50$ apertura, cioè con circa il doppio di quantità di luce ($\text{Diam.}^2 \times \text{Posa}$), la nostra non è sensibilmente inferiore, anzi in complesso apparisce più distinta, se pur non c'illude l'affetto per le cose nostre.

« Passando poi a considerare la nebulosità complicata ed interessantissima che circonda *42 Orionis*, vediamo che comincia ad apparir nelle foto-

grafie con posa di circa 1^h; è completa con posa di circa $2^h \frac{1}{2}$; è assai bella ed estesa colle pose maggiori fin circa $4^h \frac{1}{2}$. È formata di 3 a 4 masse lucide di varie forme, separate da un canale oscuro, ramificato in forma di $\rtimes$: a sud vi si osserva una specie di bocca oscura; una strana rete di filamenti lucidi collega le stelle nebulose e le masse lucide.

« Le nostre fotografie di questa nebulosa sono decisamente superiori alle citate prima.

« Confrontando la fotografia coi migliori disegni della grande nebulosa, come quello di Lord Rosse e quello di Tempel (di cui ho avuto alcune copie fotografiche per cortesia del direttore dell'osservatorio d'Arcetri, prof. A. Abetti), si trovano grandi differenze, le quali in gran parte dipendono dal diverso modo d'agire della luce nell'occhio e nella fotografia: nell'occhio l'azione della luce si ripete sempre nello stesso modo, e la visione risulta diversa solo per la diversità delle condizioni dell'occhio stesso, cioè di riposo o di stanchezza di esercizio o di inesperienza; le parti più difficili di un oggetto si scoprono concentrando ripetutamente su di esse la nostra attenzione, cercando condizioni più favorevoli per la visione e sussidii sempre più adeguati e perfetti.

« Invece nella fotografia le azioni della luce nei successivi istanti dell'esposizione si sommano, si sovrappongono: l'immagine cambia continuamente estendendosi, e rinforzandosi fino al limite dell'alterazione dello strato sensibile; di qui deriva la possibilità di ottenere la fotografia di oggetti invisibili: ma ne deriva pure una modificazione dei rapporti di intensità luminosa delle parti e la scomparsa dei particolari più lucidi.

« D'altra parte la grande difficoltà di ritrarre oggetti delicatissimi, di forme strane e complicate, e quel che è peggio la difficoltà di vedere le parti più deboli, fanno sì che il disegno raramente riesca affatto fedele, e può anche essere immaginario per quei particolari che l'osservatore può appena travedere senza poterne afferrare bene la forma, ed a cui pure vuole dare una rappresentazione grafica.

« Che sia proprio così emerge dal confronto dei disegni fatti dai più reputati osservatori, tra loro e colle fotografie. A ciò servono i disegni accuratissimi di Herschel (1824), Pond (1826), Lassel (1852), Holden (1859-65), Rosse (1860-67), Secchi (1868), Trouvelot (1874), Tempel (1878), Draper (1880).

« Non è certo il caso di pensare ad attribuire le differenze a variazioni della nebulosa, che dovrebbero essere tanto rapide da essere del tutto improbabili; mentre poi abbiamo una fotografia del Draper fatta nel 1880 identica alla nostra del 1893 e quella del Roberts fatta nel 1887 identica alla nostra del 1895.

« Quanto alla differenza fra disegno e fotografia si può notare quanto segue: nel disegno del Tempel, abilissimo osservatore e disegnatore, i limiti della nebulosa sono spinti oltre quelli della fotografia, ma in certi particolari è evidente il manierismo e convenzionalismo del disegnatore; ed

alcuni altri particolari non si riscontrano affatto nelle fotografie, come le lunghe e sottili lacinie nebulose che congiungerebbero la nebula presso *42 Orionis* colla principale; per converso poi la grande proboscide è semplice nel disegno, mentre è decisamente doppia anche nella fotografia di un'ora sola di posa.

« Il disegno di Lord Rosse (cortesemente comunicatoci dal prof. Tacchini) fatto col gigantesco telescopio di 2^m d'apertura, è quello che più si avvicina alle fotografie, ed anzi è più completo di esse in certi particolari e più esteso nelle parti più deboli, avendosi la larghezza da un estremo all'altro delle ali di 63′ e la lunghezza dalla testa alla coda di 60′: corrisponde specialmente alla fotografia n. 14 di $4^h,42^m$ di posa, anzi vi si osserva un arco debolissimo a SW in più, che nella fotografia. A nostro giudizio questo disegno è il più fedele ed il più completo di quelli che abbiamo compulsati.

« Nel finire diremo che abbiamo fatto alcune osservazioni della grande nebulosa d'Orione col riflettore di $0^m,34$ apertura nell'osservatorio di Catania, ed in quello dell'Etna nell'ottobre 1892, senza però farne uno studio speciale (perchè allora il vulcano era in eruzione). Lassù la nebulosa ha uno straordinario, meraviglioso splendore: si direbbe formata di una materia luminosa fosforescente in parte plastica, anzichè totalmente nebulosa; vi abbiamo distinto bene entro le *fauci* oscure, il *ponte di Schröter* e la *Nebula Minima* di Herschel: l'apertura delle ali, ossia la larghezza della nebulosa, si riconosceva facilmente fino per 44′ ».

Fisica. — *Sul magnetismo dei cilindri di ferro.* Nota di M. Ascoli, presentata dal Socio Blaserna.

« 1. In alcune note pubblicate durante lo scorso anno in questi Rendiconti [1] ho dimostrato che la distribuzione del magnetismo indotto nei cilindri di ferro dipende unicamente, come nell'ellissoide dal valore che in ogni punto ha la forza magnetizzante (f. m.) che risulta dal campo uniforme primitivo e dalla reazione del magnetismo libero indotto. Il sig. O. Grotrian invece, nella memoria da me citata [2] e in due successive [3], sostiene la necessità di introdurre, pei cilindri, una speciale azione protettrice degli strati superficiali (Schirmwirkung). Nella seconda memoria vuole dimostrare con esperienze dirette l'esistenza di tale azione, nell'ultima espone nuove ricerche sperimentali e conclude con quattro osservazioni sui miei lavori. Sebbene io creda che la risposta sia implicitamente ma chiaramente contenuta

(1) Rendiconti, vol. III, 1° sem., pag. 176, 279, 314; 377; 2° sem., pag. 157, 190.
(2) Wied. Ann. 1893, vol. L, pag. 705.
(3) Wied. Ann. 1894, vol. LI, pag. 529, e 1895, vol. LIV, pag. 452.

nei miei scritti, pure mi par necessario, per chiuder la discussione, di mettere in maggior rilievo i punti che ora più interessano, aggiungendo poi qualche considerazione sulle nuove esperienze pubblicate.

« 2. Al n. 1. (1) il sig. Grotrian ripete che gli strati esterni esercitano un'azione protettrice sugli interni o azione smagnetizzante. Se si intendesse per azione smagnetizzante quella dovuta al magnetismo libero che, come è noto sta quasi esclusivamente sulla superficie del ferro, la spiegazione del G. coinciderebbe colla mia; ma in tal caso nessun nuovo fatto sarebbe messo in rilievo da queste ricerche. L'osservazione n. 3 e le esperienze contenute nella 2ª Memoria dimostrano però che non è questa l'azione smagnetizzante che l'autore crede di mettere in evidenza. Alla 2ª Memoria ho già risposto con un breve articolo pubblicato negli Annali di Wiedemann nel fasc. di febbraio (2) cioè dopo che il sig. G. aveva consegnato al giornale la sua terza memoria; in questo articolo ho dimostrato che le esperienze in questione non provano l'azione protettrice di uno strato di ferro sopra un altro contiguo, ma quella ben nota di un involucro di ferro sopra l'aria contenutavi.

« 3. Al n. 2 dubita che le conclusioni, ottenute sopra fasci di fili, si possano estendere a corpi compatti. Ora nelle mie note (3) non ho mancato di citare un mio precedente lavoro (4) nel quale tale questione è accuratamente discussa. In questo studio, diretto appunto a mettere in rilievo le differenze magnetiche tra fasci di fili e corpi compatti, e riassunto in parte in una delle mie note, (5) ho fatto il confronto tra una serie di fasci cilindri di egual lunghezza e di diverso diametro (diverso numero di fili), ed una serie di cilindri compatti formati di un sol filo sempre dello stesso diametro ma di diverse lunghezze. Ne ho concluso che esistono delle differenze nel senso che i fasci si comportano come ferro leggermente incrudito. Ma nel tempo stesso è risultato, almeno per campi originariamente uniformi come sono tutti quelli delle ricerche in discusione, che le differenze sono molto piccole nei valori assoluti e quindi ancor minori nei valori relativi che interessano nelle ricerche di confronto. L'entità di tali differenze è del resto provata dai numeri citati nella mia 1ª Nota. (6)

« Ma oltre a ciò non ho mancato di notare nell'ultimo lavoro (7) il perfetto accordo esistente tra le mie esperienze sui fasci e i dati del Du Bois sui cilindri massicci.

(1) V. Wied. Ann. vol. LIV, pag. 474.
(2) Wied. Ann. vol. LIV, pag. 381.
(3) V. Rend. vol. III, 1° sem., pag. 177.
(4) L'Elettricista 1893, pag. 201.
(5) Da pag. 177 a pag. 182.
(6) Pag. 182, ultime linee.
(7) Ascoli e Lori, vol. III, 2° sem. pag. 194, 195.

« Come si vede io stesso mi ero fatto l'obbiezione che il sig. G. mi muove al n. 2, e l'avevo sottoposta a una minuta discussione che dev'esser sfuggita all'attenzione del sig. G.

« 4. Al n. 3 crede insufficiente la mia spiegazione perchè le parti centrali delle faccie estreme del cilindro (Stirnfläche) non danno che un debole contributo alla forza smagnetizzante. Riporto le mie parole in proposito [1]: *L'aggiunta della massa centrale, cioè l'aumento della massa metallica del corpo, ha per conseguenza un grande aumento del magnetismo libero e quindi della forza smagnetizzante da esso esercitata.* Come si vede, io non parlo di faccie estreme, ma solo di magnetismo libero; questo, come è noto, specie ne' magneti corti, è ben lungi dall'essere limitato alle faccie terminali, ma esiste anche sulla superficie cilindrica, ed è questo che porta maggior tributo alla reazione nella sezione media cui è più vicino. Anzi la deficienza del magnetismo libero al centro delle basi è tutta a mio favore, perchè il magnetismo libero mancante in quei punti deve esistere necessariamente sulla superficie laterale. Infatti, sia B l'induzione in un elemento d S della sezione centrale, il flusso totale che si misura attraverso questa sezione è $\int \mathrm{B}\, d\,\mathrm{S}$ esteso alla sezione stessa. Questo flusso è pressochè lo stesso per cilindri pieni o per tubi grossi o sottili dello stesso diametro esterno, e della stessa lunghezza, cioè, per una data corrente magnetizzante, potremo porre

$$\int \mathrm{B}\, d\,\mathrm{S} = \mathrm{K}$$

dove K è uguale per tutti quei cilindri.

« Tutto il flusso, attraversante la sezione centrale, attraversa anche la mezza superficie del corpo.

« Cioè avremo:

$$\int \mathrm{B}' \cos\varepsilon\, d\,\Sigma = \mathrm{K}$$

dove B′ è il valore dell'induzione in un punto della superficie, $d\,\Sigma$ un elemento di questa, ε l'angolo tra la normale a $d\,\Sigma$ e la direzione di B′; l'integrazione è estesa a tutta la mezza superficie. Ora $\mathrm{B}' = \mathrm{H}' + 4\pi\,\mathrm{I}'$; e molto approssimatamente $\mathrm{B}' = 4\pi\,\mathrm{I}'$; colla stessa approssimazione si più trascurare il magnetismo libero interno rispetto al superficiale [2]. Allora

$$4\pi \int \mathrm{I}' \cos\varepsilon\; d\,\Sigma = \mathrm{K}$$

(1) Vol. III, 1° sem., pag. 176 in fine.

(2) V. p. e. Du Bois. Magn. Kreise p. 89. Del resto il magn. libero interno aumenta la reazione.

ma I' $\cos\varepsilon$ è la densità superficiale del magn. libero, onde $\int I' \cos\varepsilon \, d\,\Sigma$ sarà la massa magnetica libera totale M, esistente alla superficie. Cioè

$$M = \frac{K}{4\,\pi}$$

Ciò significa che se, aggiungendo il nucleo interno al cilindro cavo, non si varia il flusso, non si varia nemmeno la massa libera e quindi quella che manca sulle faccie esterne deve esistere sulla superficie cilindrica. Perciò l'osservazione al n. 3 è tutta a mio favore.

« 5. Finalmente al n. 4 il G. nota l'accordo di alcuni dei miei risultati coi suoi, il disaccordo di altri. Io non so vedere altro disaccordo che quello riguardante i valori delle f. magnetizzanti, disaccordo che ho esplicitamente notato e discusso [1] e che è una delle prove della sufficienza della mia spiegazione. Io ho spiegato il disaccordo col considerare la forma della curva normale del ferro. Le mie f. m. sono comprese tra il 1^0 e il 2^0 tratto delle curva, dove la magnetizzazione è più sensibile alle variazioni delle maggiori f. m. che delle minori, quelle del G. sono comprese tra il 2^0 e il 3^0 dove avviene l'opposto. Una conferma di tale spiegazione à data dal comportamento di un cilindro più lungo, nel quale cioè alle stesse correnti magnetizzanti corrispondono f. m. vere maggiori; per questo cilindro le mie misure hanno lo stesso andamento di quelle del G., appunto perchè anche le mie f. m. giungono al 3^0 tratto della curva normale. Anche questa parte della discussione deve esser sfuggita all'attenzione del sign. Grotrian. Del resto che piccole differenze tra cilindri compatti e fasci esistano, è ben naturale e l'ho constatato; ma sono dell'ordine di quelle ricordate al § 3.

« 6. Passo a esaminare brevemente le nuove esperienze del sign. Grotrian. Non posso che rallegrarmi nel vedere nella prima serie pienamente confermata la mia previsione [2] che nei circuiti magnetici chiusi perfetti, scomparendo il magnetismo libero, scompare anche l'apparente *Schirmwirkung*. Infatti il G. trova che la magnetizzazione circolare di un tubo contenente una corrente magnetizzante secondo l'asse, cresce al crescer della sezione metallica, senza mostrare affatto *alcuna speciale predominanza della magnetizzazione circolare delle parti vicine alla superficie interna del cilindro*. Ecco dunque un nuovo caso in cui manca l'azione protettrice (insieme al magnetismo libero). È naturale anche che, come risulta da questa serie di esperienze, non vi sia proporzionalità tra il flusso e la sezione, perchè la f. m. media è minore, a parità di corrente, pel tubo più grosso che pel più sottile, e inoltre, nei limiti delle piccole forze magnetizzanti esaminate, la per-

(1) § 16. pag. 382.
(2) § 6. pag. 284, § 8, pag. 314.

meabilità è variabilissima; ciò spiega anche il variare dei rapporti tra i flussi dei due tubi al variare della corrente. Sarebbe stato desiderabile che le esperienze fossero state condotte in modo da potersi sottoporre a calcolo.

« In una seconda serie di esperienze il sig. G. esamina il comportamento di una serie di cilindri cavi e pieni collocati in modo da formar parte di un circuito magnetico chiuso. Sono lieto che anche questa serie confermi le mie previsioni. Infatti in una delle mie Note (1) ho dimostrato che l'uguaglianza approssimata del flusso in un cilindro cavo e uno pieno va diminuendo coll'aumentar della lunghezza (col che diminuisce la reazione), ed ho asserito che lo stesso effetto si otterrebbe chiudendo il circuito magnetico. Le ultime esperienze del G. sono la prova sperimentale dell'essattezza della mia asserzione. Infatti tra il tubo n 2 (spessore della parete D = mm. 2,87) e il cilindro n. 3 (diametro cm. 3,31), a circuito aperto vi è una differenza del 2, 6 p. c. (2) a circuito chiuso da 20 a 27 p. c. (3) tra il tubo n. 1 (D = 0, 80) e il cilindro 3 a circuito aperto la differenza è del 7. 5 p, c., a circuito chiuso di oltre il 50 p. c. Che il flusso non cresca nella proporzione delle sezioni è conforme alla teoria dei circuiti magnetici, perchè i tubi esaminati non sono che una piccola parte dell'intero circuito magnetico.

« Applicando questa teoria, il sig. Grotrian trova tra essa e le sue esperienze un disaccordo del 9. 7 e del 2. 9 p. c. Attribuendolo alla *Schirmwirkuny*, viene a riconoscere che l'effetto di questa è ridotto a ben piccole proporzioni. Ma chiunque abbia pratica nelle misure magnetiche, sa benissimo che, per le piccole f. m. adoperate dal G., le differenze che si trovano tra pezzi diversi, sien pur tratti dalla medesima massa di ferro, possono superare di gran lunga quelle proporzioni, giungendo al 20 e al 30 p. c. e più. Per questa ragione nelle mie ricerche ho trovato necessario di determinare con cura le correzioni di omogeneità (4). E che di questo appunto si tratti, si può arguire da ciò che, se il flusso misurato è uguale nei cilindri 5 e 3 del sig. G., vi sono tra i cilindri 5 e 17, e 2 e 5, differenze di oltre il 5 e il 28 p. c., sebbene minori sieno le differenze tra le sezioni.

« Queste nuove esperienze sono dunque, a parer mio, la miglior prova dell'inesistenza dell'azione protettrice degli strati superficiali, nè dubito che, nel proseguire le sue ricerche, il sig. Grotrian giungerà alla medesima conclusione, cui si è già portato tanto vicino.

(1) § 15, pag. 381, ultime linee.

(2) V. Wied. Ann., vol. LIV, pag. 467.

(3) Queste differenze sono calcolate in base alle somme dei due numeri trovati dal G. per l'apertura e la chiusura opposta, somme che sono uguali alle deviazioni ottenibili coll'inversione. La semidifferenza dei due numeri darebbe il magnetismo residuo, notevole sempre quando il circuito magn. è chiuso.

(4) V. Ascoli, *L'Elettricista* 1893, p. 201. — Ascoli e Lori, Rend. vol. III, 2° sem., pag. 160.

« E con ciò, per parte mia, ritengo chiusa la discussione.

« Aggiungo solamente che altre esperienze fatte per diverso scopo e che saranno pubblicate fra breve, conducono per via completamente diversa agli identici risultati già riferiti, sia per corpi compatti come per fasci di fili, senza bisogno di interrompere in alcun modo la continuità della sostanza di cui è formato il cilindro ».

Fisica. — *Formazione della cuprite nell'elettrolisi del solfato di rame*. Nota di Q. Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sopra gli alcaloidi della Cannabis indica e della Cannabis sativa* [1]. Nota del prof. F. Marino-Zuco e del dott. G. Vignolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

« Cannabis indica. La massa dei cloridrati ben secca ottenuta dalla *Cannabis indica*, nel modo descritto nella precedente Nota, si scioglie a caldo nella quantità minore possibile di alcool assoluto. Se la soluzione si lascia lentamente raffreddare, si ottengono dei cristalli piuttosto grandi e duri; se invece si distilla l'alcool fino a piccolo volume, si depongono dalla soluzione concentrata delle piccole fogliette bianchissime con splendore madreperlaceo. I cristalli ottenuti si spremono e si lavano con piccole quantità di alcool assoluto alla pompa e quindi si ricristallizzano dall'alcool assoluto. Questo cloridrato è solubilissimo nell'acqua fredda, poco nell'alcool assoluto freddo. Fonde a 249° in un liquido giallognolo con decomposizione: non contiene acqua di cristallizzazione. All'analisi si ebbero i risultati seguenti:

I gr. 0,1775 di cloridrato diedero di Aq. gr. 0,0803 e di CO^2 gr. 0,3215
II gr. 0,1886 " " di Aq. gr. 0,0873 e di CO^2 gr. 0,3411
I gr. 0,1151 " " di Az. cc. 8,3, T 23,2° e H. 763 mm.
I gr. 0,1118 " hanno consumato di nitrato d'argento $\frac{N}{10}$ c.c. 6.3

	trovato % I	trovato % II	media	calcolato % per $C^7H^7NO^2.HCl$ (Trigonellina)	
C	49.39	49.32	49.35	C	48.41
H	5.02	5.14	5.08	H	4.61
N	8.10		8.10	N	8.06
Cl	20.00		20.00	Cl	20.46

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Farmaceutica e Tossicologia della Regia Università di Genova.

« A riconferma della composizione del cloridrato, che, come dimostra l'analisi, non si trova ancora allo stato di perfetta purezza, sebbene la formola sia il risultato del calcolato più semplice, una porzione del cloridrato precedentemente analizzato venne trasformato in cloroaurato e questo, seguendo le indicazioni di Jahns nello studio sulla: *Trigonella foenum graecum* (1), cristallizzato dall'acido cloridrico diluito. Il cloroaurato si presenta al microscopio in fogliette a quattro lati: non contiene acqua di cristallizzazione; fonde a 198°, mentre per il cloroaurato purissimo di Trigonellina, Jahns otteneva per punto di fusione: 198°. L'analisi di questo cloroaurato puro ha dato:

gr. 0,1340 di cloroaurato diedero di Au gr. 0,0552

trovato °/o		calcolato per $C^7H^7NO^2 . HCl . AuCl^3$	
Au	41.19	Au	41.20

« Le acque madri alcooliche dalle quali venne separato il cloridrato di Trigonellina, si concentrano a bagno maria e sul residuo si procede a frazionamenti ripetuti impiegando, separatamente, il cloruro mercurico, il cloruro d'oro e l'alcool assoluto.

« Nel processo di frazionamento col sublimato corrosivo il residuo delle acque madri alcooliche si precipita con soluzione satura di cloruro mercurico. Il cloromercurato ottenuto si purifica per cristallizzazioni ripetute dall'acqua bollente, si decompone poi con idrogeno solforato e così si ottiene un cloridrato, il quale si presenta ben cristallizzato ed incoloro: è però deliquescentissimo: all'analisi ha dato i seguenti risultati:

I gr. 0,2788 di cloridrato diedero di Aq. gr. 0,2595, di CO^2 gr. 0,4458
II gr. 0,2862 " " di Aq. gr. 0,2628, di CO^2 gr. 0,4616
II gr. 0,3344 " " di cloruro d'argento gr. 0,3414

	trovato °/o		media	calcolato °/o per $C^5H^{14}NOCl$ (Colina)	
	I	II			
C	43.60	43.98	43.79	C	43.01
H	10.30	10.20	10.25	H	10.03
Cl		25.23	25.23	Cl	25.44

« Per frazionamento della parte più solubile del cloromercurato si ottiene un cloridrato anch'esso cristallino e deliquescentissimo, il quale ha dato all'analisi i seguenti risultati:

gr. 0,2647 di cloridrato diedero di Aq. gr. 0,2022 e di CO^2 gr. 0,3916

trovato °/o		calcolato °/o per $C^5H^{14}NO^2Cl$ (Muscarina)	
C	40.35	C	38.58
H	8.45	H	9.00

(1) Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft. Vol. XVIII, pag. 2521.

« In un'altra estrazione le acque madri alcooliche da cui fu separata la Trigonellina furono svaporate a secchezza, e il residuo lasciato per 5 a 6 giorni nel vuoto sull'acido solforico sino a completo disseccamento; quindi il residuo completamente secco fu frazionato con alcool assoluto per cui si poterono ottenere due porzioni distinte, la prima e l'ultima deposta, lasciando in disparte una serie di porzioni intermedie. La prima parte ha dato all'analisi:

I gr. 0,3083 di cloridrato diedero di Aq. gr. 0,2819 e di CO^2 gr. 0,4862
II gr. 0,2507 » » di Aq. gr. 0,2328 e di CO^2 gr. 0,3929

	trovato %		media	calcolato % per $C^5H^{14}NOCl$ (Colina)	
	I	II			
C	43.01	42.74	42.88	C	43.01
H	10.15	10.31	10.23	H	10.03

« L'ultima parte del frazionamento con alcool assoluto ha dato il risultato seguente:

gr. 0,2595 di cloridrato diedero di Aq. gr. 0,1969 e di CO^2 gr. 0,3717
gr. 0,2093 » » di cloruro d'argento gr. 0,20078

	trovato %	calcolato % per $C^5H^{14}NO^2Cl$ (Muscarina)	
C	39.06	C	38.58
H	8.43	H	9.00
Cl	23.69	Cl	22.82

« Con un terzo metodo il residuo ottenuto dalle acque madri alcooliche, dalle quali venne separato il cloridrato di Trigonellina, venne trasformato in cloroaurato, che fu quindi successivamente frazionato, mediante cristallizzazione, dall'acqua bollente. La parte più abbondante si presentava al microscopio in aggregati dendritici: fondeva a circa 245°, e dava all'analisi i seguenti risultati:

I gr. 0,5942 di cloroaurato diedero di Aq. gr. 0,1748 e di CO^2 gr. 0,3025
gr. 0,3387 » » di Au gr. 0,1490
II gr. 0,3076 » » di Au gr. 0,1361

	trovato %		calcolato % per $C^2H^{14}NOCl.AuCl^3$	
	I	II		
C	13.88		C	13.56
H	3.26		H	3.16
Au	43.96	44.24	Au	44.36

« La parte più solubile di sale d'oro proveniente dal frazionamento del cloroaurato primitivo era sempre in piccolissima quantità, e le determinazioni di oro che noi qui riportiamo, si riferiscono sempre a diverse estrazioni:

I gr. 0,3845 di cloraurato diedero di Au gr. 0,1643
II gr. 0,4177 " " di Au gr. 0,1778
III gr. 0,2785 " " di Au gr. 0,1195

	trovato %			media	calcolato per $C^5 H^{14} NO^2Cl . Au Cl^3$ (Muscarina)	
	I	II	III			
Au	42.73	42.56	42.90	42.73	Au	42.81

« Dalle operazioni eseguite sul cloridrato greggio ricavato dalla *Cannabis indica*, risulta quindi identificata dapprima la Trigonellina. I frazionamenti eseguiti sul cloridrato residuo, tanto col bicloruro di mercurio e l'alcool assoluto, che col cloruro d'oro dimostrano in quantità prevalente e relativamente più grande delle altre basi, la Colina. Nella porzione poi più solubile dei cloridrati, tanto se proveniente dai frazionamenti col bicloruro di mercurio e coll'alcool assoluto, che col cloruro d'oro, si hanno valori abbastanza prossimi alla Muscarina. Questi dati chimici che dimostrano la presenza della Muscarina, trovano un perfetto riscontro nell'azione fisiologica del cloridrato stesso.

« Cannabis sativa *(Semi)*. Il processo di estrazione seguito per i semi fu quello già adoperato per la *Cannabis indica* con le esposte modificazioni. I risultati ottenuti riguardo agli alcaloidi dei semi della *Cannabis sativa* concordano con quelli pubblicati durante il corso di queste ricerche da Schulze e Frankfurt (1).

« Il cloridrato greggio che si ottiene dai semi per frazionamento coll'alcool assoluto, ha dato un primo cloridrato il quale presenta gli stessi caratteri del cloridrato di Trigonellina ottenuto dalla *Cannabis indica*. Questo cloridrato si presenta in pagliette madreperlacee solubilissimo nell'acqua; fonde a 250° decomponendosi: non contiene acqua di cristallizzazione. Ha dato all'analisi i risultati seguenti:

gr. 0,2067 di cloridrato diedero di cloruro di Argento gr. 0,166
gr. 0,2897 " " di Aq. gr. 0,1398 e di CO^2 gr. 0,5153
gr. 0,2786 " " di Az. c. c. 18,7. T 18°,3. H 759 mm.

trovato %		calcolato % per $C^7 H^7 NO^2 . HCl$ (Trigonellina)	
C	48.51	C	48.41
H	5.36	H	4.61
Az	7.72	Az	8.06
Cl	19.83	Cl	20.46

« Una parte del cloridrato precedente trasformato in cloroaurato fu cristallizzata dall'acido cloridrico diluito, secondo le indicazioni già riferite di

(1) Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft. 1894-749.

Jahns; fonde a 198° e presenta al microscopio tutti i caratteri propri del cloroaurato di Trigonellina. Questo sale d'oro ha dato all'analisi:

gr. 0,2142 di cloroaurato diedero di Au gr. 0,0886

	trovato %	calcolato % per $C^7 H^7 NO^2,HCl. Au Cl^3$
Au	41.36	41.20

« Le acque madri alcooliche svaporate lasciano un residuo deliquescente, il quale trasformato in cloroaurato presenta tutti i caratteri del sale d'oro di Colina, ma stante la piccola quantità di esso non si potettero eseguire determinazioni quantitative.

« Cannabis sativa (*Cime*). Dal cloridrato greggio ottenuto dalle cime della *Cannabis sativa* per frazionamento con alcool assoluto, noi ottenemmo un cloridrato cristallizzato in pagliette madraperlacee, molto somigliante al cloridrato di Trigonellina ma che all'analisi dava dei numeri molto discordanti tanto analizzando lo stesso cloridrato quanto il suo cloroaurato. Ricristallizzando però il sale d'oro dall'acido cloridrico, abbiamo potuto convicerci che esso era un miscuglio di sale di Trigonellina e di Colina. Difatti la parte meno solubile di sale d'oro presentava al microscopio lo stesso aspetto del cloroaurato di Trigonellina, fondeva a 198° e la misura dei valori angolari e degli angoli di estinzione di questi cristalli eseguita in cortesia dal prof. G. Negri, ci confermava gli stessi risultati. Nella soluzione cloridrica poi rimaneva una piccola quantità di cloroaurato di Colina.

« Alle acque madri alcooliche svaporate a piccolo volume si aggiunge un eccesso di etere solforico anidro, il quale precipita ancora una piccola quantità di Trigonellina: quindi eliminato il solvente, il residuo si trasforma in cloroaurato, il quale cristallizzato dall'acqua bollente si presenta in bei cristalli, che, guardati al microscopio, hanno l'aspetto di aggregati dendritici. Ha dato all'analisi i seguenti risultati:

I gr. 0,3370 di cloroaurato diedero di Au gr. 0,1488
II gr. 0,1133 » » di Au gr. 0,050

	trovato % I	trovato % II	calcolato % per $C^5 H^{14} NOCl. Au Cl^3$ (Colina)
Au	44.15	44.13	44.36

« Da quanto abbiamo finora esposto, viene dimostrato che tanto nelle cime della *Cannabis indica* quanto nelle cime e nei semi della *Cannabis sativa* esistono la Trigonellina e la Colina: nella *Cannabis indica* poi, oltre ai nominati alcaloidi, esiste in piccola quantità la Muscarina, la quale comunica all'estratto acquoso di detta pianta la sua azione tossica, come venne dimostrato sia coi dati chimici che con quelli fisiologici. E se il Warden e

Waddell [1] riscontrarono inattivo l'estratto acquoso solforico di *Cannabis indica*, come anche noi alcune volte potemmo osservare, ciò può dipendere da diverse cause come ad es. una possibile fermentazione subita dalla droga, per cui la Muscarina si è potuta trasformare o in Colina o in Betaina, basi entrambe relativamente innocue. Noi difatti potemmo sempre osservare che quando la droga è di bell'aspetto e ben conservata, il suo estratto acquoso è sempre energicamente attivo, risultato il quale è pienamente concordante con quello ottenuto da diversi autori. Se noi ora dai dati ottenuti vogliamo ritrarre qualche considerazione, allo scopo di spiegare quale sia l'influenza che le condizioni climatologiche esercitano sopra questa pianta, per cui in determinate regioni essa produce soltanto delle sostanze innocue, mentre in altre elabora prodotti tossici, noi troviamo nei dati chimici osservati una facile spiegazione.

« In condizioni normali esiste nelle canape la Colina, la quale può, per parziale ossidazione, cambiare il suo gruppo alcoolico in un gruppo aldeidico e trasformarsi così da una base innocua in un'altra potentemente tossica. E le condizioni del terreno e del clima facilitano questa trasformazione. E il fatto constatato da Warden e Waddell, e anche da noi, che cioè spesse volte la droga può essere innocua, può spiegarsi sia con una possibile fermentazione della droga stessa, ovvero meglio con la possibilità che la droga abbia vegetato in siti in cui la trasformazione della Colina in Muscarina non sia punto avvenuta. Ciò ha una conferma nel fatto che comunemente si osserva nelle regioni, ove su vasta scala si coltiva questa pianta: in mezzo alle piante di *Cannabis indica*, di forte azione tossica, si trovano sempre alcune le quali oltre a presentare una leggera modificazione nel loro abito esterno, sono ancora fisiologicamente poco attive.

« Così pure possiamo spiegare qualche caso di avvelenamento acuto per canapa nostrana, segnalatoci da alcuni autori, col supporre che condizioni speciali contribuiscono in questo raro caso a trasformare la Colina preesistente in detta pianta in Muscarina.

« Questo studio degli alcaloidi delle canape ci dà un bell'esempio dell'influenza delle condizioni climatologiche nella fisiologia vegetale ».

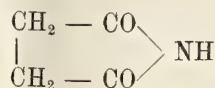
Chimica. — *Sulla stabilità delle immidi succiniche sostituite nell'azoto* [2]. Nota di A. Miolati e di E. Longo, presentata dal Socio Cannizzaro.

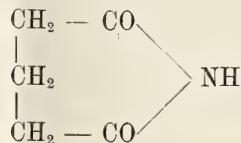
« Come uno di noi aveva accennato in una sua prima Nota su questo argomento, la velocità della decomposizione delle immidi d'acidi bibasici per

(1) Pharm. Journal and Transactions. (3) 15. 574 e Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie 1885.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Roma. 3ª Comunicazione di A. Miolati, *Sulla stabilità delle immidi di acidi bibasici*. Vedi questi Rendiconti, vol. III, 1° sem., pag. 515 e 597 (1894).

mezzo dell'idrato sodico, può considerarsi come indice della stabilità della catena chiusa esistente in questi composti. Comparando tra di loro le diverse velocità di decomposizione che si ottengono nello studio dei diversi composti, si può ottenere un'idea dell'influenza che esercitano sulla stabilità della catena, tanto il numero degli atomi che la compongono, quanto i gruppi che ne sostituiscono il suo idrogeno. Dalle misure finora fatte è risultato: che aumentando il numero degli atomi concatenati fra loro, diminuisce la stabilità, poichè la succinimmide

$$\begin{array}{l} CH_2 - CO \diagdown \\ \vert \qquad\qquad\quad > NH \\ CH_2 - CO \diagup \end{array}$$

è più stabile della glutarimmide

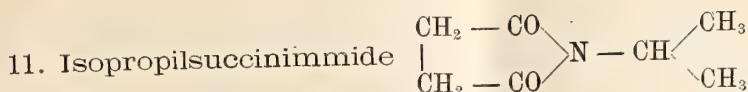
$$\begin{array}{l} CH_2 - CO \diagdown \\ \vert \\ CH_2 \qquad\qquad\quad > NH \\ \vert \\ CH_2 - CO \diagup \end{array}$$

venendo la prima scomposta dall'idrato sodico più lentamente della seconda.

« L'influenza poi che i diversi gruppi sostituenti l'idrogeno esercitano sulla stabilità del nucleo è risultata, almeno per la succinimmide, diversa a seconda che era sostituito o l'idrogeno di un gruppo metilenico o quello del gruppo immidico: nel primo caso si aveva un aumento di stabilità, nel secondo una diminuzione; vale a dire, nell'un caso una decomposizione più lenta che nella succinimmide, nell'altro una più rapida.

« In un'altra Nota noi abbiamo comunicato i risultati delle misure fino allora fatte sulla stabilità di diverse succinimmidi sostituite nell'azoto. Da quelle misure risultava, che la diminuzione della stabilità della succinimmide prodotta dalla sostituzione dell'idrogeno immidico con un radicale, è maggiore o minore, a seconda che quel radicale è aromatico o alcoolico. I gruppi alcoolici saturi influiscono a seconda del loro peso molecolare: la stabilità è tanto maggiore, quanto più grande è il gruppo sostituente; e ciò concorda con quanto hanno osservato altri autori, che studiarono la stabilità di altri composti ciclici.

« In questa Nota noi diamo ulteriori misure, fatte su derivati della medesima serie, e le andiamo coordinando, man mano, con quelle già publicate.

« Il metodo di ricerca seguìto è quello già altra volta descritto; le lettere hanno il medesimo significato che avevano le altre volte; il numero che precede il nome delle immidi, indica il numero progressivo dei corpi studiati. Questa volta non diamo le singole serie di determinazioni, ma le riassumiamo in un'unica serie.

11. Isopropilsuccinimmide $\begin{array}{l} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{array}\!\!> N - CH <\!\! \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}$

« Non era stata ottenuta fino ad ora. Venne da noi preparata per azione dell'isopropilammina sull'anidride succinica. Il prodotto greggio ottenuto venne ripetutamente distillato. L'immide pura bolle a 230° sotto una pressione di 755 mm.; alla temperatura ordinaria è solida e, cristallizzata dal cloroformio, fonde a 61°.

« Le analisi diedero i risultati seguenti:

I 0,1811 gr. di sostanza diedero 0,3952 gr. di CO_2 e 0,1286 gr. H_2O corrispondenti a 0,1077 gr. di carbonio e 0,0143 d'idrogeno.

II 0, 2955 gr. di sostanza diedero 25, 4 cc. d'azoto misurati a 11° e a 748 mm. e corrispondenti a 0,0298 gr. d'azoto.

« Per cento

	trovato	calcolato per $C_7H_{11}O_2N$
C	59,51	59,54
H	7,89	7,82
N	10,08	9,95

« La media delle determinazioni fatte è la seguente:

A = 9,13

t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac	t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac
2	1,08	8,05	0,1341	0,06705	11	3,92	5,21	0,7525	0,06840
3	1,57	7,56	0,2077	0,06923	12	4,13	5,00	8,8260	0,06883
4	1,95	7,18	0,2717	0,06792	13	4,28	4,85	0,8824	0,06787
5	2,33	6,80	0,3429	0,06858	14	4,43	4,70	0,9426	0,06732
6	2,64	6,49	0,4068	0,06780	15	4,63	4,50	1,0290	0,06860
7	2,93	6,20	0,4726	0,06751	16	4,73	4,40	1,0750	0,06718
8	3,20	5,93	0,5395	0,06743	17	4,88	4,25	1,1148	0,06753
9	3,46	5,67	0,6102	0,06780	18	5,03	4,10	1,2280	0,06822
10	3,61	5,52	0,6540	0,06540	19	5,14	3,99	1,2880	0,06778

Ac = 0, 06781

« È degno di nota, che in confronto colla n- propilsuccinimmide (Ac = 0,055) il composto isopropilico è meno stabile; mentre invece nei lattoni studiati da Hjelt (¹), e nelle anidridi $\begin{array}{l} R - C - C_6H_4 - CO \\ \| \qquad\qquad\quad | \\ N \text{———} O \end{array}$ studiate da Hantzsch e Miolati (²), risultò concordemente che il gruppo isopropilico aumentava la stabilità della catena più del propilico normale. Qui, invece, si osserva il caso contrario, che potrebbe forse avere analogia con quello osservato ultimamente da Hjelt (³), il quale trovò che l'isopropilcumarina si forma più difficilmente della metilcumarina, ossia che quest'ultima è più stabile della prima.

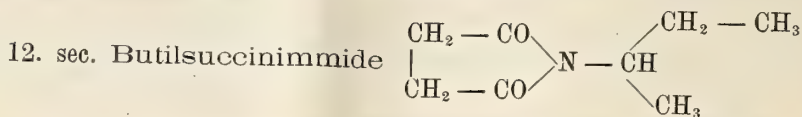
« Quest'osservazione di Hjelt e quella fatta da noi parrebbero indicare:

(¹) Acta Societatis scientiarum fennicae, tom. XVIII e XIX.

(²) Gazz. chim. Ital. XXIII (2), pag. 79.

(³) Acta Soc. scient. fenn., tom. XX, N. 14.

che l'influenza dei diversi radicali sulla stabilità dei composti ciclici, non è sempre esattamente la stessa in tutte le diverse classi di questi composti, come si poteva esser indotti a credere da principio. Queste differenze potrebbero dipendere dal posto dove avviene la scissione della catena, rispetto al posto occupato dal gruppo sostituente.

12. sec. Butilsuccinimmide $\begin{array}{l} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{array} \!\!> N - CH \begin{array}{l} CH_2 - CH_3 \\ \\ CH_3 \end{array}$

« Fu da noi preparata per la prima volta, in modo analogo al composto isopropilico, cioè per azione della Butilammina secondaria sull'anidride succinica. Il composto purificato per ripetute distillazioni bolle a 339-340° sotto una pressione di 758 mm.

« Una determinazione d'azoto diede il risultato seguente:

0,2587 gr. di sostanza diedero 20,2 cc. d'azoto misurati a 14° e a 758 mm. e corrispondenti a 0,02359 gr. d'azoto.

« Per cento

	trovato	calcolato per $C_8H_{13}O_2N$
N =	9,12	9,05

« La media delle determinazioni della velocità di decomposizione è raccolta nella seguente tabella:

A = 9,50

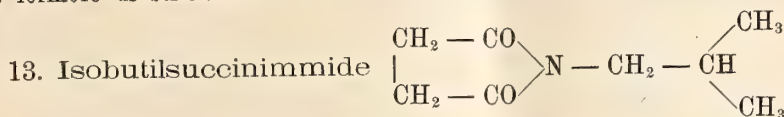
t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac	t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac
4	1,23	8,27	0,1487	0,03717	18	3,80	5,70	0,6667	0,03704
5	1,50	8,00	0,1875	0.03750	19	3,94	5,56	0,7120	0,03732
6	1,75	7,75	0,2258	0,03763	20	4,05	5,45	0,7432	0,03715
7	1,93	7,57	0,2609	0,03727	21	4,16	5,34	5,7800	0,03714
8	2,23	7,27	0,3068	0,03835	22	4,25	5,25	0,8095	0,03679
9	2,40	7,10	0,3380	0,03755	23	4,35	5,15	0,8447	0,03672
10	2,59	6,91	0,3748	0,03748	24	4,45	5,05	0,8812	0,03671
11	2,76	6,74	0,4092	0,03720	25	4,55	4,95	0,9191	0,03676
12	2,95	6,55	0,4504	0,03753	26	4,67	4,83	0,9670	0,03719
13	3,09	6,41	0,4821	0,03707	27	4,72	4,78	0,9874	0,03657
14	3,25	6,25	0,5200	0,03714	28	4,85	4,65	1,0420	0,03721
15	3,40	6,10	0,5575	0,03717	29	4,93	4,57	1,0780	0,03717
16	3,57	5,93	0,6019	0,03760	30	5,00	4,50	1,1110	0,03703
17	3,70	5,80	0,6380	0,03753	31	5,10	4,40	1,1590	0,03761

Ac = 0,03723

« La sec-butilsuccinimmide è notevolmente più stabile della isopropile e precisamente, tra le due passa la medesima differenza che tra la propile normale e l'etile. Difatti:

Etilsuccinimmide Ac =	0,08426	0,02941	$>N - CH_2 - CH_3$
n Propil- " "	0,05485		$>N - CH_2 - CH_2 - CH_3$
Isopropil- " "	0,06781	0,03058	$>N - \underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{\vert}{CH_2}}} - CH_3$
sec- Butil- " "	0,03723		$>N - \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{\vert}{CH}} - CH_2 - CH_3$

« L'analogia tra queste due coppie d' immidi risulta evidente anche dalle formole di struttura.

13. Isobutilsuccinimmide $\begin{matrix} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{matrix} \!\!>\! N - CH_2 - CH \begin{matrix} / CH_3 \\ \\ \backslash CH_3 \end{matrix}$

« Non era conosciuta e fu da noi preparata come le precedenti. Fonde a 28° e bolle a 247-248° ad una pressione di 758 mm.

« Un'analisi elementare diede i risultati seguenti:

0,2051 gr. di sostanza diedero 0,4664 gr. d'anidride carbonica e 0,1563 gr. d'acqua, equivalenti a 0,1272 gr. di carbonio e 0,01736 d'idrogeno.

« Per cento

	trovato	calcolato per $C_8H_{13}O_2N$
C	62,01	61,90
H	8,41	8,41

« Le determinazioni fatte sono riunite in due serie aventi A differenti.

A = 9,13

t	x	A — x	x:A — x	Ac	t	x	A — x	x:A — x	Ac
4	1,25	7,88	0,2004	0,03965	12	2,88	6,25	0,4608	0,03840
6	1,73	7,40	0,2337	0,03895	14	3,18	5,95	0,5344	0,03817
8	2,18	6,95	0,3137	0,03921	16	3,53	5,60	0,6304	0,03940
10	2,55	6,58	0,3876	0,03876	18	3,73	5,40	0,6907	0,03837

Ac = 0,03885

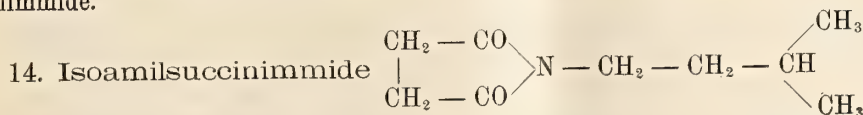
Ac = 9,50

t	x	A — x	x:A — x	Ac	t	x	A — x	x:A — x	Ac
4	1,30	8,20	0,1585	0,03962	13	3,23	6,27	0,5151	0,03962
5	1,55	7,95	0,1949	0,03898	14	3,33	6,17	0,5396	0,03854
6	1,80	7,70	0,2338	0,03897	15	3,45	6,05	0,5702	0,03801
7	2,03	7,47	0,2718	0,03883	16	3,64	5,86	0,6212	0,03882
8	2,29	7,21	0,3176	0,03970	17	3,75	5,75	0,6521	0,03836
9	2,48	7,02	0,3528	0,03920	18	3,82	5,68	0,6726	0,03737
10	2,70	6,80	0,3971	0,03971	19	4,03	5,47	0,7367	0,03877
11	2,83	6,67	0,4243	0,03857	20	4,21	5,29	0,7964	0,03882

Ac = 0,03886

« Da questi numeri risulta che tra l'azione dei gruppi isomeri butile secondario e isobutile non esiste quasi nessuna differenza.

« Aumentando ancora la grandezza del gruppo alcoolico, la stabilità aumenta di poco; come risulta dalle determinazioni fatte sulla Isoamilsuccinimmide.

14. Isoamilsuccinimmide $\begin{matrix} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{matrix} \!\!>\! N - CH_2 - CH_2 - CH \begin{matrix} / CH_3 \\ \\ \backslash CH_3 \end{matrix}$

« Questa pure non era conosciuta, fu preparata come le precedenti. È liquida e bolle a 261-262°. L'analisi ci diede i risultati seguenti:

I 0,2148 gr. di sostanza diedero 0,5033 gr. di CO_2 e 0,1767 gr. di H_2O corrispondenti a 0,1372 gr. di carbonio e 0,0196 d'idrogeno.

II 0,2429 gr. di sostanza diedero 18,4 cc. d'azoto misurati a 26° e a 758 mm. corrispondenti a 0,02033 gr. d'azoto.

« Per cento

	trovato	calcolato per $C_9 H_{15} NO_2$
C	63,87	63,87
H	9,12	8,90
N	8,37	8,30

« Le determinazioni sono riunite in due serie aventi A differenti:

A = 9,15

t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac	t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac
3	0,90	8,25	0,1091	0,03636	14	3,03	6,12	0,4950	0,03535
6	1,57	7,58	0,2071	0,03451	15	3,10	6,05	0,5124	0,03660
7	1,85	7,30	0,2534	0,03620	16	3,33	5,82	0,5722	0,03596
8	1,88	7,27	0,2586	0,03232	18	3,40	5,75	0,5913	0,03285
9	2,25	6,90	0,3261	0,03623	19	3,62	5,53	0,6546	0,03442
10	2,43	6,72	0,3616	0,03616	20	3,65	5,50	0,6656	0,03328
11	2,50	6,65	0,3759	0,03417	21	3,80	5,35	0,7103	0,03382
12	2,55	6,60	0,3864	0,03220	25	3,98	5,17	0,7698	0,03079
13	2,95	6,20	0,4757	0,03659	30	4,40	4,75	0,9264	0,03088

Ac = 0,03437

A = 9,50

t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac	t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac
3	0,85	8,65	0,0982	0,03275	10	2,35	7,15	0,3287	0,03287
4	1,12	8,38	0,1337	0,03317	11	2,55	6,95	0,3668	0,03335
5	1,32	8,18	0,1614	0,03228	12	2,63	6,87	0,3828	0,03183
6	1,55	7,95	0,1949	0,03248	13	2,84	6,66	0,4264	0,03280
7	1,78	7,72	0,2305	0,03292	14	2,98	6,52	0,4571	0,03265
8	1,98	7,52	0,2633	0,03281	15	3,10	6,40	0,4844	0,03229
9	2,20	7,30	0,3014	0,03349	17	3,40	6,10	0,5575	0,03279

Ac = 0,03275

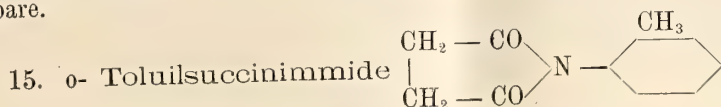
« Nell'altra nostra Nota abbiamo comunicato anche le misure fatte sulla p- toluilsuccinimmide, dalle quali risultava che l'introduzione del gruppo metilico nel fenile della fenilsuccinimmide abbassava la costante di velocità di circa la metà, ciò che significava che rendeva la catena più stabile.

Fenil-	succinimmide	Ac = 2,27
p- Toluil-	»	» 1,12

« L'influenza protettrice dei gruppi alcoolici sulle catene chiuse risulta chiaramente anche da questo esempio.

« Era ora interessante di ricercare la diversa influenza che il gruppo metilico esercitava a seconda della posizione da esso occupata nel residuo fenico. Questo confronto acquistava tanto più importanza, inquantochè è risultato, dagli studi V. Meyer e dei suoi scolari: *Sulla eterificazione degli acidi aromatici*, che i gruppi sostituenti il nucleo benzenico esercitano una evidente influenza sulla eterificazione del carbossile; tanto che l'introduzione di

gruppi nel residuo fenico in determinate posizioni rispetto al carbossile, può impedire che avvenga la reazione a cui quest'ultimo gruppo poteva prima partecipare.

15. o-Toluilsuccinimmide $\begin{matrix} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{matrix} \!\!>\! N - C_6H_4 - CH_3$

« Era stata preparata da Bechi (1) e descritta come un corpo fondente a 75°. Noi l'abbiamo preparata partendo da o-Toluidina purissima, priva assolutamente di para. Il corpo ottenuto destillato ripetutamente bolliva a 339-340° sotto una pressione di 756 mm., e fondeva a 101-102°. Una determinazione d'azoto confermò che il corpo da noi ottenuto era proprio una toluilsuccinimmide.

0,02656 gr. di sostanza diedero 17,4 cc. d'azoto misurati a 14° e a 756 mm. corrispondenti a 0,02032 gr. d'azoto.

« Per cento

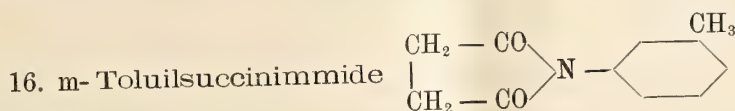
	trovato	calcolato per $C_{11}H_{11}O_2N$
N	7,65	7,42

« Le misure fatte diedero i risultati seguenti:

$A = 9,13$

t	x	$A - x$	$x : A - x$	Ac
4	7,08	2,05	3,453	0,8642
6	7,65	1,47	5,205	0,8675
7	7,85	1,27	6,180	0,8828
8	7,93	1,20	6,609	0,8261
9	8,10	1,03	7,865	0 8739
10	8,18	0,95	8,612	0,8612
11	8,21	0,92	8,923	0,8111

$Ac = 0,8558$

16. m-Toluilsuccinimmide $\begin{matrix} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{matrix} \!\!>\! N - C_6H_4 - CH_3$

« Non era conosciuta. Fu preparata secondo il metodo generale dato da Menschutkin (2) per le succinimmidi aromatiche. L'immide distilla tra 340-344° cristallizza dall'alcool metilico in prismi bianchi appiattiti che fondono a 111-112°.

« Da una determinazione d'azoto risultò:

0,3945 gr. di sostanza diedero 25,1 cc. d'azoto misurati a 16° e a 758 mm. equivalenti a 0,02914 gr. d'azoto.

« In 100 parti

	trovato	cacolato per $C_{11}H_{11}O_2N$
N =	7,39	7,42

(1) Berichte, XII, 25, 321.
(2) Liebig' s Annalen, CLXII, 166.

« Le determinazioni fatte sono riassunte in questa serie:

t	x	$A-x$	$x:A-x$	Ac	t	x	$A-x$	$x:A-x$	Ac
3	7,23	1,90	3,805	1,268	7	8,03	1,10	7,244	1,035
4	7,55	1,58	4,777	1,194	8	8,12	1,01	8,041	1,005
5	7,81	1,32	5,917	1,183	9	8,22	0,91	9,035	1,004
6	7,91	1,22	6,483	1,081	10	8,31	0,82	10,14	1,014

$Ac = 1,098$

« Da queste determinazioni risulta adunque che l'influenza del gruppo metilico, nelle diverse toluilsuccinimmidi varia a seconda della posizione del gruppo metilico rispetto al punto dove è unito il residuo della succinimmide; e precisamente, il composto orto è più stabile degli altri, ciò che del resto per analogia si doveva prevedere:

orto toluilsuccinimmide	Ac	0,8558
meta »	»	1,098
para »	»	1,12

« L'influenza che esercitano i gruppi alcoolici sostituenti l'idrogeno del fenile della fenilsuccinimmide in rapporto colla loro posizione, risulterà più ancora evidente quando questi gruppi saranno più d'uno. Per dimostrarlo, uno di noi è ora occupato, insieme al Signor A. Lotti, a studiare la stabilità delle sei xililsuccinimmidi isomere.

« Diremo ancora che da ricerche preliminari fatte da uno di noi, risulta che la posizione dei gruppi sostituenti nel nucleo benzenico esercita una notevole influenza anche su di altre reazioni; come ad esempio sul processo di acetilazione delle basi aromatiche e sulla velocità di decomposizione dei loro derivati acetilici. Su di queste ricerche verrà riferito quanto prima a questa Accademia ».

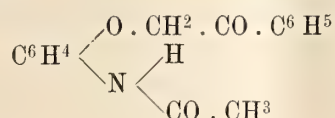
Chimica. — *Sopra l'Ipnoacetina* [1]. Nota del dott. G. Vignolo, presentata dal Socio Cannizzaro.

« Il metodo più semplice per la preparazione degli eteri del paramidofenolo, consiste nel fare agire il paranitrofenolo allo stato di composto alcalino con gli ioduri o bromuri dei radicali alcoolici che si desiderano eterificare. Ottenuto un etere del paranitrofenolo si passa facilmente, per riduzione, all'etere corrispondente del paramidofenolo, e, da questo, mediante azione dell'anidride o dell'a. acetico, al relativo composto acetilico.

Partendo dal fatto che l'acetofenone bromurato o bromacetilbenzina $C^6H^5.CO.CH^2.Br$ può in certe condizioni comportarsi come un bromuro

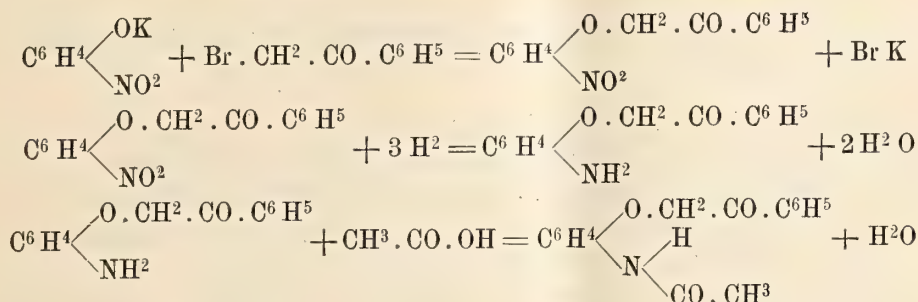
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Farmaceutica e Tossicologia della R. Università di Genova.

alchilico (¹) ossia come se fosse il bromuro dell' alcool benzoilcarbinol $C^6H^5 . CO . CH^2 . OH$, mi sono proposto di preparare l'acetofenonacetilparamidofenoletere ovverosia il composto rappresentato dalla formola:

$$C^6H^4 \begin{cases} O . CH^2 . CO . C^6H^5 \\ N \begin{cases} H \\ CO . CH^3 \end{cases} \end{cases}$$

« I passaggi necessari per ottenere questa sostanza avrebbero dovuto essere i seguenti: per azione del paranitrofenolo in soluzione alcalina sull'acetofenone monobromato preparare l'acetofenonparanitrofenoletere; per riduzione passare all'acetofenonparamidofenoletere e da questo al composto acetilico.

$$C^6H^4 \begin{cases} OK \\ NO^2 \end{cases} + Br . CH^2 . CO . C^6H^5 = C^6H^4 \begin{cases} O . CH^2 . CO . C^6H^5 \\ NO^2 \end{cases} + Br K$$

$$C^6H^4 \begin{cases} O . CH^2 . CO . C^6H^5 \\ NO^2 \end{cases} + 3 H^2 = C^6H^4 \begin{cases} O . CH^2 . CO . C^6H^5 \\ NH^2 \end{cases} + 2 H^2O$$

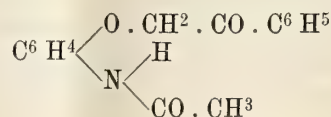
$$C^6H^4 \begin{cases} O . CH^2 . CO . C^6H^5 \\ NH^2 \end{cases} + CH^3 . CO . OH = C^6H^4 \begin{cases} O . CH^2 . CO . C^6H^5 \\ N \begin{cases} H \\ CO . CH^3 \end{cases} \end{cases} + H^2O$$

« Senonchè, atteso la natura del gruppo alcoolico, poteva prevedersi difficile il passaggio dal nitrocomposto al composto amidico senza influenzare in qualche maniera il gruppo CO di natura chetonica. E difatti il Mühlau (²) il quale ottenne l'acetofenonparanitrofenoletere, già aveva constatato che operandone la riduzione con a. cloridrico e stagno non si ottiene già il composto amidico, ma solo dei prodotti di decomposizione, tra i quali acetofenone o ipnone e paramidofenolo.

« Atteso quindi l'impossibilità di preparare l'acetofenonparamidofenoletere con questo mezzo, tentai di ottenerlo facendo reagire in condizioni diverse il paramidofenolo in soluzione potassica coll'acetofenone monobromato, partendo dal fatto che sebbene gli amidofenoli non formino sali cogli alcali, pure si sciolgono in essi senza decomposizione, e che sostanze analoghe possono essere preparate per analoga reazione. Infatti tra i metodi che possono fornire la fenetidina $C^6H^4 \begin{cases} O . C^2H^5 \\ NH^2 \end{cases}$ è indicata la reazione del paramidofenolo in soluzione alcalina sopra un eccesso di bromuro di etile.

(¹) V. Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft, 1882, 2497.
(²) V. Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft, 1882, 2497.

Ma tutte le prove dirette in questo senso, e tutte le altre che furono tentate, non poterono sortire alcun effetto.

« Nondimeno, mediante un metodo speciale, che descriverò più tardi, mi venne dato di ottenere il composto acetilico dell'acetofenonparamidofenolo, composto nel quale l'idrogeno dell'ossidrile fenico è sostituito dal radicale dell'acetofenone monobromato o bromacetilbenzina. Questa sostanza rappresenta l'acetofenonacetilparamidofenoletere, la composizione del quale è espressa dalla formola:

$$C^6 H^4 \begin{cases} O \,.\, CH^2 \,.\, CO \,.\, C^6 H^5 \\ N \begin{cases} H \\ CO \,.\, CH^3 \end{cases} \end{cases}$$

« Il prodotto puro, cristallizzato e disseccato nel vuoto, diede i seguenti risultati all'analisi:

gr. 0,2309 diedero gr. 0,1243 di acqua e gr. 0,6046 di a. carbonica
gr. 0,3002 diedero gr. 0,1580 di acqua e gr. 0,7891 di a. carbonica
gr. 0,3209 diedero gr. 0,1694 di acqua e gr. 0,8405 di a. carbonica
gr. 0,3594 diedero cc. 16,5 di azoto a T. 26°,4, P. 763,3 corrispondenti a cc. 14,86 a T. 0° e P. 760, ed in peso a gr. 0,01809
gr. 0,3547 diedero cc. 16,8 di azoto a T. 27°,4 e P. 763,3 corrispondenti a cc. 14,61 a T. 0° e P. 760 ed in peso a gr. 0,018319

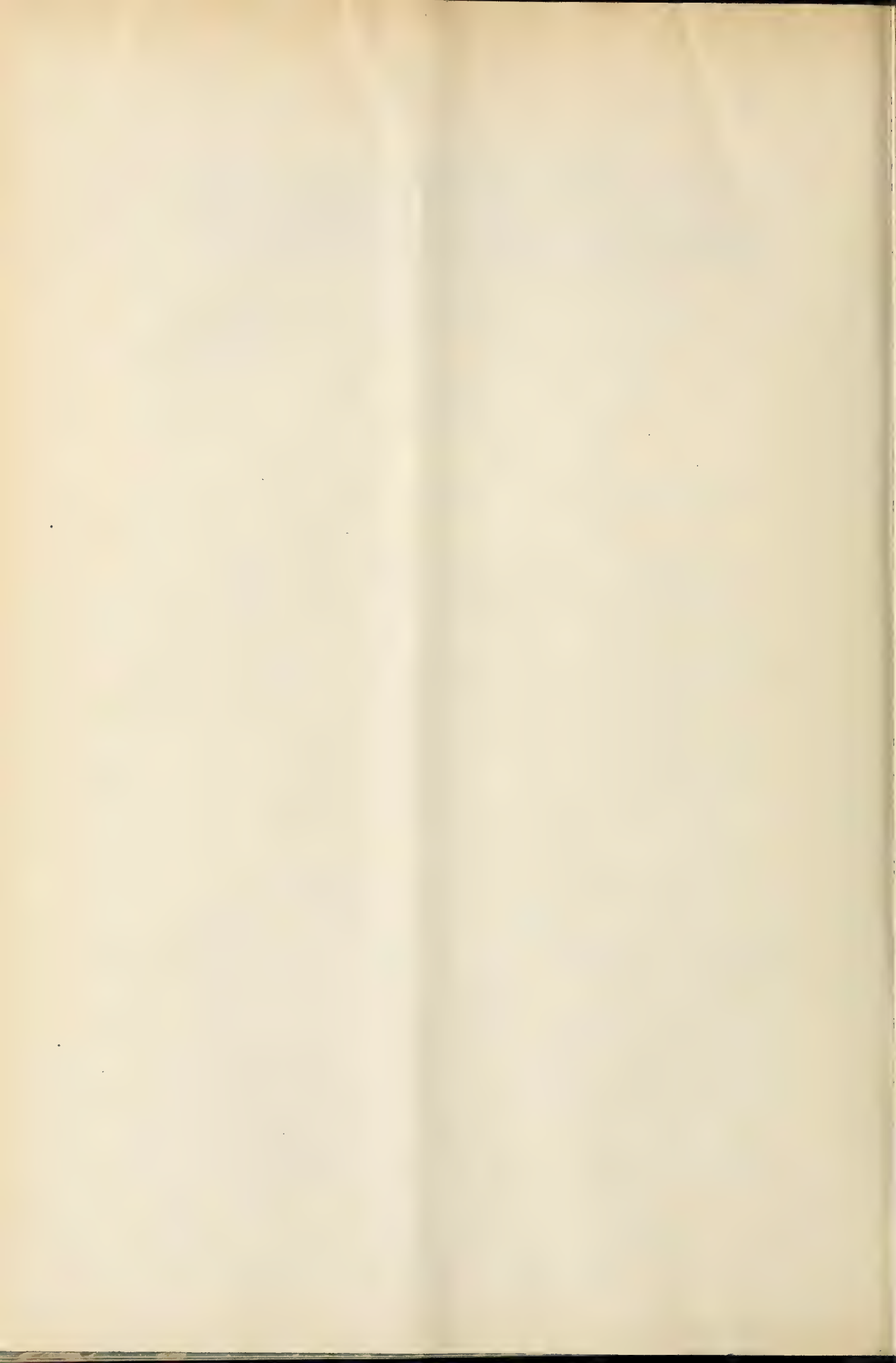
Donde:

	trovato °/₀					media	calcolato °/₀ per $C^{16} H^{15} NO^3$
C	71,41	71,67	71,43			71,50	71,37
H	5,98	5,84	5,86			5,89	5,57
N				5,04	5,16	5,10	5,20

« L'acetofenonacetilparamidofenoletere cristallizza in laminette trasparenti, sottili, di splendore madreperlaceo, leggermente untuose al tatto. Al microscopio si presenta sotto forma di esagoni irregolari, isolati. Nelle forme più numerose, due lati opposti sono molto più sviluppati dei rimanenti. Non contiene acqua di cristallizzazione. Infatti gr. 0,2309 di sostanza disseccati a 100° per un'ora, non subirono che una perdita in peso di gr. 0,0008, e, per successivo riscaldamento di mezz'ora a 110°, la perdita totale in peso non aumentò che a gr. 0,0009. Fonde intorno a 160° con decomposizione in un liquido giallo-bruno. È quasi insolubile nell'acqua e nell'etere, a freddo ed a caldo; pochissimo solubile nel cloroformio, solfuro di carbonio e benzolo. È notevolmente solubile nell'etere acetico e specialmente a caldo tanto nell'alcool ad 85° che in quello assoluto.

« A questa sostanza venne dato il nome di Ipnoacetina. Amministrata

alla dose di gr. 0,20 a 0,25, manifesta nell'uomo azione ipnotica ed antitermica, ossia l'azione combinata dell'acetofenone o ipnone e dell'amidofenolo. Nella Clinica di questa Università, diretta dal prof. E. Maragliano, si stanno attualmente continuando le esperienze sopra gli effetti di questa sostanza, e sull'esito delle medesime riferirò in un'altra Nota ».

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 maggio 1895.

F. BRIOSCHI Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una trasformazione delle forme binarie e degli integrali corrispondenti.* Nota del Socio BRIOSCHI.

« 1°. È nota da vari anni pei lavori dei Sigg. Weierstrass e Hermite, quella trasformazione della forma binaria biquadratica e del corrispondente integrale elittico, la quale modificava essenzialmente la teoria delle funzioni elittiche. Ma i metodi adottati dai due eminenti geometri sopra nominati, e da altri che successivamente si occuparono dello stesso argomento, per giungere a quella trasformazione, avendo di mira il problema speciale, non si prestano a generalizzazione.

« Nel breve scritto che oggi presento all'Accademia espongo un metodo di trasformazione pel quale l'accennata limitazione più non esiste, ed il caso della forma biquadratica rientra in quello di una forma binaria qualsivoglia d'ordine pari. Le linee generali di questo metodo trovansi già in una mia comunicazione all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia di molti anni ora sono (1), ma in allora le mie ricerche erano più specialmente rivolte alle forme ternarie e perciò non mi occupai delle binarie che incidentalmente.

« Indicando con $f(y_1, y_2)$ una forma binaria dell'ordine n pari, e ponendo:

$$f(y_1 z_1 - f_2 z_2, y_2 z_1 + f_1 z_2) = f(y_1, y_2)\,(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)(z_1, z_2)^n$$

nella quale $f_1 = \frac{1}{n}\frac{df}{dy_1}$, $f_2 = \frac{1}{n}\frac{df}{dy_2}$; i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ della trasformata sono, come è noto, covarianti della $f(y_1, y_2)$, e precisamente se con $h, k, A, \ldots t, g, \ldots$ si rappresentano i covarianti:

(1) Comptes Rendus de l'Académie des sciences. Séance du 6 Avril 1863.

$$h=\frac{1}{2}(ff)_2\,,\; k=\frac{1}{2}(ff)_4\,,\; \mathrm{A}=\frac{1}{2}(ff)_6\,,\; t=2\,(fh)\,,\; g=2\,(fk)\ldots$$

sono:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} \alpha_o=1\,,\quad \alpha_1=0\,,\quad \alpha_2=h\,,\quad \alpha_3=t\quad \alpha_4=f^2k-3\,h^2 \\ \alpha_5=f^2g-2ht\quad \alpha_6=f^4\,\mathrm{A}-15\,f^2\,hk+45\,h^3+10\,t^2\,,\ldots \end{array}$$

valori che già trovansi nella teoria delle forme di Clebsch e Gordan.

« Sia $\varphi\,(y_1\,,y_2)$ un covariante di $f(y_1\,,y_2)$ dell'ordine m; e posto:

$$\varphi_1=\frac{1}{m}\frac{d\varphi}{dy_1},\quad \varphi_2=\frac{1}{m}\frac{d\varphi}{dy_2}$$

si consideri la seconda trasformazione:

$$(2)\qquad f\,(y_1z_1-\varphi_2z_2\,,\;\; y_2z_1+\varphi_1z_2)=(\mathrm{A}_o\,,\mathrm{A}_1\,,\ldots\mathrm{A}_n)\,(z_1\,,z_2)^n\,.$$

I coefficienti $\mathrm{A}_o\,,\ \mathrm{A}_1\,,\ldots\ \mathrm{A}_n$ sono essi pure covariati dalla forma f, e si hanno:

$$\mathrm{A}_o=f,\quad \mathrm{A}_1=-(f\varphi)$$

mentre i valori degli altri coefficienti $\mathrm{A}_2\,,\mathrm{A}_3\,,\ldots\mathrm{A}_n$, si deducono dalla formola generale:

$$(3)\qquad f^{r-1}\,\mathrm{A}_r=(\alpha_o\,,\alpha_1\,,\ldots\alpha_r)\,(\mathrm{A}_1\,,\varphi)^r$$

nella quale $\alpha_o\,,\alpha_1\ldots$ hanno i valori superiori.

« 2°. Consideriamo i due casi di $n=4$, $n=6$ e tanto per l'uno che per l'altro caso supponiamo che il covariante φ sia eguale ad h, e quindi $m=4$ nel primo di essi, $m=8$ nell'altro; ed $\mathrm{A}_1=-\frac{1}{2}t$ nei due casi. Per $n=4$ saranno:

$$\alpha_o=1\,,\quad \alpha_1=0\,,\quad \alpha_2=h\,,\quad \alpha_3=t\,,\quad \alpha_4=g_2f^2-3h^2$$

essendo $k=g_2$ l'invariante di secondo grado della biquadratica, e si ha la nota relazione:

$$t^2+4\,h^3=g_2hf^2-g_3f^3$$

e per essa dalla formola (3) si deducono i valori:

$$\mathrm{A}_2=\frac{1}{4}f\,(g_2h-g_3f)\,,\; \mathrm{A}_3=-\frac{1}{8}t\,(g_2h-g_3f),\; \mathrm{A}_4=g_3h^3+\frac{1}{16}f(g_2h-g_3f)^2.$$

Ora i valori stessi nella ipotesi che $f(y_1\,,y_2)=0$ diventano:

$$\mathrm{A}_o=0\quad \mathrm{A}_1=-\frac{1}{2}t,\quad \mathrm{A}_2=0\,,\quad \mathrm{A}_3=-\frac{1}{8}g_2ht\,,\quad \mathrm{A}_4=g_3h^3=-\frac{1}{4}g_3\,t^2$$

e ponendo in luogo di z_1 la espressione $\frac{1}{2}\frac{t}{h}z_1$, la trasformata (2) conduce alla

$$(\mathrm{A}_o,\mathrm{A}_1\ldots\mathrm{A}_4)\left(\frac{1}{2}\frac{t}{h}z_1\,,z_2\right)=\frac{1}{4}\,t^2z_2\,(4z_1{}^3-g_2z_1z_2{}^2-g_3z_2{}^3)\,.$$

« Passiamo al caso di $n=6$. I valori $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_6$ sono dati dalle (1) ed A è in questo caso l'invariante quadratico. È noto che le forme del sesto ordine hanno 26 covarianti ed invarianti, fra i quali sussistono 20 relazioni indipendenti o sigizie. Posto:

$$i=\frac{1}{2}(kk)_2\,,\quad p=(fk)_2\,,\quad l=(fk)_4\,,\quad m=(lk)_2,\quad n=(mk)_2$$

indicando con B, C gli invarianti quadratico e cubico del covariante k, cioè gli invarianti di quarto e di sesto grado di f, e con $D=\frac{1}{2}(mm)_2$ l'invariante del decimo grado, notiamo fra quelle sigizie la:

$$t^2+4\,h^3=f^2\left[hk+\frac{1}{3}fp-f^2A\right]$$

e le

$$k^3-3p^2+12hi=f\left[lk-fB\right]$$

$$Ak^2-6\,Bh+6ki+3\,pl=\frac{3}{2}fm$$

$$16\,i^2+\frac{3}{4}kl^2+2Aki-12Ch=fn$$

per le quali e per altre che si trovano nei lavori dei Sigg. Stephanos, Stroh ed altri, si hanno pei coefficienti A_0, $A_1 \dots$ nella ipotesi di $f(y_1, y_2)=0$ i seguenti valori:

$$A_0=0\,,\quad A_1=-\frac{1}{2}t\,,\quad A_2=0\,,\quad A_3=-\frac{1}{8}kht\quad A_4=-\frac{1}{3}h^3p$$

$$A_5=\frac{1}{12}h^2t\left(\frac{5}{8}k^2-Ah\right),\quad A_6=h^4\left(\frac{1}{2}hl+\frac{1}{12}kp\right)$$

ed essendo nella data ipotesi $t^2+4h^3=0$ si giunge alla:

$$(A_0\,,A_1\dots A_6)\left(\frac{t}{2h^{\frac{3}{4}}}z_1\,,z_2\right)^6=$$

$$=\frac{1}{4^2}\frac{t^4}{h^{\frac{3}{4}}}z_2\,(6z_1^5-g_2z_1^3z_2^2-g_3z_1^2z_2^3-g_4z_1z_2^4-g_5z_2^5)$$

essendo:

$$g_2=5\frac{k}{h^{\frac{1}{2}}},\quad g_3=-5\frac{p}{h^{\frac{3}{4}}},\quad g_4=\frac{5}{8}\frac{k^2}{h}-A\,,\quad g_5=\frac{1}{2}\frac{l}{h^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{12}\frac{kp}{h^{\frac{5}{4}}}$$

ed in conseguenza:

$$k=\frac{1}{5}g_2h^{\frac{1}{2}}\quad p=-\frac{1}{5}g_3h^{\frac{3}{4}}\,,$$

$$A=\frac{1}{5\,.\,8}g_2^2-g_4\,,\quad l=2\left(g_5+\frac{1}{3\,.\,4\,.\,5^2}g_2g_3\right)h^{\frac{1}{4}}\,.$$

Ora, siccome dalle rammentate sigizie, sempre nella ipotesi di $f(y_1, y_2) = 0$, si hanno le:

$$4Bh^2 = k\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) + \frac{2}{3}Ahk^2 + 2phl$$

$$12Ch^3 = \left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right)^2 + \frac{1}{2}Ahk\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) + \frac{3}{4}kh^2l^2$$

$$Dh^5 = \left[\frac{1}{4}h^2l^2 + \frac{1}{6}Ah\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) + \frac{2}{3}Bh^2k\right]^2 -$$

$$- h^2 m\left[\frac{1}{3}Bh^2p - hl\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) - \frac{1}{2}Akh^2l\right]$$

essendo:

$$h^2m = p\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) + \frac{2}{3}hk(Ap + kl)$$

si giunge al seguente teorema: *I quattro invarianti* A, B, C, D *della forma binaria del sesto ordine* $f(y_1, y_2)$ *sono funzioni intiere e razionali dei quattro coefficienti* g_2, g_3, g_4, g_5.

« 3°. Indicando con ϱ un fattore di proporzionalità, e posto:

$$(4) \qquad \varrho x_1 = y_1 z_1 - \varphi_2 z_2, \quad \varrho x_2 = y_2 z_1 + \varphi_1 z_2$$

si avrà per la (2) che:

$$(5) \qquad \varrho^n f(x_1, x_2) = (A_0, A_1, \ldots A_n)(z_1, z_2)^n$$

e siccome per la stessa definizione di invariante, indicando con ψ un invariante di grado m della forma $f(x_1, x_2)$, si ha:

$$\varphi^{\frac{nm}{2}}\psi = \Psi$$

essendo Ψ lo stesso invariante formato colle $A_0, A_1 \ldots$, vedesi tosto come il teorema precedente debba estendersi a forme d'ordine superiore.

« Supponendo come sopra $n = 6$, $\varphi = h$, $z_1 = \frac{t}{2h^{\frac{3}{4}}} z_1$, il modulo della trasformazione diventa $th^{\frac{1}{4}}$, e quindi:

$$\left(\frac{t^3 h^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^m \psi = \Psi.$$

« Ma per $m = 2, 4, 6, 10$, si deducono da quest'ultima:

$$-\left(\frac{t^4}{4^2 h^{\frac{3}{4}}}\right)^2 \psi = \Psi, \quad \left(\frac{t^4}{4^2 h^{\frac{3}{4}}}\right)^4 \psi = \Psi, \quad \ldots\ldots$$

per ciò indicando con $F(z_1, z_2)$ il polinomio:

$$(6) \qquad F(z_1, z_2) = z_2 (6z_1^5 - g_2 z_1^3 z_2^2 - g_3 z_1^2 z_2^3 - g_4 z_1 z_2^4 - g_5 z_2^5)$$

si avrà che gli invarianti della forma $f x_1, x_2)$ saranno eguali agli invarianti della forma $F(z_1, z_2)$, col segno cambiato nei casi di $m = 2, 6, 10$. Si ottengono in tal modo le:

$$A = \frac{1}{5 \cdot 8} g_2^2 - g_4, \quad B = \frac{1}{3 \cdot 4^2 \cdot 5^4} g_2^4 - \frac{1}{6 \cdot 5^2} g_2^2 g_4 + \frac{1}{6 \cdot 5^3} g_2 g_3^2 + \frac{1}{5} g_3 g_5$$

e così via; come dalle sigizie sopra indicate.

« Dalle relazioni (4) si deduce la:

$$\varrho^2 (x_2 dx_1 - x_1 dx_2) = \varphi (z_2 dz_1 - z_1 dz_2) .$$

« Pel caso di n = 4, posto, come sopra, $\varphi = h$ e $\frac{t}{2h} z_1$ in luogo di z_1, si ha:

$$\frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{\sqrt{(f x_1, x_2)}} = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}}$$

essendo $F(z_1, z_2) = z_2 (4z_1^3 - g_2 z_1 z_2^2 - g_3 z_2^3)$; cioè la nota trasformazione dell'integrale elittico.

« Pel caso di $n = 6$, posto $\varphi = h$, $\frac{t}{2h^{\frac{3}{4}}} z_1$ in luogo di z_1, si giunge alla:

$$\frac{x_1 (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} = (\alpha z_1 + \beta z_2) \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}}$$

$$\frac{x_2 (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} = (\gamma z_1 + \delta z_2) \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}}$$

nelle quali $F(z_1, z_2)$ ha il valore (6) ed

$$\alpha = \frac{y_1}{h^{\frac{1}{8}}}, \quad \gamma = \frac{y_2}{h^{\frac{1}{8}}}, \quad \beta = -2 \frac{h^{\frac{5}{8}}}{t} h_2, \quad \delta = 2 \frac{h^{\frac{5}{8}}}{t} h_1$$

« 4°. Supponiamo ora che $f(y_1, y_2)$ non sia eguale a zero. Dalla equazione (5), rammentando la proprietà dei covarianti $A_2, A_3 \ldots$ (equaz. 2 . S. 1°), si deduce la:

$$\varrho^n f^{n-1} f(x_1, x_2) = \varphi^n (\alpha_o, \alpha_1, \ldots \alpha_n) (X, 1)^n$$

posto:

$$X = \frac{f z_1 + A_1 z_2}{\varphi}$$

ed f in luogo di $f(y_1, y_2)$.

« Suppongo che le z_1, z_2, φ abbiano i seguenti valori:

$$z_1 = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} z\,, \quad z_2 = x\,, \quad \varphi = fy + h \text{ e quindi } A_1 = -\frac{1}{2} t$$

sarà:

$$X = \frac{1}{2} \frac{f^{\frac{3}{2}} z - t}{fy + h}\,.$$

« Sia $n = 4$, si avrà dalla superiore:

$$\varrho^4 f^3 f(x_1, x_2) = (fy + h)^4 (X^4 + 6h X^2 + 4tX + g_2 f^2 - 3h^2)\,.$$

« Pongasi infine:

$$y = \wp(u)\,, \quad z = \wp'(u)\,, \quad \frac{h}{f} = -\wp(v)$$

sarà, come è noto:

$$\frac{t}{f^{\frac{3}{2}}} = \wp'(v)$$

e quindi:

$$X = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}$$

« Ma (1)

$$g_2 = 12\wp^2(v) - 2\wp''(v)$$

$$\wp''(v) = \wp(v) \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} + 2 \Big(\wp(u) - \wp(v)\Big) \Big[\wp(u + v) - \wp(v)\Big]$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\gamma(u) - \gamma(v)}\right]^2 = \wp(u + v) + \wp(u) + \wp(v)$$

e per queste note relazioni si giungerà alla:

$$\varrho^2 \sqrt{f(x_1, x_2)} = f^{\frac{3}{2}} \Big[\wp(u) - \wp(v)\Big]^2 \Big[\wp(u) - \wp(u + v)\Big]$$

la quale equivale alla seguente (2):

$$\varrho^2 \sqrt{f(x_1, x_2)} = \frac{1}{2} \Big[t\wp'(u) + f^{\frac{1}{2}} h \wp''(u) + f^{\frac{3}{2}} \Big(\wp(u)\wp''(u) - \wp'^2(u)\Big)\Big]\,.$$

« Notisi che essendo nel caso generale:

$$\varrho x_1 = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} z \,.\, y_1 - (f_2 y + h_2)\,, \qquad \varrho\, x_2 = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} z \,.\, y_2 + (f_1 y + h_1)$$

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*. Première partie, pag. 120.

(2) Klein, *Ueber hyperellitische Sigmafunctionen*, Math.e Annalen, Bd. XXVII, pag. 458, trovasi questa stessa formola ma l'ultimo termine del secondo membro non è esatto.

si ha supponendo z funzione di y:

$$\varrho^2\left(x_2\frac{dx_1}{dy}-x_1\frac{dx_2}{dy}\right)=(fy+h)\left[\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{dy}-\mathrm{X}\right]$$

dalla quale, pel valore di X, ottiensi la:

$$\varrho^2(x_2dx_1-x_1dx_2)=\frac{(fy+h)^2}{f}d\mathrm{X}\,.$$

« Se $n=4$ si ha per una nota formola:

$$\frac{d\mathrm{X}}{du}=f^{\frac{1}{2}}\left[\wp(u)-\wp(u+v)\right]$$

e per essa siamo ricondotti alla:

$$\frac{x_2dx_1-x_1dx_2}{\sqrt{f(x_1,x_2)}}=du\,.$$

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine dei fenomeni solari osservati al R. Osservatorio del Collegio romano nel 1° trimestre del 1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Come fu dichiarato nella mia precedente Nota il numero dei giorni di osservazione fu per le protuberanze di 40 e di 57 per le facole e macchie. Ecco i risultati ottenuti per la frequenza nelle diverse zone in ciascun emisfero del sole:

1° trimestre 1895.

Latitudine	Protuberanze		Facole		Macchie	
90° + 80°	0,000	0,505				
80 + 70	0,000					
70 + 60	0,005					
60 + 50	0,009					
50 + 40	0,009		0,000	0,423		
40 + 30	0,054		0,006			
30 + 20	0,116		0,055		0,056	0,465
20 + 10	0,138		0,178		0,296	
10 . 0	0,174		0,184		0,113	
0 — 10	0,089	0,495	0,184	0,577	0,183	0,535
10 — 20	0,125		0,221		0,253	
20 — 30	0,111		0,123		0,099	
30 — 40	0,049		0,043			
40 — 50	0,094		0,006			
50 — 60	0,022					
60 — 70	0,000					
70 — 80	0,005					
80 — 90	0,000					

« In questo primo trimestre del 1895 la frequenza delle protuberanze è risultata per zone pressochè eguali nei due emisferi. Le protuberanze furono sempre abbastanza frequenti al nord fra l'equatore e $+30$ gradi e al sud dell'equatore fino a -50 gradi.

« Le facole continuarono a presentare una maggiore frequenza nelle zone australi, e il massimo di frequenza avvenne nella zona $(-10^\circ - 20^\circ)$ come nel precedente trimestre.

« Le facole furono sempre molto frequenti dall'equatore a $+20^\circ$ e -30° come nell'ultimo trimestre del 1894.

« La frequenza delle macchie è maggiore nelle zone australi come nel precedente trimestre, con due massimi di frequenza nelle zone $\pm 10^\circ \pm 20^\circ$.

« Nessuna eruzione metallica, propriamente detta, fu osservata in questo periodo, e solo nel 23 febbraio fra $+23^\circ$ e $+13^\circ$, bordo ovest, furono vedute invertite le b_1, b_2 e la 1474. K. Molte volte invece fu osservata vivissima la D_3 in protuberanze e attorno a macchie. Noteremo in fine, che in tutte le macchie osservate al nascere o tramontare si riscontrò calma, cioè mancanza di fenomeni eruttivi e di protuberanze ».

Astronomia. — *Osservazioni del pianeta (306) Unitas in IV^{ta} opposizione.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

« Nella seduta del 3 marzo 1895 ebbi l'onore di presentare all'Accademia gli elementi ellittici di (306) Unitas, osculanti in IV^a opposizione, tenuto conto delle perturbazioni per Giove e Saturno.

« Il pianeta fu da me ritrovato senza pena all'equatoriale di 25^{cm} di apertura, e lo osservai il 30 marzo e il 4 aprile. Le correzioni all'effemeride, che ho pubblicato nel Giornale « Die astronomische Nachrichten » sono le seguenti:

1895 marzo 30	$\Delta\alpha\,(0-C) -13^s,12$	$\Delta\delta + 64'',5$
1895 aprile 4	$-13,45$	$+63,7$

« L'opposizione è favorevolissima alla correzione degli elementi, dacchè il pianeta viene vicino alla terra; ed in verità gli elementi fondamentali sono di già assai vicini al vero, soltanto μ domanderà una correzione un po' forte di circa $-0'',1$, L_0 circa $+30''$, π circa $-200''$. Queste correzioni sono soltanto provvisorie.

« Le correzioni definitive verranno fatte dopo trascorso tutto il periodo utilmente osservabile ».

Meccanica. — *Sul moto permanente d'un gas perfetto in un tubo, e del suo effusso.* Memoria del Corrispondente G. B. Favero.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Astronomia. — *Sopra l'orbita definitiva della Cometa IV, 1890.* Nota di T. Zona, presentata dal Socio Tacchini.

Geodesia. — *L'attrazione locale nella Specola geodetica di S. Pietro in Vincoli in Roma.* Nota di V. Reina, presentata dal Socio Cremona.

Matematica. — *Sopra una certa classe speciale di superficie.* Nota di C. Fibbi, presentata dal Socio Dini.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Formazione della cuprite nella elettrolisi del solfato di rame.* Nota del dott. Quirino Majorana [1], presentata dal Socio Blaserna.

« È già conosciuto che, quando si assoggetta all'azione della corrente elettrica del solfato di rame sciolto nell'acqua, devonsi osservare speciali condizioni perchè si abbia un netto deposito di rame metallico.

« Oltre alla più o meno grande quantità di solfato di rame contenuta in un dato volume di acqua, ed all'acido solforico che può trovarsi libero in seno alla soluzione, ha segnatamente influenza sul risultato dell'elettrolisi la densità della corrente. Se questa è troppo grande, si produce un deposito poco aderente di rame metallico, se troppo debole, si dà luogo a reazioni secondarie che hanno come prodotto finale del rame combinato.

« Generalmente però quest'ultimo fatto, sebbene venga osservato da chiunque si accinga a studiare l'elettrolisi di quel sale, non è stato oggetto di ricerche speciali, anzi si cerca per solito di schivare che avvenga.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto fisico della Università di Roma.

« È però notevole che in determinate condizioni il rame si depone sulla lamina negativa del voltametro allo stato di cuprite $Cu^2 O$, e questo deposito osservato al microscopio si scinde in minutissimi cristalli ottaedrici di un bel rosso-rubino.

« Il sig. Brown (1), americano, aveva osservato dei cristalli di cuprite di considerevoli dimensioni che si erano formati sul rame di certe pile Callaud abbandonate a loro stesse per due o tre mesi. Questo fatto venne spiegato dall'autore con l'ammettere una lenta azione elettrolitica.

« Più tardi il sig. Chassy (2) sottoponendo a caldo all'azione della corrente elettrica una soluzione di solfato di rame, otteneva il deposito minutamente cristallino di cui ho detto dianzi. Egli osservava che il deposito di cuprite si formava tanto più facilmente quanto più alta era la temperatura, e che alla temperatura ordinaria non era più possibile ottenerlo. Ho attribuito quest'ultima asserzione al fatto di avere il sig. Chassy adoperato delle correnti elettriche i cui valori non erano inferiori ad un centesimo di ampère per centimetro quadrato di elettrodo. Ed infatti ho potuto ottenere lo stesso deposito alla temperatura ordinaria servendomi di correnti molto meno dense.

« Noto anzitutto che la formazione della cuprite non è affatto dovuta ad ossigeno libero contenuto nella soluzione, poichè essa avviene anche se questa è stata ripetutamente bollita. Questo fatto del resto era già stato osservato dallo stesso Chassy.

***

« Il solfato di rame da me adoperato era quello del commercio ricristallizzato tre volte. Due voltametri in serie, contenenti soluzione di questo sale, satura alla temperatura ambiente nell'uno, ed alquanto più diluita e leggermente acidata da acido solforico nell'altro, erano sottoposti all'azione della corrente elettrica di due accumulatori genere Plantè. Nel circuito era pure inserita una cassetta di alte resistenze, ed una bussola del Wiedemann destinata ad osservare la costanza della corrente.

« Il voltametro a soluzione satura era formato da due lastrine di platino che presentavano una superficie di 12 centimetri quadrati per faccia, immerse in un vaso della capacità di 350 centimetri cubici. Quello a soluzione acidata, invece che con le lastre di platino, era formato con fili del medesimo metallo. È stato adoperato questo artificio al fine di avere nel voltametro acidato a parità di superficie di elettrodi, una maggiore densità di corrente. Con ciò in tutti i casi in cui si è sperimentato si è ottenuto nel voltametro a soluzione satura del rame, e corrispondentemente cuprite od anche rame nell'altro.

(1) American Journal of sciences V. 32, pag. 377-80.
(2) Comptes rendus de l'Académie des sciences, CXIX, pag. 271.

« La temperatura in un primo periodo di esperienze è variata dai 13 ai 16 gradi centigradi. Si è cominciato ad introdurre nel circuito una resistenza di circa 2000 ohm, e successivamente la si è fatta decrescere sino a circa 250. In queste condizioni la densità della corrente per centimetro quadrato di elettrodo è variata da un diecimillesimo ad un millesimo circa di ampère. Tali valori furono calcolati in base al peso del rame che si deponeva nel voltametro a soluzione acida.

« Per ogni esperienza veniva cambiata accuratamente la soluzione di solfato di rame del voltametro a soluzione satura, poichè fu sempre osservato che quando, sotto l'azione di una data intensità di corrente e durante un certo intervallo di tempo, la soluzione aveva abbandonato un determinato peso di cuprite, qualora si fosse continuata l'elettrolisi, si sarebbe ottenuto successivamente del rame libero.

« Ho spiegato questo fatto con l'ammettere che siccome la produzione delle cuprite a somiglianza di quella del semplice rame dà luogo a formazione di acido solforico libero, questo rimane nella soluzione, ed impedisce l'ulteriore deposito di cuprite. E quindi per ogni intensità di corrente l'esperienza ha durato sino all'istante in cui, cessando la formazione della cuprite, cominciava quella del rame.

« Ho determinato la quantità di acido solforico, che è restata libera in ogni esperimento nella soluzione, dal peso della cuprite, perchè è certo che ad ogni molecola di cuprite corrispondono due di acido solforico. Avendo quest'ultimo un peso molecolare di 97,82, e quella di 142,3, alla formazione di un'unità in peso di cuprite corrispondono 1,37 di acido solforico.

« Nella seguente tabella, oltre ai dati medii di parecchie esperienze, figurano nell'ultima colonna le percentuali di acido solforico, ottenute in base alla conoscenza di tale rapporto, contenute nel liquido alla fine di ciascuna esperienza:

Voltamero a soluzione		Tempo dopo cui comincia a formarsi il rame		Miliamp. per cmq.	Acido solfor. contenuto nella soluz. (mg)	Rapporto tra il peso del liquido e quello dell'H_2SO_4
acida peso del rame (mg)	satura peso della cuprite (mg)	ore	minuti			
920	978	179	30	0.181	1340	0.004
511	547	47	15	0.382	749	0.0021
60	65	4	15	0.512	89	0.0002
30	38	1	10	0.923	52	0.0001

« Le ultime tre colonne di questa tabella sono state dedotte dalle precedenti. Si vede dunque che con l'aumentare dell'intensità della corrente elettrica, decresce la percentuale di acido solforico che è per così dire tollerata

dalla formazione della cuprite. Se avessi esperimentato con intensità di corrente ancora maggiori, sarebbero bastati degli intervalli di tempo ancora minori, per cominciare a formarsi del rame.

* * *

« Il deposito di cuprite era formato da piccoli cristalli di color rosso rubino. Le loro dimensioni erano tanto più grandi quanto più debole era l'intensità della corrente elettrica. Quando questa raggiungeva un millesimo di ampère circa per centimetro quadrato, la dimensione media dei cristalli microscopici era di circa $^1/_{90}$ di millimetro. Questa grandezza arrivava sino ad $^1/_{20}$ per un' intensità di 0,00018 amp. Probabilmente dunque se avessi operato con delle correnti di minori intensità, si sarebbero ottenuti cristalli ancora maggiori.

« Questo fatto coincide con quello trovato dal Brown, e precedentemente citato, il quale aveva osservato dei cristalli di considerevoli dimensioni in certe sue pile. In quel caso una debolissima corrente aveva operato la decomposizione del solfato di rame.

« Ho fatto osservare che per qualsiasi intensità di corrente tra quelle da me adoperate, dopo un tempo più o meno lungo, alla formazione della cuprite succedeva quella del rame libero. Questo cominciava a presentarsi frammisto ai cristallini di cuprite col suo colore caratteristico. Anzi, se la corrente era abbastanza debole, potevano ottenersi cristalli ben definiti di quel metallo. Con delle intensità di 0,18 miliampere di corrente per centimetro quadrato, i cristallini di rame cominciavano a formarsi quando nel liquido esisteva il 0,004 di acido solforico. Essi erano nitidissimi al microscopio, presentandosi sotto forma di ottaedri ben delineati della dimensione media di $^1/_{15}$ di millimetro.

* * *

« Un secondo periodo di esperienze da me fatte ha compreso l'elettrolisi del solfato di rame a caldo. La soluzione è stata saturata alla temperatura ambiente di 15° centigradi e rimanendo con tale titolo è stata riscaldata. Ho operato alla temperatura di 74°. Il voltametro era automaticamente rifornito di acqua, in guisa da non alterare la percentuale di solfato di rame contenutavi. Un secondo voltametro unito in serie col primo e di minori dimensioni, dovendo fornire, in corrispondenza della cuprite del primo, l'indicazione del peso di rame libero, era tenuto a freddo.

« Come già aveva trovato Chassy, quando l'elettrolisi è avvenuta a caldo ho ottenuto cuprite invece del rame, anche con intensità di corrente molto maggiori di quelle con cui ho lavorato a freddo. Ed infatti anche $^1/_{100}$ di ampère per cm. q. a 74° dava deposito di cuprite.

* * *

« È notevole, nelle varie condizioni di esperimento, la differenza tra i pesi della cuprite in uno dei voltametri e del rame nell'altro. Dalla tabella

precedente si osserva che quando il voltametro era tenuto alla temperatura ambiente di circa 15 gradi, è stato sempre maggiore il peso della cuprite.

« Se si fa il calcolo dei varî pesi di cuprite che si otterrebbero combinando il rame del voltametro a soluzione acida con la corrispondente quantità di ossigeno, si ottiene

A peso rame voltam. acido	B peso cuprite voltam. saturo	C peso cuprite calcolato da A	$\frac{B}{C}$
920	978	1036	0,94
511	547	575	0,95
60	65	68	0,96
30	38	34	1,12

« Nel secondo periodo di esperienze ho osservato che alzando la temperatura della soluzione di solfato di rame, il rapporto $\frac{B}{C}$ andava continuamente aumentando; e che a 74° diveniva 1,27 in media. Chassy alla temperatura ancora superiore di 100° aveva trovato il valore 1,35.

*
* *

« Dai precedenti risultati si vede che il lavorio della corrente, a parità di quantità di elettricità può, quando si esperimenta a caldo separare dalla soluzione di solfato di rame un peso di rame ossidato superiore a quello del rame libero. Ora, a priori, dovrebbe essere il peso del primo doppio di quello del secondo; ma l'esperienza dimostra invece che anzichè ottenersi il valore 2 per rapporto di quei pesi, si ottengono dei valori i quali partendo da 0,95 alla temperatura ordinaria, arrivano solo sino a 1,35 a 100°. Sorge dunque spontanea l'idea che la cuprite che si forma sotto l'azione della corrente elettrica non arriva al peso voluto dalla precedente ipotesi, perchè, per una reazione estranea al lavorio della corrente elettrica, si ridiscioglie in parte appena formatasi nell'acido solforico contenuto nel liquido.

« E tale reazione secondaria avviene tanto più facilmente, quanto più lento è il depositarsi di quell'ossido; per cui resta anche spiegato come quando l'elettrolisi è stata fatta a caldo, ed essendo state adoperate densità di corrente più grandi, si sieno ottenuti valori crescenti di quel rapporto.

*
* *

« Da queste ricerche posso pertanto concludere che quando si studia l'elettrolisi del solfato di rame, anche se si lavora con intensità debolissime di corrente, se vuolsi evitare la formazione della cuprite basta una lievissima aggiunta di acido solforico, come si può più precisamente rilevare dalle cifre precedentemente riportate ».

Fisica terrestre. — *Sui terremoti giapponesi del 22 marzo 1894.* Nota di G. GRABLOVITZ, presentata dal Socio TACCHINI.

« In una mia precedente Nota (1) esposi i dati delle osservazioni sulle quali basai l'apprezzamento della provenienza delle ondulazioni sismiche avvertite in Italia il 22 marzo 1894, senza peraltro conoscere ancora in dettaglio le circostanze che i fenomeni sismici avevano presentate nel Giappone, luogo della loro origine, nonchè altrove.

« Ora, avendo ottenuto dalla cortesia dell'ill.mo Sig. Direttore del R. Ufficio Centrale il materiale d'altre località, mi trovo in grado di esporre nuovi particolari a conferma di quanto allora esposi.

« Le mie prime indagini riguardanti la ricerca dell'epicentro ebbero per base i moti oscillatorî in cui vennero sorprese le livelle geodinamiche a $12^h\ 22^m$ del detto giorno, e chiunque abbia letto la mia Nota non può non essere rimasto colpito della soddisfacentissima determinazione dell'azimut da cui provennero le onde, fatta in base ai dati delle osservazioni qui eseguite e, senza la possibilità di un'idea preconcetta, immediatamente comunicati al R. Ufficio Centrale. Questo dato, insieme ad altre considerazioni esposte nella Nota stessa, mi rivelò subito la vera provenienza del terremoto. Infatti dalle informazioni del prof. Milne facenti parte del detto materiale, risulta che la maggior scossa ebbe centro a 43° N. e 136° Est Greenwich, punto che s'allontana di soli 30 chilometri dal circolo massimo da me calcolato in base alla sola osservazione delle livelle.

« Per ciò che riguardava la distanza dell'epicentro io, prendendo per base la velocità di 300 chilometri al minuto per le onde *longitudinali* e quella di 150 per le *trasversali*, ottenni come risultato 9300 chil., mentre il punto designato dal prof. Milne, come epicentro dista circa 9400 chil. dal centro della nostra penisola.

« Riguardo all'istante, non avendosi altra notizia che quella della grande scossa delle 7,28 pom. di tempo locale, ch'io credetti espresse in t. m. di Tokio, trovai soddisfacente l'accordo, ma invece ora dal diagramma stesso di Tokio rilevo in testa alla copia cianografata la seguente scritta: Earthquake « March 22, 1894. $7^h\ 27^m\ 49^s$ p. m. (Tokio time) Record made at the University of Tokio. Tokio time is for Long. 135° E. or 9 hours before G. M. T. », la quale mentre rivela l'origine del primo equivoco, toglie ogni dubbio sul meridiano cui il dato si riferisce.

(1) *Sulle indicazioni strumentali del terremoto giapponese del 22 marzo 1894.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. III, 2° sem., pag. 61.

« La scossa più forte avvenne dunque nel Giappone ad $11^h\ 27^m\ 49^s$ M.E.C. Questa fu preceduta da una scossa più leggiera a $11^h\ 7^m\ 19^s$ e seguita da altra pure debole a $11^h\ 48^m\ 53^s$ M.E.C.

« Da tale equivoco riguardante l'istante il signor dott. Agamennone trae argomento per mettere in dubbio in una sua Nota (1) la verità della coincidenza riscontrata dal dott. Cancani (2) e da me, tra l'istante in cui avvenne realmente il terremoto nel Giappone e quello dedotto in base alla teoria delle due forme d'onda sulle osservazioni fatte in Italia. Ora debbo osservare che il movimento iniziale secondo le relazioni pubblicate nel supplemento N. 103 del bollettino del R. Ufficio Centrale, giunse nella nostra penisola pressochè contemporaneamente, cioè a Rocca di Papa a $11^h\ 37^m\ 0^s$ a Siena a $11^h\ 37^m\ 11^s$ ed a Roma a $11^h\ 37^m\ 20^s$. La distanza tra questi luoghi è trascurabile rispetto al Giappone, tanto più che essi (ed Ischia pure) si allineano quasi sulla normale di quella direzione e perciò credo che adottando il valore di $11^h\ 37^m\ 10^s \pm 10^s$ rimango entro i limiti assoluti del vero.

« Se questo primo impulso fosse dovuto alla seconda scossa del Giappone, converrebbe ammettere che l'urto sismico avesse percorso in $9^m\ 23^s$ la distanza di oltre 9000 chilometri, ossia 1000 chilometri al minuto primo, velocità che non è verosimile. Per questo solo motivo io attribuirei il primo urto alla prima scossa.

« Il secondo periodo, composto pure di tremiti, sarebbe cominciato, sempre a tenore delle suddette relazioni, a Rocca di Papa ad $11^h\ 48^m\ 0^s$, a Siena ad $11^h\ 47^m\ 47^s$ ed a Roma ad $11^h\ 47^m\ 0^s$, cioè ad $11^h\ 47^m\ 30^s \pm 30^s$ e questo urto può attribuirsi alla seconda scossa. Che l'intervallo non sia uguale a quello di Tokio, non è circostanza che distrugger possa il concetto della distinzione tra le due qualità d'onde, ed a spiegarla si può ammettere che la seconda scossa, la più forte e della durata di 10 minuti, obbedendo ad impulsi più violenti sia giunta con relativa anticipazione. L'A. esigerebbe che questi due impulsi fossero stati avvertiti dall'uomo per dichiararli *longitudinali*, ma io di ciò non sento il bisogno e non tengo conto che dei dati strumentali, i quali mi dimostrano la grande differenza di fisionomia tra il loro tipo e quello delle onde lente; certamente dopo un percorso di 9000 chilometri non si può sperare di trovarvi quella rapidissima successione di urti bruschi che si sarà osservata all'epicentro e nemmeno l'immediata estinzione, non consentita dalla durata di parecchi minuti che hanno d'ordinario i terremoti nel Giappone.

« Riguardo alle successive onde lunghe, i dati che ho a mia disposizione s'accordano pure abbastanza bene. Il Cancani a Rocca di Papa riscontra il

(1) *Sulla variazione della velocità di propagazione dei terremoti ecc.* R. A. L. vol. III, 2° sem., pag. 402.

(2) *Sugli strumenti più adatti allo studio delle grandi ondulazioni provenienti da centri sismici lontani.* R. A. L. vol. III, 1° sem., pag. 551.

principio a $12^h\ 8^m$ ed io sulla fede delle mie osservazioni devo ritenerlo vero perchè le livelle osservate *poco prima* del mezzodì vero ($12^h\ 11^m\ 18^s$ t. m. M.E.C.) erano state trovate in quiete perfetta e quel « *poco prima* » sottintende 3 o 4 minuti, per cui tornano $12^h\ 8^m$ come limite dell' assenza di ondulazioni capaci di perturbare le sensibilissime livelle. A Siena le oscillazioni ampie sinusoidali intervengono a $12^h\ 7^m\ 23^s$ e riguardo a Roma, il diagramma da me attentamente consultato non ismentisce tale istante che si può considerare compreso fra $12^h\ 7^m$ e $12^h\ 8^m$. Questa fase che si protrae alquanto, va, si può dire, a sovrapporsi all'ultima ch'è la più grandiosa; questa si verifica dovunque tra le $12^h\ 18^m$ e le $12^h\ 23^m$ e si può ritenere che il suo ingresso ($12^h\ 18^m\ 23^s$ nel nitidissimo diagramma di Rocca di Papa) rappresenti appunto il principio della sovrapposizione delle due fasi.

« Se ora con la formola già usata si calcola l'ora e la distanza dell'epicentro si trova:

Prima onda longitudinale	$11^h\ 37^m\ 10^s$	Ora all'epicentro	= $11^h\ 6^m\ 50^s$
» » trasversale	12 7 30	Distanza	= chil. 9100
Seconda onda longitudinale	11 47 20	Ora all'epicentro	= $11^h\ 16^m\ 37^s$
» » trasversale	12 18 23	Distanza	= chil. 9265 [1]

« Questo risultato, cui io non avrei annesso gran valore s'adatta abbastanza bene e prova che l'ipotesi delle due forme d'onda trova un'applicazione soddisfacente, specialmente se si considera che l'essenza della questione risiede nell' intervallo che decorre tra le apparizioni dell'una e dell' altra forma e non già nei valori assoluti. D'altronde è bene notare che Tokio si trova alla distanza di 1000 chilometri dall'epicentro assegnato alla scossa più forte.

« Della terza scossa non giova parlare; anzitutto questa può essere stata mascherata dai tremiti pur continui che si osservano dalle $11^h\ 58^m$ alle $12^h\ 8^m$, e poi compresa in quella serie di ondulazioni che continuarono fino a $12^h\ 45^m$; ma d'altronde potrebbe anche aver avuto una zona molto circoscritta, come l'hanno quasi tutti i terremoti. Anzi, è relativamente rarissimo il caso di scuotimenti tanto estesi, e spesso si osserva che una scossa, anche più forte della sua precedente, ha un'area più circoscritta. A spiegazione di ciò saprei appena ventilare in oggi un abbozzo di teorica, ma certo è che l'ordine cronologico delle scosse d'un centro e d'un periodo sismico, rappresenta un fattore non trascurabile nella circoscrizione dell'area scossa.

« Oltre a ciò nel diagramma di Rocca di Papa si scorge chiaramente una bellissima circostanza, che negli altri sfugge in causa della lentezza con cui si svolge la carta; ed è che i moti apparenti della massa verso S W. fu-

[1] Da una nota del Dr. Rebeur-Paschwitz rilevo che a Nemuro (Giappone) la grande scossa cominciò a $11^h\ 20^m\ 45^s$ M.E.C.

rono molto più rapidi di quelli verso N E. Da un calcolo eseguito sulle 17 onde maggiori che si osservarono tra le 12^h 18^m e le 12^h 23^m nella componente NE-SW., il tempo impiegato dalla massa nel compiere le semi-oscillazioni da SW. a NE. fu in termine medio di 11^s0, mentre quello impiegato in senso contrario fu di 5^s9 vale a dire circa la metà, in guisa da darmi il concetto d'una forma ondosa simile a quella delle onde liquide che presentano la maggiore inclinazione dalla parte anteriore. Questa circostanza m' era pure apparsa nella osservazione delle livelle, come si rileva dal seguente periodo che riproduco dalla suddetta mia Nota:

« L'estremità meridionale della bolla Nord-Sud che in istato di quiete, « prima e poi, segnava 13,9, nelle sue escursioni verso Sud toccava appena « 13,0, mentre in quelle verso Nord arrivava a 17,0; da questa circostanza « che non ammetteva incertezza, mi parve poter dedurre che, a somiglianza « delle onde liquide, la maggiore inclinazione ne accusasse la provenienza, « nel qual caso il radiante si sarebbe trovato dal lato di NE ».

« Riguardo all' insensibilità degli strumenti di Yokohama alla prima e terza scossa, non saprei attribuirvi significato serio, perchè Yokohama dista da Tokio appena 20 chilometri, cioè una cosa da nulla rispetto alla distanza dell'epicentro. Parimenti i fotogrammi dei magnetografi e pendoli orizzontali di qualche stazione estera d'Europa non si prestano ad una severa analisi, e non giova discutere a quale forma di moto debbano attribuirsi di preferenza le loro perturbazioni.

« In tutto ciò che ho esposto potrebbe ancora, per insufficienza di dati o ambiguità d'analisi, mancare l'appoggio rigorosamente necessario ad elevare a dogma la distinzione delle due qualità d'onde; ma i casi citati dall'Agamennone non bastano dal loro canto a distruggerla. E per dare un solo esempio citerò l'unica conclusione che trasse dallo studio del terremoto andaluso del 25 dicembre 1884 in due recentissime Note [1], cioè:

« L' ipotesi che la velocità di propagazione sia rimasta press'a poco « invariata fino alla maggiore distanza osservata, mi sembra l'espressione più « naturale dei fatti ».

« In quelle due Note intieramente dedicate a tal fine l'A. dopo esame molto dettagliato, sceglie tra i molti dati i pochi che seguono, cioè:

Cadice (S. Fernando)	Miriametri	20	9^h	18^m	1
Lisbona	»	49	9	19	1
Parigi (Parc St. Maur)	»	141	9	24	0
Greenwich	»	164	9	24	4
Wilhelmshaven	»	206	9	28	8

e ne deduce come ora all'epicentro 9^h 16^m 9 e come velocità *uniforme* di propagazione metri 3150 al secondo, oppure, escludendo la diversità di peso

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. III, 2° sem., pag. 303 e 317.

dei dati, rispettivamente $9^h\,16^m\,6$ e 3060 metri, con risultato cioè poco differente. Ricostruiti i valori col primo di questi due risultati, trova le seguenti differenze tra calcolo ed osservazione, cioè:

Iniziali dei luoghi :	C	L	P	G	W
Osservazione-calcolo :	+ 0,1	— 0,4	— 0,3	— 1,2	+ 1,0

e soggiunge in fine che se l'ipotesi della velocità uniforme fosse realmente lontana dal vero, dovremmo accorgercene dalle stesse differenze ora accennate, poichè le medesime dovrebbero andare crescendo o decrescendo secondo una data legge. Ora (continua) niente di tutto questo si verifica nel nostro caso, dappoichè il senso di lieve accrescimento che si verifica nelle differenze fino a Greenwich, invece di mostrarsi più spiccato, *cambia perfino segno per Wilhelmshaven*, per la qual località la legge sarebbe pur dovuta restar meglio assodata.

« Invece dalle stesse differenze io m'accorgerei di trovarmi alla presenza di una velocità *uniformemente decrescente.* Tant'è vero che migliori risultati s'ottengono assoggettando gli stessi dati alla formola:

$$(H - x)\,v + (H - x)^2\,w = M$$

ove x è l'istante all'epicentro,
H gl'istanti dati per le singole località,
v la velocità iniziale in miriametri al minuto primo,
w la variazione della velocità,
M la distanza dall'epicentro in miriametri.

« Lo sviluppo col metodo dei minimi quadrati mi dà:

$$x = 9^h\,17^m\,35$$
$$v = 28{,}6901$$
$$w = -0{,}93274$$

« Per ricostruire i dati mi valgo della relazione stessa ed ottengo:

Località:	Epicentro	C	L	P	G	W
Osservazioni:	?	$9^h\,18^m\,1$	$9^h\,19^m\,1$	$9^h\,24^m\,0$	$9^h\,24^m\,4$	$9^h\,28^m\,8$
Calcolo :	$9^h\,17^m\,35$	9 18,06	9 19,17	9 23,49	9 24,94	9 28,77
O—C		+ 0,04	— 0,07	+ 0,51	— 0,54	+ 0,03

« La somma delle differenze che nel calcolo dell'A. è 3,0, qui si riduce ad 1,19, cioè non arriva ai $^2/_5$.

« Dall'ulteriore esame del risultato emerge una bellissima circostanza, cioè che il valore v convertito in metri al secondo dà 4782 come velocità iniziale all'epicentro; dopo n minuti la velocità è ridotta a

$$v_n = v - 2nw$$

per cui dopo 10 minuti sarebbe di 10,04 ossia di 1673 al secondo.

« Se invece d'assumere per argomento il minuto (tempo), si assume il miriametro (distanza), il conteggio riesce più spedito e fornisce come velocità all'epicentro, addirittura 13000 metri al secondo, ma appunto in vista di ciò ho prescelto il procedimento più laborioso ma più corretto, all'altro più comune e più favorevole alle mie vedute.

« Con ciò io sono ben lungi dal concludere che questi risultati rappresentino la realtà dei fatti o se mai fossero atti a rappresentarla, potrebbero pure armonizzare con le opinioni emesse dall'A. in due successive Note [1], ove ammette che un ipocentro profondo dà luogo a velocità apparentemente diverse alla superficie; ma intendo semplicemente dimostrare che gli appoggi stessi di cui l'A. si vale a prova della velocità uniforme, approdano appunto al risultato opposto.

« Da quanto premesso si scorge che siamo ancora ben lontani dal poter risolvere la questione in base a dati tanto incerti. Non gratuitamente però io accolsi la teoria del Wertheim risollevata dal Cancani, ma lo feci in base ad altri argomenti la cui pubblicazione sarebbe ancora prematura. Debbo peraltro riconoscere che in oggi tutto si limita ad indizi di buon fondamento, ma sempre indizi, ed a stretto rigore difetta la prova diretta dell'esistenza della componente verticale nelle onde in questione. Tale prova, ne sono convinto, non si potrà mai trarre dai pendoli comuni, nè dai loro surrogati (come pendoli orizzontali, pendoli rovesci e contrapposti, livelle ecc.), perchè tutti questi sono soggetti ad oscillare nel solo senso orizzontale e perciò si contengono in modo identico, sia in presenza di oscillazioni angolari del suolo rispetto all'orizzonte, sia in presenza di movimenti in senso perfettamente orizzontale. Nè varrebbe obbiettare che le deviazioni angolari di durata superiore a quella comportata dalla lunghezza del pendolo debbansi attribuire ad ogni costo alla prima forma; esperienze da me eseguite con ogni precauzione (e convalidate del resto dalla teoria stessa dei moti pendolari) mi hanno dimostrato che un pendolo anche corto si deflette con sincronismo dalla verticale in presenza di oscillazioni lente in senso perfettamente orizzontale e con andamento sinusoidale, e che pendoli di varia lunghezza, in condizioni identiche di moto lento, deflettono dello stesso angolo e non della stessa misura lineare.

« Gli strumenti a base pendolare, atti d'altronde a dare fedelmente le registrazioni cui sono destinati, per l'accertamento dei terremoti e delle loro circostanze, non si prestano punto alla risoluzione del nostro problema che reclama la conquista della componente verticale del moto ondoso tellurico. Tale problema, quale è voluto dagli oppositori del moto stesso, mi pare esprimibile nei seguenti termini:

« I movimenti tellurici che si manifestano negli strumenti pendolari

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. IV, 1° sem., pag. 38 e 62.

« sotto forma di deviazioni dalla verticale, aventi il periodo completo di « parecchi secondi e la forma sinusoidale, sono paragonabili al moto ondoso « del mare, oppure sono perfettamente orizzontali, come conseguenza di con-« trazioni e rarefazioni, prodotte da una successione di urti propagantisi « longitudinalmente sulla superficie da un centro lontano? »

« Confido di poter rispondere decisivamente a tale questione alla prima occasione, mercè i nuovi metodi che ho ideati.

« Del resto tali divergenze d'opinioni sparse fra coloro che indagano i segreti naturali col metodo sperimentale, fanno bene anzichè male alla scienza. Anzichè abbattute d'un sol colpo meritano essere coltivate, perchè atte ad inspirare applicazioni che nessuno avrebbe immaginate a priori, e che già in oggi vanno rischiarando le tenebre in questo grado sublime della nostra ignoranza ».

Chimica. — *Il bromoformio in crioscopia* [1]. Nota di G. Ampola e C. Manuelli, presentata dal Socio Paternò.

« Le numerose ricerche crioscopiche compiute negli ultimi anni, specialmente in Italia, hanno reso probabile che le anomalie alla legge fondamentale di Raoult e van't Hoff dipendano principalmente o dalle relazioni di costituzione, tra solvente e sostanza sciolta, o dalla funzione chimica. Il materiale sperimentale fino ad ora raccolto, non è sufficiente per poterne trarre delle conclusioni generali, con la necessaria sicurezza. L'importanza dei risultati che si possono ottenere da un esteso studio, ci ha spinti ad intraprendere alcune ricerche su questo campo; in questa nota rendiamo conto dei risultati ottenuti impiegando come solvente il bromoformio.

« La costituzione chimica semplice, il punto di fusione e le estese facoltà solventi di questa sostanza, ci erano garanzia che si sarebbe prestata bene al nostro scopo.

« Il bromoformio da noi impiegato proveniva dalla fabbrica Kahlbaum di Berlino e fu purificato lavandolo con acqua alcalina, distillandolo a pressione ridotta, cristallizzandolo e facendolo gocciolare. Il suo punto di congelamento era a 7°.80, e si mantenne tale per tutto il tempo che durarono le esperienze i risultati delle quali sono descritti nelle tavole seguenti.

« Il termometro adoperato era della casa Baudin di Parigi, diviso in $^1/_{50}$ di grado, e segnava da $-3°$ a $+9°$.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto chimico di Roma.

I. Sostanze neutre.

Benzol PM = 78

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
1	0.68	0.13	1.911	149.058
2	0.735	1.38	1.850	144.300
3	1.130	2.035	1.800	140.600
4	2.775	4.76	1.715	133.770
5	3.390	5.745	1.691	131.898
6	3.718	6.22	1.672	130.416
7	4.159	6.90	1.663	128.856

Paraxilene PM = 104.

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
8	0.1711	0.24	1.403	145.964
9	0.6048	0.84	1.388	144.352
10	1.1570	1.60	1.382	143.728
11	2.2434	3.08	1.372	142.688
12	2.6960	3.625	1.344	139.776
13	3.1403	4.08	1.299	135.096
14	3.8610	5.015	1.297	134.888
15	4.6881	6.00	1.283	133.432

Naftalina PM = 128.

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
16	0.2727	0.32	1.173	150.144
17	0.6795	0.78	1.148	146.944
18	1.5225	1.725	1.132	144.896
19	2.5345	2.81	1.108	141.824
20	4.3183	4.72	1.093	139.904
21	6.6349	7.16	1.079	138.112

Paraldeide PM = 132

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
22	0.2538	0.285	1.083	142.956
23	1.4026	1.51	1.076	142.032
24	2.6210	2.84	1.083	142.956
25	3.1722	3.43	1.081	142.692
26	3.5739	3.87	1.082	142.824
27	4.1379	4.44	1.073	141.636
28	5.6857	5.98	1.051	138.732
29	6.0321	6.40	1.060	139.920

Ossalato d'etile PM = 114.

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
30	0.8039	0.82	1.020	116.280
31	1.5262	1.545	1.012	115.268
32	2.5326	2.54	1.002	114.228
33	3.3256	3.35	1.007	114.798
34	4.4093	4.39	0.995	113.430
35	5.4974	5.46	0.993	113.202
36	6.2565	6.20	0.990	112.860
37	7.6270	7.68	1.006	114.684

Tiofene PM = 84.

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
38	0.2915	0.51	1.749	146.910
39	1.0018	1.695	1.691	142.004
40	2.3127	3.805	1.645	138.180
41	2.8727	4.68	1.628	136.752
42	3.3349	5.34	1.601	134.484
43	4.2624	6.74	1.581	132.804
44	5.4856	8.48	1.545	129.780

Cloroformio. PM = 120

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
45	0.1156	0.14	1.211	145.320
46	0.4408	0.47	1.068	128.16
47	1.7928	1.89	1.054	126.48
48	3.0534	3.10	1.015	121.80
49	4.2092	4.185	0.994	119.28
50	4.9495	4.815	0.972	116.64
51	5.5981	5.36	0.957	114.84
52	6.1207	5.765	0.941	112.92
53	6.8636	6.36	0.926	111.52

II. Acidi.

Acido acetico PM = 60

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
54	0.2240	0.28	1.250	92.50
55	0.8210	0.945	1.151	85.175
56	1.9405	2.08	1.077	79.698
57	3.1531	3.125	0.991	73.334
58	4.9923	4.585	0.918	55.080
59	5.3711	4.84	0·901	54.060
60	6.0743	5.32	0.875	52.500
61	6.4929	5 58	0.859	51.540
62	7.4944	6.185	0.825	49.500

Acido isobutirrico PM = 88

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
63	0.6924	0.695	1.002	88.176
64	1.5792	1.265	0.801	70.488
65	2.7539	2.07	0.751	66.088
66	4.0937	2.90	0.708	62.304
67	5.2204	3.66	0.701	61.688
68	6.6034	4.43	0.670	58.960
69	7.4497	4.83	0.648	57.024
70	8.3523	5.32	0.636	55.968
71	11.2364	6.76	0.601	52.888

III. Fenoli.

Fenol PM = 94

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
72	0.1987	0.28	1.459	137.146
73	0.6016	0.775	1.288	121.072
74	1.1596	1.345	1.159	108.946
75	2.0698	2.04	0.985	93.590
76	3 1519	2.69	0.853	80.182
77	3.6155	2.92	0.807	75.858
78	4.1018	3.15	0.770	72.380
79	4.6432	3.40	0.734	68.996
80	5.3482	3.72	0.695	65.330
81	7.9757	4.78	0.599	56.306
82	9.1087	5.20	0.570	53 58

Timol PM = 150

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
83	0.1913	0.18	0.940	141.00
84	0.6833	0.62	0.907	136.05
85	1.2577	1.10	0.874	131.10
86	2.1183	1.76	0.830	124.50
87	2.7428	2.21	0.805	120.75
88	3.5566	2.74	0.770	115.50
89	4.5852	3.34	0.728	109.26
90	5.9726	4.10	0.686	102.90
91	7.9647	5.06	0.635	95.25
92	10.1607	6.00	0.590	88.50

IV. Alcooli.

Etilalcool PM = 46

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
93	0.1203	0.31	2.576	118.496
94	0.4181	1.03	2.464	113.344
95	0.8331	1.685	2.022	93.012
96	1.3222	2.245	1.697	78.062
97	1.9382	2.705	1.395	67.070
98	2.8577	3.23	1.130	51.980
99	4.9918	4.065	0.814	37.444
100	6.0976	4.41	0.723	30.158
101	7.4723	4.75	0.635	29.210
102	9.6242	5.235	0.543	24.978
103	11.8716	5.42	0.456	21.976
104	15.8477	5.95	0.353	16.238

Trimetil-carbinol PM = 74

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
105	0.1785	0.32	1.792	132.608
106	0.5882	1.00	1.700	125.800
107	1.1949	1.59	1.330	98.420
108	2.2179	2.78	1.253	92.722
109	3.8275	3.925	1.025	75.650
110	5.4871	4.70	0.854	63.196
111	6.0642	4.95	0.801	59.274
112	7.0688	5.345	0.756	55.944
113	7.3592	5.425	0.737	54.438
114	8.3510	5.60	0.670	49.580

Alcool benzilico PM = 108

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
115	0.4441	0.56	1.283	138.564
116	0.9067	1.055	1.163	125.604
117	1.5745	1.65	1.047	113.076
118	2.5133	2.32	0.923	99.684
119	3.9513	3.16	0.799	86.292
120	4.8184	3.59	0.745	80.460
121	6,0183	4.18	0.694	74.952
122	7.5291	4.86	0.645	69.660
123	9.7272	5.80	0.596	64.380
124	12.5139	7.04	0.562	60.696

Etere bimetilico della glicerina PM = 120

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
125	0.2993	0.34	1.135	136.200
126	0.8487	0.94	1.119	134.280
127	1.6961	1.79	1.055	126.600
128	2.7464	2.76	1.004	120.480
129	4.0957	4,01	0.978	117.360
130	5.4025	5.14	0.951	114.120
131	6.2142	5.825	0.937	112.44
132	7.0903	6.54	0.922	110.64
133	8.1348	7.53	0.925	111.000

V. Alcaloidi.

Anilina PM = 93

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
134	0.2120	0.35	1.650	153 450
135	0.7672	1.225	1.596	148.428
136	1.6470	2.52	1.530	142.290
137	3.0787	4.58	1.487	138.291
138	3.4079	4.99	1.464	136.152
139	3 9527	5.70	1.442	134.106
140	4.6002	6.46	1.404	130.572
141	4.8933	7.30	1.491	132.363

Dimetilanilina P M = 121

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
142	0.7438	0.89	1.196	144.716
143	1.2692	1.52	1.197	144.837
144	1.7578	2.13	1.211	146.531
145	2.3771	2.88	1.215	147.015
146	3.1379	3.75	1.193	144.353
147	4.4031	5.30	1.203	145.563
148	5.4193	6.42	1.184	142.264

Chinolina P M = 129

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
149	0.3919	0.485	1.237	159.573
150	1.2774	1.49	1.166	150.414
151	2.4824	3.18	1.123	144.867
152	3.4754	3.88	1.116	143.964
153	4.5224	5.11	1.129	145.641
154	5.5309	6.18	1.118	144.222
155	6.4594	7.26	1.123	144.867

Piridina P M = 79.

N. d'ordine	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare
156	0.5349	0.35	0.6541	51.673
157	1.0324	1.205	1.1671	92.200
158	1.5092	2.04	1.3516	106.776
159	2.2245	3.31	1.4879	117.534
160	2.7535	4.24	1.5390	121.581
161	3.6358	5.78	1.589	125.531
162	4.0984	6.58	1.605	126.795
163	4.3058	7.06	1.639	129.481

« Dall'esame di questi risultati si scorge che il bromoformio come solvente nelle ricerche crioscopiche si comporta in modo corrispondente alla benzina studiata da Paternò [1] ed al paraxilene studiato da Paternò e Montemartini [2], almeno nei casi più generali; difatti:

1. Hanno un comportamento che può dirsi normale la benzina, la naftalina, il paraxilene, la paraldeide, il tiofene, il cloroformio; l'ossalato di etile fa eccezione, e dà un abbassamento molecolare molto al di sotto del normale, ma che si mantiene notevolmente costante col variare la concentrazione; lo stesso fenomeno del resto lo presenta pure sciolto nel paraxilene; difatti in questo solvente, per concentrazioni che variano da 0,657 a 7,619 %, l'abbassamento molecolare varia tra 40,00 e 39,57 [3] e nel bromoformio per concentrazioni comprese tra 0,8039 e 7,6270 % l'abbassamento si mantiene tra 115 e 113 circa; il comportamento nella benzina non può considerarsi del tutto diverso, secondo le esperienze di Auwers [4]. Il tiofene che nella benzina si comporta in modo anomalo, nel bromoformio invece si comporta normalmente corrispondentemente a cio che avviene nel paraxilene.

2. Di acidi non ne abbiamo studiato che due, l'acetico e l'isobutir-

(1) Gazzetta chimica, XIX, 640.
(2) Gazzetta chimica, XXIV, 2.
(3) Paternò e Montemartini, loco citato.
(4) Zeit. f. phys. Chemie, t. XII, 693.

rico, ed i valori ottenuti che oscillano con molta approssimazione attorno alla metà dei normali, non lasciano dubbio, che anche gli acidi si comportino col bromoformio come con la benzina ed il paraxilene.

3. Per i due fenoli studiati l'analogia con la benzina ed il paraxilene non potrebbe essere più completa. Per il fenol comune già in soluzioni diluite si ha un abbassamento molecolare molto inferiore al normale, e questo valore si riduce a meno della metà per concentrazioni poco superiori al 4 $^0/_0$. Pel timol l'anomalia è meno pronunziata ed in soluzioni diluite si hanno valori pressochè normali e che decrescono molto più lentamente aumentando la concentrazione.

4. Il comportamento degli alcooli corrisponde completamente a quello nella benzina e nel paraxilene. In soluzioni diluite si hanno valori normali o quasi, ma questi per l'abbassamento molecolare decrescono rapidamente col crescere la concentrazione sino ad essere molto piccoli per concentrazioni che di poco superano il 10 $^0/_0$; nè il fenomeno caratteristico dei composti a funzione alcoolica si limita ai primi termini.

5. Quanto agli alcaloidi, si comportano in modo affatto normale la dimetilanilina e la chinolina; per l'anilina l'andamento del fenomeno è normale in soluzioni diluite ma aumentando la concentrazione i valori dell'abbassamento molecolare decrescono, come avviene per soluzioni nella benzina e nel paraxilene.

« Strano è il comportamento della piridina, ma su questo ci proponiamo di ritornare fra breve.

« Dalle nostre esperienze, benchè non sieno numerosissime, ci sembra risulti in modo evidente, che il bromoformio, come solvente nelle ricerche crioscopiche, si comporti con le sostanze di varia funzione chimica, esattamente come la benzina ed il paraxilene. Altre conclusioni d'ordine generale, non ci pare potere per ora trarre dalle nostre esperienze; solo diremo che queste ci sembra confermino quanto ha recentemente affermato il prof. Paternò, che cioè, nelle anomalie alla legge di Raoult bisogna tener molto conto della funzione chimica oltrechè dell'analogia di costituzione e dell'isomorfismo tra sostanza sciolta e solvente; nel bromoformio si comportano in modo anormale quelle sostanze che dànno valori anormali nella benzina e nel paraxilene; mentre il cloroformio che ha con esso così stretta relazione di costituzione si comporta normalmente.

« La costante da scegliersi come abbassamento molecolare del bromoformio non abbiamo potuto calcolarla con la formola di van't Hoff, non essendo noto il calore latente di fusione.

« Scegliendo tra le esperienze fatte quelle relative a sostanze che hanno un comportamento più regolare, e tenendo conto dei dati forniti da soluzioni nelle quali l'abbassamento termometrico è compreso tra 0°,5 e 4° si hanno le seguenti medie:

Benzina (2-3)	142,45
Naftalina (10-11-12)	144,55
Paraxilene (17-18-19)	145,37
Paraldeide (22-23-24-25-26)	142,62
Tiofene (38-39-40)	142,36
Anilina (135-136)	145,46
Dimetilanilina (142-143-144-145-146).	145,61
Chinolina (150-151-152)	146,41
di cui la media generale è . . . 144,35	

e crediamo quindi che come costante dell'abbassamento molecolare si possa scegliere il numero 144.

« Con la regola di Raoult, che una molecola di una sostanza qualunque sciolta in 100 molecole di un solvente qualunque produce nel punto di congelamento del solvente un abbassamento costante di 0°.62 si calcola il valore 156,86 ».

Chimica. — *Sull'azione del cloridrato d'idrossilammina sul gliossale* (1). Nota di A. Miolati, presentata dal Socio Cannizzaro.

« Preparando la gliossima per azione del cloridrato d'idrossilammina sul gliossale avevo osservato nel prodotto grezzo che si otteneva, un comportamento non conforme a quello della gliossima.

« Scaldato su lamina di platino, invece di fondere, come fa la gliossima, esplodeva, e, a seconda delle diverse preparazioni, più o meno violentemente. Anche il suo comportamento col cloruro di acetile o coll'anidride acetica non era normale. Mentre la gliossima si scioglie in questi reagenti formando i prodotti acetilati e le soluzioni che così si ottengono non si alterano col riscaldamento; il prodotto diretto dall'azione del cloridrato d'idrosslammina sul gliossale scaldato con cloruro di acetile od anidride acetica si scompone violentemente, carbonizzandosi in gran parte.

« Fu appunto una di queste scomposizioni violente, che non fu per me senza conseguenze, che m'indusse a ricercare la causa di questo comportamento. E potei così trovare che, nell'azione dell'idrossilammina sul gliossale in soluzione acida, accanto alla gliossima, si forma in quantità più o meno forti un'altro composto dotato di proprietà esplosive rimarchevoli, e che si può separare approfittando della diversa sua solubilità nei solventi organici ordinarî (2).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Univesità di Roma.

(2) Volendo preparare della gliossima, è consigliabile di fare agire sul gliossale una soluzione neutra o alcalina di idrossilamina; in queste condizioni non ho mai osservato la formazione del composto esplosivo.

« La quantità che se ne forma, varia notevolmente a seconda della quantità di cloridrato d'idrossilammina che si impiega, della concentrazione della soluzione e della durata del riscaldamento. Ma più che altro dipende dalle due ultime circostanze, tanto che, in certe condizioni opportune, si può, partendo da quantità teoretiche di gliossale e di idrossilammina, ottenere quasi esclusivamente il composto esplosivo.

« Le condizioni più opportune per ottenerlo sono le seguenti:

« 2 Mol. di gliossale e 3 Mol. di cloridrato d'idrossilammina vengono sciolte a caldo nella minore quantità d'acqua possibile, e la soluzione così ottenuta si evapora a. b. m. finchè comincia a cristallizzare. Si lascia raffreddare e, senza tener conto di ciò che eventualmente si può separare, si neutralizza esattamente il prodotto che è fortemente acido, con una soluzione concentrata di carbonato alcalino. Con questo trattamento si separa in notevole quantità un corpo cristallino d'un leggero colore bruno. Per liberare il corpo filtrato da piccole quantità di gliossima che potrebbero esservi mescolate, lo si agita frequentemente con etere. Per purificarlo si scioglie nell'acqua bollente, da cui cristallizza in piccoli aghi bianchicci, lunghi parecchi millimetri, raggruppati talvolta a rosetta, i quali si possono ottenere presto secchi lavandoli con alcool ed etere.

« La sostanza così purificata ha dato all'analisi i seguenti risultati:

I. gr. 0,1538 di sostanza mescolati con molto ossido di rame e bruciati lentamente con molta precauzione, diedero gr. 0,1845 di CO_2 e gr. 0, 0511 di H_2O corrispondenti a 0,05031 di C e 0,005678 di H.

II. gr. 0,1046 di sostanza diedero cc. 26,1 d'azoto misurati a 16° e a 745 mm.; corrispondenti a gr. 0,0308 d'azoto.

	Calcolato per $C_4 H_5 N_3 O_3$	Trovato
C =	32.77 %	32.71 %
H =	3.52	3.69
N =	29.42	29.45

« La sostanza analizzata fondeva, se riscaldata lentamente, a 176° con decomposizione completa. Se i cristalli si riscaldano su lamina di platino a fiamma diretta, esplodono in modo simile al cotone fulminante senza lasciar quasi alcun residuo. Essi sono pochissimo solubili nell'acqua fredda, completamente invece nell'acqua bollente, quasi punto nell'alcool e nell'etere. Si sciolgono facilmente negli acidi e negli idrati e carbonati alcalini: e neutralizzando con precauzione queste soluzioni il composto si separa inalterato.

« Con cloruro d'acetile o anidride acetica a caldo, come fu già accennato in principio, la sostanza si scompone completamente.

« Con cloruro di benzoile, seguendo il metodo di Schotten-Baumann, si può ottenere un derivato benzoilico, che però non fu da me ulteriormente studiato.

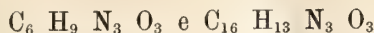
« Dei suoi derivati, venne invece preparato ed analizzato il suo cloridrato, che si può ottenere facilmente facendo passare una corrente di acido cloridrico gassoso nell'alcool che tiene in sospensione la sostanza, fino a soluzione completa. Per evaporazione nel vuoto si separano cristalli aghiformi sottili raggruppati a cespuglio, solubilissimi nell'acqua e che fondono presso a poco alla medesima temperatura del corpo primitivo.

gr. 0,2003 di sostanza sciolti in 50 cc. d'acqua, adoperarono 11 cc. di una soluzione $^1/_{10}$ norm. di nitrato d'argento, equivalenti a gr. 0,039 di Cloro.

	Calcolato per $C_4\ H_5\ O_3 .\ H\,cl$	Trovato
Cl =	19.74 %	19.48

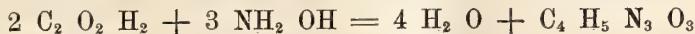
« Per azione dell'acido cloroplatinico su questo cloridrato, si può ottenere un composto platinico solubilissimo anche nell'alcool e che cristallizza dalla soluzione fortemente concentrata in bei prismi giallo-aranciati. L'analisi di questo composto non diede risultati soddisfacenti in causa del modo violentissimo con cui si scompone.

« La composizione di questa nuova sostanza ed il suo comportamento dimostrano che essa è analoga ai composti ottenuti da R. Scholl (¹) per azione del cloridrato d'idrossilammina sull'isonitroso-acetone e sull'isonitroso-aceto-fenone.

$$C_6\ H_9\ N_3\ O_3 \text{ e } C_{16}\ H_{13}\ N_3\ O_3$$

« Quest'ultimo composto fu ottenuto anche da Müller e Pechmann (²) direttamente dal fenilgliossale e dall'idrossilammina.

« Il corpo da me ottenuto sarebbe il composto più semplice di questa classe, mentre i corpi ottenuti dai predetti autori rappresenterebbero i composti dimetilati e difenilati.

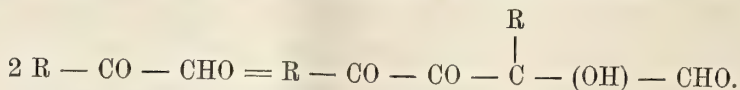
« La sua formazione può essere rappresentata dall'equazione:

$$2\ C_2\ O_2\ H_2 + 3\ NH_2\ OH = 4\ H_2\ O + C_4\ H_5\ N_3\ O_3$$

« Anche A. Angeli (³) ottenne un composto analogo per azione dell'idrossilammina sull'isonitrosoomoacetopiperone $C_{20}\ H_{17}\ O_4\ N_3\ O_3$.

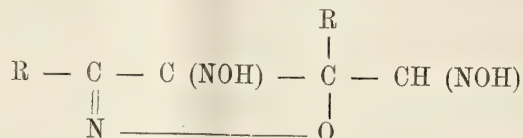
« Riguardo alla costituzione di questi composti, che hanno a comune tutti il gruppo $(N_3\ O_3)$ o più esattamente il gruppo $C_4\ H_3\ N_3\ O_3$, si sa ben poco, non essendo finora stati studiati nè i prodotti di scomposizione nè quelli di trasformazione.

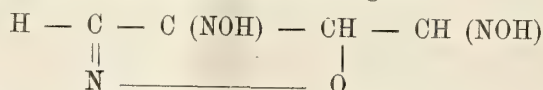
(¹) Berichte XXIII, 3578 (1890).
(²) Berichte XXII, 2560 (1889).
(³) Gazz. chim. Ital. XII, (2), 465.

« Però tenendo calcolo del loro modo di formazione dai gliossali monosostituiti o dai isonitrosochetoni, parmi si possa ammettere, che questi corpi subiscano in prima fase, una condensazione tra due molecole.

$$2\,R - CO - CHO = R - CO - CO - \underset{}{\overset{\displaystyle R \atop |}{C}} - (OH) - CHO.$$

« Il corpo che così risulterebbe reagendo con tre molecole d'idrossilammina, darebbe una triossima; la quale, in causa della presenza nella molecola di un gruppo ossidrilico in posizione 3 rispetto ad uno dei tre gruppi ossimmidici, perderebbe una molecola d'acqua per dare un'anidride interna, - un « *isossazolo* ».

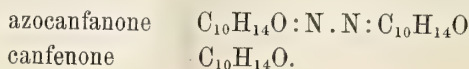
« I corpi che risulterebbero avrebbero, quindi, la costituzione generale:

```
                        R
                        |
R — C — C (NOH) — C — CH (NOH)
    ||                  |
    N ——————————— O
```

e quello preparato da me, precisamente la seguente:

```
H — C — C (NOH) — CH — CH (NOH)
    ||                    |
    N ———————————— O
```

« A conclusioni analoghe, sembra giunga anche il mio egregio amico, il dott. R. Scholl, in seguito agli studi che ora va facendo su di questi composti, e che condurranno certamente a stabilirne la esatta costituzione ».

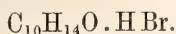
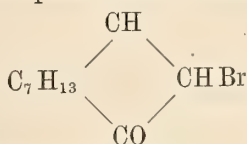
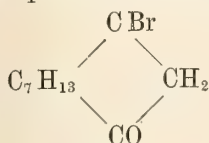
Chimica. — *Sopra alcuni bromoderivati della serie della canfora.* Nota di A. Angeli ed E. Rimini, presentata dal Socio G. Ciamician.

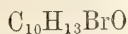
« Come uno di noi ha avuta occasione di dimostrare (¹), il monochetazocanfadione $C_{10}H_{14}ON_2$, perdendo una parte oppure tutto il suo azoto dà origine a due nuovi composti, che secondo la nomenclatura proposta da A. von Baeyer, vennero chiamati:

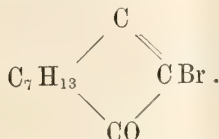
azocanfanone	$C_{10}H_{14}O : N . N : C_{10}H_{14}O$
canfenone	$C_{10}H_{14}O$.

« Il canfenone presenta tutti i caratteri di un composto non saturo; esso scolora facilmente il permanganato e per azione dell'idrogeno nascente

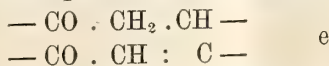
(¹) Angeli, Gazzetta chimica, XXIV, 2°, pag. 44.

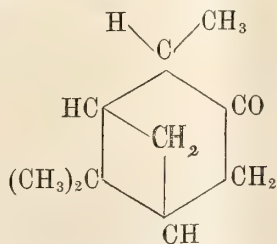
si converte nuovamente in canfora. Per addizione di una molecola di acido bromidrico, dà un composto che fonde a 113° e che ha la composizione:

$$C_{10}H_{14}O \,.\, HBr.$$

« Si tratta quindi di una bromocanfora isomera all'ordinaria (p. f. 76°); la nuova sostanza per trattamento con potassa alcoolica rigenera con tutta facilità il canfenone. La diversa costituzione fra la bromocanfora ordinaria ed il composto da noi ottenuto si potrà esprimere per mezzo delle formole:

bromocanfora ordinaria (p. f. 76°) nuova bromocanfora.

« Il canfenone addiziona del pari una molecola di bromo. Dal prodotto liquido che in tal modo si ottiene, la potassa alcoolica elimina con tutta facilità acido bromidrico, per formare un magnifico composto cristallino che fonde a 70°. L'analisi condusse alla formola:

$$C_{10}H_{13}BrO$$

che corrisponde a quella di un monobromocanfenone. La struttura della nuova sostanza si potrà rappresentare per mezzo dello schema:

C
C_7H_{13} CBr.
CO

« Queste reazioni dimostrano quindi in modo non dubbio che nella canfora e nel canfenone sono rispettivamente contenute le catene:

$$— CO \,.\, CH_2 \,.\, CH — \quad e$$
$$— CO \,.\, CH : C —$$

La formola che Bredt ha ultimamente proposto per la canfora (1) è quella che oggigiorno viene accettata dalla maggioranza dei chimici: noi però faremo osservare che anche lo schema

H CH_3
C
HC CO
CH_2
$(CH_3)_2C$ CH_2
CH

si presta egualmente bene per interpretare la maggior parte delle trasformazioni di questa interessante sostanza ».

(1) Berl. Berichte, 26 3047.

Chimica. — *Sulla fenolnaftaleina* (1). Nota di G. JAUBERT, presentata dal Socio CANNIZZARO.

« A. Terrisse (2) dodici anni fa, provò se si potevano preparare, condensando l'acido naftalico (1:8. naftalindicarbonico) coi fenoli, corpi di costituzione analoga alle ftaleine di Baeyer, e se poi, per condensazione ulteriore, era possibile arrivare ad ossiantrachinoni misti. Dalle sue ricerche risultò che l'acido naftalico non reagiva col fenolo ordinario nè per mezzo dell'acido solforico concentrato, nè per mezzo del cloruro di zinco o del cloruro di stagno, tanto a 130°, quanto a temperature ancora più elevate. La resorcina invece reagiva coll'acido naftalico a circa 240°-260° e dava un composto solubile negli alcali con una stupenda fluorescenza verde. Ricerche ulteriori coll'idrochinone, colla floroglucina, la pirocatechina e il pirogallolo davano solamente risultati negativi.

« Nel laboratorio dell'Università di Ginevra, il dottore Rabbinerson tentò nell'estate del 1892 di ottenere a sua volta la fenolnaftaleina, senza però arrivare a migliori risultati.

« Da parte mia, non posso che confermare i risultati di Terrisse; l'anidride dall'acido naftalico non reagisce col fenolo quando si adoperi come mezzo di condensazione l'acido solforico concentrato, il cloruro di zinco o il cloruro di stagno. Adoperando però il cloruro d'alluminio si ottiene facilmente la fenolnaftaleina ricercata.

« In presenza di cloruro d'alluminio, l'acido naftalico agisce sulla dimetilanilina, e dà una materia colorante verde la quale è molto probabilmente una dimetilanilina naftaleina. Su questa materia colorante ritornerò in un'altra occasione. Per ora mi limito a riferire sui risultati ottenuti sulla fenolnaftaleina.

Preparazione della fenolnaftaleina.

« Questa viene preparata, riscaldando a 160° a bagno d'olio:
20 gr. d'anidride naftalica
80 » di fenolo
50 » di cloruro d'alluminio.

« Si osserva presto uno sviluppo violento di acido cloridrico, la massa fa schiuma, diventa più liquida e assume un colore giallo-verde. Dopo al-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio dell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(2) André Terrisse. Ueber die Einwirkung der Naphtalsäure auf Resorcin. Inaugural-Dissertation, Würzburgo, 1883. Liebig's Annalen. *227*, 333.

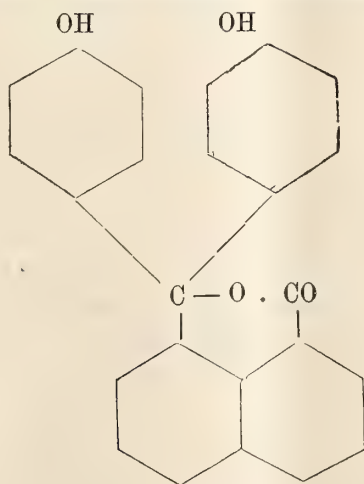
cune ore, sempre riscaldando, la massa fusa diviene solida e a poco a poco assume il colore rosso coi riflessi verdi, caratteristico per la fenolnaftaleina fusa. Dopo circa 7 ore la reazione è finita, la massa fusa ancora calda viene gettata nell'acqua e bollita con questa per allontanare il fenolo inalterato. Il residuo insolubile è sciolto a caldo nell'idrato sodico diluito, la soluzione rosso cupa viene filtrata e dopo raffreddamento precipitata con l'acido cloridrico. La fenolnaftaleina viene filtrata, lavata ed essiccata a temperatura ordinaria.

« Il rendimento è di circa 25 gr.

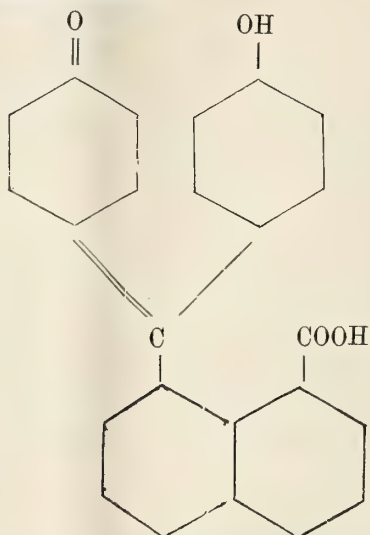
« Il prodotto greggio è quasi puro, però contiene sempre traccie di sale d'alluminio. Per ottenerlo assolutamente privo di ceneri si estrae con etere e, per evaporazione delle soluzioni eteree, la naftaleina pura rimane sotto forma di croste. La fenolnaftaleina amorfa fonde a 120° scomponendosi parzialmente.

« Analizzata diede risultati corrispondenti alla formola $C_{24} H_{16} O_4$.

	calcolato	trovato
C =	78,34	77,80
H =	4,55	4,95

« Per ottenere la fenolnaftaleina allo stato cristallizzato si scioglie il prodotto greggio nell'alcool e si fa bollire la soluzione a ricadere, per alcune ore, con circa metà peso di carbone animale. La soluzione alcoolica viene filtrata, il residuo lavato con alcool bollente, i filtrati concentrati insieme a bagno maria e precipitati poi con molta acqua. Dopo 24 ore, la fenolnaftaleina si è separata in forma d'una polvere bianca microcristallina. La fenolnaftaleina cristallizzata fonde sopra 200° carbonizzandosi e sviluppando vapori di fenolo. Essa è quasi insolubile nell'acqua, si scioglie invece facilmente nell'alcool, l'etere, l'acido acetico glaciale, si scioglie anche negli alcali con un colore rosso fuchsina. La fenolnaftaleina ha la seguente formola:

« I sali rossi secondo il modo di vedere di Bernthsen (1) devono essere rappresentati dalla seguente formola:

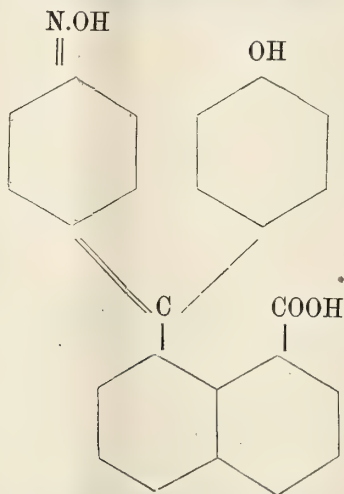
O OH

C COOH

Cloruro di fenolnaftaleina.

« Il pentacloruro di fosforo reagisce facilmente sulla fenolnaftaleina formandone il cloruro. Questo composto, che non ho studiato dettagliatamente, si forma scaldando per 5 ore in bagno d'olio a 150°, quantità equimolecolari di pentacloruro di fosforo e di fenolnaftaleina essicata a 100°. Il prodotto della reazione viene versato sul ghiaccio ed estratto a caldo con soda. Il residuo poi viene cristallizzato dall'alcool o dall'etere. S'ottengono così piccoli aghetti fondenti a 180°.

Fenolnaftaleinossima.

N.OH OH

C COOH

(1) Bernthsen. Constitution der Rhodamine. Chem. Ztg., *16*, 1956.

« Secondo Friedländer (Berichte, 26, 2258) reagirebbero coll'idrossilamina solamente quelle ftaleine che cogli alcali possono dare un « sale chinonico », indicando questa trasformazione con un cambiamento di colore caratteristico. Questo è il caso per la fenonalftaleina, e difatti essa reagisce coll'idrossilamina colla stessa facilità della fenolftaleina.

« Io ho seguito esattamente il modo di preparazione di Friedländer [1].

« Una soluzione alcalina di fenolnaftaleina viene mescolata con una quantità poco più superiore alla teoretica d'idrossilamina. Dopo un breve riscaldamento a bagno maria, il colore rosso cupo della soluzione di fenolnaftaleina si era trasformato in un giallo-bruno. Il liquido viene diluito e dopo raffreddamento precipitato con l'acido acetico. In questo modo si ottiene la fenolnaftaleinossima sotto forma di fiocchi gialli chiari, questi vengono purificati sciogliendoli nell'idrato sodico diluito e precipitando con l'acido acetico. La fenolnaftaleinossima è una polvere microcristallina che fonde a 220°. È insolubile nell'acqua, poco solubile nell'acido acetico glaciale, ancora meno nell'alcool. Si scioglie negli alcali con un colore giallo bruno.

« Analizzata diede risultati corrispondenti alla formola: $C_{24}H_{17}N:O_4$.

	calcolato	trovato
N	3,65 %	3,30 %.

Chimica. — *Sulla massima temperatura di formazione e la temperatura di decomposizione di alcuni cloruri di diazocomposti della serie aromatica.* Nota di G. Oddo, presentata dal Socio Paternò.

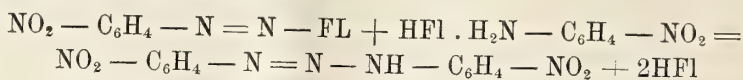
« In un lavoro pubblicato nel 1890 [2] esposi che volendo preparare le fluoronitrobenzine m- e p- feci agire a circa 100° sulle soluzioni delle basi in grande eccesso di HFl la soluzione acquosa di N_aNO_2 Però, mentre quasi contemporaneamente Ekbom e Mauzelius [3] con lo stesso processo ottennero le fluoronaftaline α- e β-, io ricavai invece delle soluzioni che filtrate e trattate con molta acqua si rappigliavano in una massa gialla gelatinosa.

« Non studiai allora la costituzione di tali sostanze; ma per l'elevata temperatura alla quale si erano formate e la loro solubilità nell'eccesso di HFl fui condotto ad ammettere che fossero degli amidoazo, i cui sali, poco stabili per la presenza nella molecola dei gruppi NO_2, si decomponevano diluendo con acqua la soluzione fluoridrica.

(1) Friedländer. Berichte, 26, 172.
(2) Gazz. ch. ital., vol. XX, pag. 645.
(3) Berichte d. deut. ch. Ges., XXII, 1846.

« Intanto ora ho osservato che il loro comportamento è quello dei diazoamidocomposti. Difatti danno con HCl in tubo chiuso le cloronitrobenzine e le basi primitive, fuse con β-naftol gli azofenoli e con KOH e C_2H_5I i derivati etilici. Per tutti i caratteri si mostrano identiche alle m- e p-dinitrodiazoamidobenzine di Griess [1] e di Meldola e Streatfeild [2].

« Per ispiegare la loro formazione si doveva ammettere che il prodotto della reazione contenesse in soluzione il sale di diazo assieme al sale della base rimasta in parte inalterata, e che soltanto quando si diluiva con acqua avvenisse la nota combinazione:

$$NO_2 - C_6H_4 - N = N - FL + HFl \,.\, H_2N - C_6H_4 - NO_2 =$$
$$NO_2 - C_6H_4 - N = N - NH - C_6H_4 - NO_2 + 2HFl$$

« Eseguii allora le seguenti esperienze per dimostrare che, contrariamente alle nozioni che si avevano finora, anche a temperatura molto elevata potessero formarsi ed essere stabili dei sali di diazocomposti:

1. Adoperai a circa 100° invece di HFl l'HCl ed ottenni i medesimi risultati. D'allora in poi impiegai in tutte le ricerche quest'ultimo acido.

2. Sul prodotto della reazione, preparato con la p-nitroanilina e HCl, riscaldato sino all'ebollizione, feci gorgogliare una rapida corrente di vapore acqueo: ricavai p-cloronitrobenzol, p-nitrofenol e p-nitroanilina.

3. Feci agire circa 4 eq. di nitrito sodico sopra 1 eq. di base sempre a circa 100°. Il prodotto della reazione diede le reazioni caratteristiche dei diazocomposti.

4. Finalmente tentai di isolare allo stato puro e secco il cloruro di diazo, che si formava a così elevata temperatura e ci sono riuscito nelle condizioni che esporrò nella parte sperimentale. Preparai d'altra parte lo stesso sale facendo agire a freddo il nitrito d'amile sulla soluzione del cloridrato di p-nitroanilina in alcool assoluto, e potei constatare l'identità dei due prodotti.

« Nello studio del cloruro di p-diazonitrobenzina, che non era finora conosciuto, un fatto si rese degno di nota, che cioè allo stato secco ad 85-90° tale sale si decompone con detonazione a 85°, mentre io l'avevo preparato ed anche sino a 100° potei dimostrarne la formazione.

« Questo risultato mi spinse a studiare quali relazioni esistono tra la temperatura di decomposizione dei cloruri dei diazocomposti secchi e la massima temperatura alla quale essi si possono formare in soluzione.

« I cloruri dei diazo allo stato secco non erano stati finora preparati. Col metodo descritto da Griess è riuscita relativamente più facile la preparazione dei nitrati, più difficile quella dei solfati e ancora più difficile quella

(1) Annalen, 121, 272.

(2) Journ. of the Chem. Soc., 1886, I, 624; 1887, I, 102 e 434; 1895, 50.

dei cloruri. Lo stesso Griess non descrisse nemmeno il cloruro di diazobenzina secco. Questo sale fu preparato soltanto recentemente da Knoevenagel [1] impiegando invece della corrente di anidride nitrosa il nitrito di amile e la soluzione in alcool assoluto del cloridrato della base.

« Adoperando quasi lo stesso processo, ho preparato finora i seguenti cloruri dei quali riporto accanto la temperatura di decomposizione:

Cloruro di p-nitrodiazobenzina, si decompone con detonazione a 85°;
" m- " " " 118°;
" α-diazonaftalina, fonde decomponendosi senza detonazione a 96°;
" o-diazofenolo, si decompone senza detonazione a 152°.

« D'altra parte ho constatato, nel modo che descriverò nella parte sperimentale, che questi sali si possono formare sino alle seguenti temperature:

Cloruro di p-nitrodiazobenzol sino a 100° in notevole quantità;
" m- " " in minore quantità;
" α-diazonaftalina soltanto sino a 60°;
" o-diazofenol a temperatura inferiore ai 60°.

« Finalmente ho trovato che il cloruro di diazobenzina detona allo stato secco a 92° e si forma anche a 60-70°. È degno di nota intanto che mentre il cloruro di p-nitrodiazobenzina si può formare alla temperatura più elevata fra tutti i diazo che ho finora studiati, allo stato secco esplode alla temperatura più bassa. Viceversa avviene col cloruro di o-diazofenolo. Io continuerò questo studio, cercando d'indagare possibilmente la causa di questa differenza di comportamento tra i sali dei diazo allo stato secco e in soluzione.

Dinitro-p-diazoamidobenzolo.

« Gr. 13,8 di p-nitroanilina furon versati in circa 100 c.c. di HCl del commercio e tra 90-100° furon trattati con eq. 1 $^1/_2$ di nitrito sodico. Il prodotto della reazione filtrato, dopo raffreddamento e diluito con acqua, si rapprese in una massa gelatinosa gialla, che venne purificata per ripetute cristallizzazioni da alcool amilico e da alcool etilico assoluto. All'analisi gr. 0,2684 di sostanza fornirono gr. 0,4956 di CO_2 e gr. 0,0812 di H_2O;

	trovato %	calcolato per $C_{12}H_9N_5O_4$
C	50,35	50,17
H	3,36	3,14

« La sostanza pura fonde decomponendosi a 220-223°, come fu anche osservato recentemente da Meldola e Streatfeild. La preparai col metodo descritto da questi autori e potei provare l'identità dei due prodotti.

[1] Berichte, 1890, pag. 2996.

Dinitro-m-diazoamidobenzolo.

« Si operò come nel caso precedente. Il precipitato gelatinoso però è meno abbondante, ma aumenta aggiungendo della soluzione acquosa di acetato sodico.

« Gr. 0,3104 di sostanza fornirono gr. 0,5712 di CO_2 e gr. 0,1005 di H_2O;

	trovato %	calcolato per $C_{12}H_9N_5O_4$
C	50,19	50,17
H	3,59	3,14

« La sostanza pura fonde a 193-195°. Mostra tutti i caratteri della m-dinitrodiazoamidobenzina di Griess, che ho pure preparata col metodo descritto da Meldola e Streatfeild. Su questo composto furono eseguite le seguenti esperienze per dimostrarne la costituzione [1].

Azione dell'acido cloridrico.

« Gr. 0,50 di sostanza furono riscaldati in tubo chiuso con circa cc. 15 di HCl fumante a 150° per circa 5 ore. Il prodotto della reazione distillato a vapor d'acqua, fornì un olio che estratto con etere e cristallizzato dall'alcool fuse a 44°; era quindi m-cloronitrobenzina. Il residuo della distillazione filtrato, evaporato quasi a secco, ripreso con poca acqua e precipitato con soda diede m-nitroanilina p. f. 114°.

Fusione con β-naftol.

« Gr. 0,50 di sostanza mischiati con un peso uguale di β-naftol furono riscaldati a bagno di H_2SO_4. A 144° il miscuglio fuse con sviluppo di bolle di gas. Si continuò a riscaldare tra 140° e 150° sino a che cessò tale sviluppo. Il prodotto della reazione venne purificato, lavandolo prima con alcool ordinario e cristallizzandolo poscia ripetutamente dall'alcool assoluto.

« Gr. 0,2542 di sostanza fornirono gr. 0, 6101 di CO_2 e gr. 0,0908 di H_2O.

	trovato %	calcolato per $C_{16}H_{11}N_3O_3$
C	65,46	65,52
H	3,97	3,75

« Fonde a 192-194°. È identico al m-nitrobenzolazo-β-naftol preparato da Meldola (Ber. 1888, 601) per l'azione del nitrito sodico sulla nitrobenzolazo-β-naftilammina in soluzione nell'acido acetico.

Derivato etilico.

« Gr. 9,60 di sostanza furono trattati in un pallone asciutto con circa

[1] Le esperienze, per dimostrare che i composti in esame erano diazoamidocomposti, furono eseguite dallo studente Sig. G. Scimeca, ed in parte anche a sue spese: a lui porgo i miei ringraziamenti. Egli ha eseguito inoltre dei tentativi per trasformare questi diazoamido negli isomeri amido-azo, ma ancora non ha raggiunto lo scopo.

cc. 250 di alcool distillato sulla calce, gr. 1,90 di potassa disciolta in alcool e raffreddando esternamente con gr. 6 di ioduro di etile e messi a ricadere per circa 10 ore. Dopo raffreddamento tutto si rapprese in una massa gialla cristallina, che venne purificata per ripetute cristallizzazioni da alcool amilico, dov' è molto solubile.

« Gr. 0,2349 di sostanza fornirono gr. 0, 4638 di CO_2 e gr. 0,0939 di H_2O.

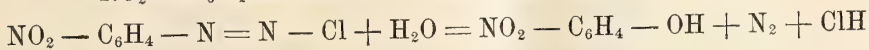
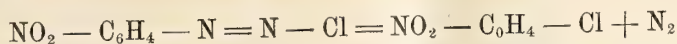
	trovato %	calcolato per $C_{14}H_{13}N_5O_4$
C	53,84	53,33
H	4,44	4,12

« P. f. 117-119°, come per il composto preparato da Meldola e Streatfeild (l. c.).

« Le esperienze che dimostrano che anche a quella elevata temperatura si formano e sono stabili dei sali di diazo sono le seguenti:

« 1) Gr. 7 di p-nitroanilina disciolti in circa 60 cc. di HCl furono trattati tra 90-100° con 1 $^1/_2$ eq. di N_aNO_2. Il prodotto della reazione filtrato e riscaldato sino quasi all'ebollizione fu fatto attraversare da una rapida corrente di vapore acqueo. Distillò molta p-cloronitrobenzina, bianca, cristallizzata in aghi p. f. 83°, insolubile negli alcali. Eliminata questa sostanza col raffreddamento delle acque madri si formò una massa cristallina di lunghi aghi, che raccolti e lavati con acqua, erano solubili negli alcali e fondevano come il p-nitrofenolo a 112-114°. Le acque filtrate, alcalinizzate con soda, diedero un abbondante precipitato giallo, che cristallizzato dall'acqua fuse a 147° ed era p-nitroanilina. Di questi tre prodotti evidentemente i primi due si erano formati per l'azione dell'HCl e del vapore acqueo sul cloruro di p-diazonitrobenzina, secondo le note equazioni:

$$NO_2 - C_6H_4 - N = N - Cl = NO_2 - C_6H_4 - Cl + N_2$$

$$NO_2 - C_6H_4 - N = N - Cl + H_2O = NO_2 - C_6H_4 - OH + N_2 + ClH$$

la terza proveniva della base rimasta inalterata durante la reazione.

« 2) Gr. 4 di p-nitroanilina furono disciolti in circa 50 cc. di HCl e trattati con la soluzione acquosa concentrata di 4 eq. di N_aNO_2 a 90-100°. Il prodotto della reazione filtrato e diluito con acqua non diede la solita massa gialla gelatinosa. Questa però si formò aggiungendovi una soluzione acquosa di cloridrato di p-nitroanilina. Similmente, trattando tale prodotto con soluzione alcalina di β-naftol, diede colorazione e precipitato rosso mattone.

Cloruro di p-nitrodiazobenzina secco preparato a 90°.

« Gr. 3 di cloridrato di p-nitroanilina polverizzato sospesi in circa 15 cc. di HCl e riscaldati in un grande tubo da saggio a 85-90° a bagno di acqua salata, furono sottoposti ad una rapida corrente di N_2O_3 (da HNO_3 d. 1,35 e As_2O_3). Il sale subito si disciolse e dopo pochi secondi ancora incominciò a manifestarsi un principio di decomposizione con sviluppo di piccole

bolle di gas da tutta la massa del liquido e formazione di un olio che si raccoglieva alla superficie. Fu sospesa allora la corrente, il prodotto fu decantato subito in una capsula e dopo raffreddamento fu filtrato. Alcune gocce del filtrato diluite con acqua diedero uno scarso precipitato giallo fioccoso. Il rimanente fu versato in un pallone a turacciolo smerigliato e trattato con circa 3 vol. di alcool assoluto e poscia con etere assoluto sino ad intorbidamento lattiginoso carico di tutta la massa. Molto di raro avviene che col riposo si formino dei cristalli, che in tal caso sono lunghi da 2 a 3 centimetri. Ordinariamente da questo liquido lattiginoso si deposita la soluzione acquosa concentrata del sale del diazo. Si decanta allora lo strato etereo e il residuo acquoso si tratta di nuovo con circa 3 vol. di alcool e poco etere: senza dubbio avviene tosto la precipitazione di piccoli cristalli aghiformi; alla soluzione decantata si aggiunge nuova quantità di etere assoluto e precipita cosí ancora della soluzione acquosa che viene trattata come la precedente.

« A questo modo si possono ottenere diverse frazioni del sale del diazo cristallizzato. Per purificarle si decanta il liquido per quanto più completamente è possibile, si lava diverse volte con etere sino a che questo resta quasi incoloro, si ridisciolgono i cristalli in alcool assoluto e si riprecipitano e si lavano di nuovo con etere. Si versa poi tutto in un bicchiere in presenza di etere, e decantato questo si dissecca su acido solforico in presenza di paraffina.

« 1. Gr. 0,1246 di sostanza bolliti con acqua in corrente di CO_2 fornirono cc. 15 di Az alla temperatura di 15°,6, e alla pressione di mm. 759.

« 2. gr. 0,3307 di sostanza fornirono gr. 0,2527 di Ag Cl.

	trovato %	calcolato per $NO_2 - C_6H_4 - N_2 - Cl$
N diazoico	14,04	15,09
Cl	18,89	19,13

« Il rendimento è alquanto notevole.

« Cristallizza in aghi bianchi che dopo alcuni giorni diventano giallastri, anche se si conservano in un disseccatore ad H_2SO_4. All'aria non è deliquescente. Riscaldato in un tubo da saggio detona; detona pure, ma leggermente, con un colpo secco: per raggiungere questo scopo se ne attacca un poco ad un martello di ferro e si percuote fortemente contro una superficie pure di ferro.

« Si rammollisce a 80° e fonde decomponendosi e talvolta con detonazione a 85°. È molto solubile nell'acqua; questa soluzione s'intorbida subito se il prodotto contiene ancora tracce della base primitiva; ha reazione acida; con soda dà un precipitato rosso mattone; precipitato dello stesso colore dà con la soluzione di β-naftol nella soda (1 mol.: 1 mol.); con soluzione di cloridrato di p-nitroanilina dà il solito precipitato giallo gelatinoso. È abba-

stanza solubile in alcool, insolubile nella benzina, nella ligroina e nel cloroformio.

Cloruro di p-nitrodiazobenzina preparato a bassa temperatura.

« Gr. 2 di cloridrato di p-nitroanilina anidro (1 mol.) furono disciolti in circa 30 cc. di alcool assoluto e gr. 2,54 di HCl (d. 1,16) (2 mol.) e raffreddando esternamente con neve furono trattati agitando con gr. 2 di nitrito di amile (piccolo eccesso su 1 eq.). Dopo circa 2 ore il prodotto della reazione di colorito rosso carico fu filtrato in un fiasco a turacciolo smerigliato, diluito con un altro poco di alcool assoluto e precipitato con circa 200 cc. di etere assoluto. Il precipitato bianco, costituito da piccoli cristalli aghiformi, venne purificato come nel caso precedente.

« Gr. 0,3123 di sostanza fornirono gr. 0,2356 di Ag Cl.

	trovato %	calcolato per $NO_2 \cdot C_6H_4 - N_2 - Cl$
Cl	18,64	19,13

« Per tutti i caratteri fisici e chimici questo sale si comporta come l'altro preparato a 90°. Il rendimento è molto abbondante.

« Tutti i sali che seguono li ho preparati a bassa temperatura.

Cloruro di m-nitrodiazobenzolo.

« Fu preparato nelle medesime condizioni del precedente, sostituendo al cloridrato di p-nitroanilina quello della m-nitroanilina. Siccome questo sale è meno solubile nell'alcool assoluto, nella precipitazione del sale di diazo con etere non è necessario aggiungere altra quantità di questo solvente.

« Gr. 0,3950 di sostanza fornirono gr. 0,2997 di Ag Cl.

	trovato %	calcolato per $NO_2 - C_6H_4 - N_2 Cl$
Cl	18,78	19,13

« Il sale anidro è bianco e deliquescente all'aria. Esplode sia col riscaldamento in tubo da saggio, sia con la percussione e più facilmente dell'isomero para. La temperatura di esplosione con notevole detonazione è 118° senza che la sostanza prima si sia alterata. È molto solubile nell'acqua, e questa soluzione rispetto ai reattivi dei sali di diazo si comporta come quella del composto para. È solubile nell'alcool assoluto, insolubile nella benzina, nella ligroina e nel solfuro di carbonio. Il rendimento è abbondante.

Cloruro di o-diazofenolo.

« Furono impiegati nelle condizioni predette gr. 1,46 di cloridrato di o-amminofenolo (1 mol.) gr. 2,22 di HCl (2 mol.), circa cc. 30 di alcool assoluto, e gr. 1,20 di nitrito di amile (1 mol.) e circa cc. 200 di etere assoluto. Il sale che precipita è polverulento e quantunque sia stato lavato molte volte con etere, ridisciolto due volte in alcool assoluto e riprecipitato e lavato con etere assoluto, si mostra sempre di colorito bianco sporco.

« Gr. 0,3752 di sostanza fornirono gr. 0,3414 di Ag Cl.

	trovato °/₀	calcolato per $HO — C_6H_4 — N_2 — Cl$
Cl	22,49	22,68

« Il sale anidro non è deliquescente all'aria: si decompone rapidamente a 152° senza detonazione. Nemmeno detona se si riscalda rapidamente, nè con la percussione. È solubilissimo nell'acqua, insolubile in benzina, ligroina e cloroformio

Cloruro di α-diazonaftalina.

« Furono adoperati nelle solite condizioni gr. 1,80 di cloridrato di α-naftilammina (1 mol.) gr. 2,22 di H Cl (2 mol.), circa cc. 60 di alcool assoluto e circa 300 cc. di etere assoluto. Anche in questo caso quantunque avessi lavato il sale di diazo ottenuto ripetutamente con etere, l'avessi ridisciolto per due volte in alcool assoluto e riprecipitato e lavato con etere assoluto, si ottenne sempre in cristalli ocra chiaro splendenti.

« Gr. 0,3183 di sostanza fornirono gr. 0,2385 di Ag Cl;

	trovato °/₀	calcolato per $C_{10}H_7 — N_2 — Cl$
Cl	18,53	18,63

« Il cloruro di α-diazonaftalina anidro fonde decomponendosi a 96° senza detonazione. Non detona nè per rapido riscaldamento, nè con la percussione. Mostra i caratteri di solubilità dei precedenti sali.

« Per determinare finalmente la massima temperatura alla quale si possono formare i sali dei diazo composti che ho descritti, feci uso dei seguenti reattivi:

1) β-naftol e soda (1 mol. : 1 mol.); 2) cloridrato di p-nitroanilina; 3) cloridrato di anilina.

« Nel caso in cui si era formato il sale di diazo si ottenevano col primo gli ossiazo e con gli altri due i diazoamidocomposti caratteristici. Questi ultimi, con il sale di diazo che proveniva dalla p-nitroanilina, si formarono anche in soluzione acida, con quello della m-nitroanilina in presenza di soluzione acquosa di acetato sodico, con le altre basi in soluzione debolmente alcalina.

« Nel caso in cui non si era formato il sale del diazo ricercato si avevano risultati completamente negativi, che non lasciavano alcun dubbio sull'andamento della reazione.

« Furono impiegati sempre 1 mol. in centigr. del cloridrato della base per 1 mol. di nitrito sodico. La quantità di acido cloridrico a causa della solubilità dei differenti sali fu alquanto diversa. Se ne impiegarono cc. 25 per la p-, la m-nitroanilina e l'anilina; cc. 35 per l'amminofenolo e cc. 50 per l'α-naftilammina. Il miscuglio del sale e dell'acido cloridrico veniva ri-

scaldato in capsula di porcellana e la soluzione concentrata del nitrito sodico veniva aggiunta a goccia a goccia. La temperatura durante la reazione si manteneva costante. Così operando:

A 100°

si trasformarono in diazocomposti:

1) la p-nitroanilina
2) la m-nitroanilina.

« Invece con l'anilina, l'α-naftilammina e con l'amminofenolo non si ottennero nemmeno tracce dei corrispondenti diazo.

A 60°

si trasformarono in diazocomposti:

1) l'anilina (durante la reazione la temperatura salì quasi sino a 70°)
2) l'α-naftilammina.

Con l'amminofenolo invece non si notarono nemmeno tracce di diazo ».

Chimica. — *Sulla Octaidro-para-dimetil-etil-naftalina.* Nota di A. Andreocci, presentata dal Socio Cannizzaro.

Botanica. — *Terzo pugillo di alghe tripolitane.* Nota di G. B. De Toni, presentata a nome del Corrispondente Arcangeli.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Brioschi dà il doloroso annuncio delle perdite fatte dall'Accademia nelle persone dei Socî stranieri James Dwight Dana, morto il 14 aprile 1895, e Carlo Ludwig, morto il 24 aprile 1895; apparteneva il primo all'Accademia sino dal 2 luglio 1875, e ne faceva parte il secondo dal 20 settembre 1887.

Il Corrisp. Luciani legge la seguente Commemorazione del defunto Socio straniero C. Ludwig:

« Carlo Ludwig, l'illustre fisiologo di Lipsia, il 24 dello scorso mese, dopo breve malattia è morto. Questo funesto annunzio avrà larga eco di cordoglio presso tutti i cultori delle scienze biologiche di ogni paese.

« Da molti anni l'*Istituto fisiologico* di Lipsia era il vivaio dei più distinti giovani fisiologi, che da ogni parte del mondo accorrevano a perfezionarsi nella tecnica sperimentale presso quell' insigne Maestro. Egli era lieto e orgoglioso di accoglierli, e godeva di vivere e lavorare continuamente con loro; sapeva incoraggiarli ed eccitarne l'attività sperimentale, rafforzarne lo spirito critico, fecondarne le idee coi suoi ammaestramenti tecnici, frutto di lunga e vasta esperienza e di consumata pratica nelle indagini attinenti ai complessi problemi della vita.

« La carriera del Ludwig fu una delle più operose e utilmente produttive. Nato il 29 decembre del 1816 in Witzenhausen, studiò a Marburg e a Erlangen. Si addottorò a Marburg nel 1839; fu prosettore in quell'*Istituto anatomico* nel 1841; fu abilitato all' insegnamento della fisiologia nel 1842; fu nominato prof. *straordinario* di Anatomia comparata nel 1846. Da Marburg passò a Zürich nel 1849 come *ordinario* di Anatomia e Fisiologia. Nel 1855 fu chiamato a Vienna al *Josephinum* come prof. di Fisiologia e Zoologia. Finalmente nell'aprile del 1865 assunse - come coronamento definitivo della sua carriera - la grande cattedra di Fisiologia nella Università di Lipsia lasciata vacante dall' illustre H. Weber.

« Come i suoi celebri amici Helmoltz, Brücke, Du Bois Reymond, era il Ludwig seguace di quel moderno indirizzo fisiologico, che informato dei progressi delle scienze esatte, va in tutti i sensi tentando di ricondurre i complessi fenomeni vitali alle leggi fondamentali della fisica e della chimica, pur sempre evitando di far della metafisica, sia spiritualistica, sia materialistica.

« La sua attività si espanse in tutto il vasto dominio della fisiologia, come ne fan fede il suo *Trattato di fisiologia dell'uomo* (1) in cui appaiono quasi in ciascun capitolo le impronte della sua personalità, e i numerosi e svariati lavori manografici eseguiti e pubblicati in piccola parte da lui solo, più spesso in collaborazione coi suoi discepoli, spessissimo da questi ultimi, sempre però sotto la sua guida e direzione, e non raramente col suo attivo intervento nelle ricerche (2).

« Ma se si considera l' indole speciale e l'argomento prevalente nei lavori usciti dal laboratorio del Ludwig, è facile vedere che campo speciale delle sue ricerche furono i problemi meccanici. Da questo punto di vista egli può considerarsi come continuatore di quella scuola che ebbe in Italia il suo fondatore in Alfonso Borelli, e fu ripresa e restaurata in Germania dai fratelli Weber e dal Volkmann. Egli infatti si è in modo speciale occupato di applicare alla fisiologia i metodi della meccanica e della cinematica, e con vero talento inventivo, ideò una serie d'ingegnosi metodi e apparecchi, col-

(1) *Lehrbuch der Physiologie des Menschen* (2 Aufl. Leipzig und Heidelberg, 1858-61).

(2) F. Müller's Archiv (1843-49), Henle und Pfeufer's Zeitsch. (1844-55), Verhandl. der Züricher Naturf-Gesellsch. (1852-55), Berichte der k. sächs. Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig. (1865-76). Du Bois Reymond's Archiv (1877-95).

l'aiuto dei quali eseguì esperimenti nuovi e svariati, e raggiunse la scoperta di alcuni fatti di capitale importanza, che dischiusero nuove vie di ricerca, e pei quali soltanto il suo nome ha acquistato diritto d'immortalità nella storia della nostra scienza.

« Col suo *chimografo* introdusse per primo in fisiologia il metodo grafico automatico, e aprì la via a innumerevoli lavori che addussero una vera riforma e un grande sviluppo all'importante capitolo dell'*emodinamica.* Colla sua scoperta degli effetti dell'eccitamento della *corda del timpano* sulla secrezione della glandola sottomascellare, aprì la via allo studio (che continua tuttora) dell'influenza del sistema nervoso sul metabolismo dei tessuti, e rasentò la spiegazione meccanica di una classe di fenomeni, che alcuni tuttora considerano del dominio della così detta *forza vitale*. La scoperta *del centro vasomotore bulbàre* fatta col Thiry, e l'altra col Cyon *del nervo depressore del coniglio*, furono il preludio di molte altre svariate e fruttuose ricerche, che resero tanto esteso e complesso l'importante capitolo dell'innervazione vasale, e dell'influenza (pressoria e depressoria, diretta e riflessa), che il sistema nervoso esercita sulla circolazione sanguigna. Diremo infine che alla scuola del Ludwig è dovuto quel fecondo metodo delle circolazioni artificiali su organi sopravviventi staccati dall'animale, che ha avuto tanto larghe applicazioni, ed ha arricchito la scienza di un insieme notabilissimo di fatti importanti, rischiarando problemi che sembravano del tutto ribelli alle indagini sperimentali.

« Se grandi furono i meriti del Ludwig come scopritore e inventore, grandissimi e veramente ammirabili furono i suoi meriti come Maestro. Per 53 anni continui egli ha lavorato, mettendo a servigio dei suoi allievi tutta la sua abilità tecnica e la sua larga cultura scientifica. Egli non si sentiva felice che in loro compagnia, lavorando con loro, o prendendo parte e interesse ai loro lavori. Egli sapeva farsene altrettanti amici fedeli e riconoscenti, che diffusero - tornati al loro paese e occupate cattedre importanti - la fama e la gloria del loro Maestro, presso i cultori delle scienze biologiche. Nessun fisiologo ha mai vantato e nessuno forse potrà mai vantare, un numero maggiore di allievi, che poi hanno percorsa con plauso la carriera scientifica, di quanti ne conta il Ludwig [1]. Nella sua modestia, di questo soltanto egli

[1] Gli allievi italiani del Ludwig in ordine di data sono i seguenti:
Giuseppe Giannuzzi nel 1865 (morto a Siena ove fu prof. ord. di Fisiologia).
Giulio Ceradini nel 1871-72 (morto a Milano); fu prof. ord. di Fisiologia a Genova.
Luigi Luciani nel 1872-73, prof. ord. di Fisiologia a Roma.
Angelo Mosso nel 1874, prof. ord. di Fisiologia a Torino.
Giulio Fano nel 1881, Prof. ord. di Fisiologia a Firenze.
Gaetano Salvioli nel 1881 (morto a Genova), prof. ord. di Patologia generale.
Gaetano Gaglio nel 1886, prof. ord. di Farmacologia a Messina.
Dario Baldi nel 1887, prof. str. di Farmacologia a Pavia.
Ivo Novi nel 1888, prof. str. di Fisiologia a Siena.
Vittorio Grandis nel 1891, già assistente all'Istituto fisiologico di Torino.

si compiaceva, ed è in verità un titolo di merito grandissimo, che mentre dimostra l'alta stima e simpatia da cui era circondato, è la testimonianza più manifesta delle amabili qualità del suo carattere morale, sempre ilare, semplice, aperto a tutti i moti dell'animo ».

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quella del Socio Celoria intitolata: *Sulle osservazioni di comete fatte da Paolo dal Pozzo Toscanelli e sui lavori astronomici suoi in genere*, e altre opere dei signori De Marchi e Fouqué.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 maggio 1895

Annali delle epidemie occorse in Italia dalle prime memorie fino al 1850. Vol. II. IV. 2. VIII. Bologna, 1867-77-94, 4°.

Barbosa R. J. — Plantas novas cultivadas no Jardim Botanico de Rio de Janeiro. III. Rio, 1893, 4°.

Bisogni C. — Sur la correspondance anatomique du groupe glandulaire, sous-linguale avec les plaques jugulaires dans les serpents non venimeux. Leipzig, s. a. 8°.

Brédikine Th. — Sur les Perséides observés en Russie en 1894. S. Pétersbourg, 1895, 4°.

Camiolo A. — Il ritmo vibratorio, principio scientifico nei rapporti dei suoni musicali. Niscemi, 1894, 4°.

Carta idrografica d'Italia. Liri-Garigliano, Paludi Pontine e Fucino. Roma, 1895. 4°.

Catalogue of the Michigan Mining School 1892-94. Houghton, 1894, 8°.

Celoria C. — Sulle osservazioni di Comete fatte da Paolo dal Pozzo Toscanelli e sui lavori astronomici suoi in generale. Roma, 1894, 4°.

De Marchi L. — Le Cause dell'Era Glaciale. Pavia, 1895, 8°.

Fouqué F. — Contribution à l'étude des feldspaths des roches volcaniques. Paris, 1894, 8°.

Giovenale G. — Le linee metalliche ondulate elastiche, applicate alla dimostrazione sperimentale del teorema di Pascal sulla idrostatica. Roma, s. a., 4°.

Id. — Memoria sopra un perfezionamento della macchina pneumatica a mercurio. Roma, s. a., 8°.

Giovenale G. — Sopra un apparato per la dimostrazione sperimentale della composizione dell'aria. Roma, s. a., 4°.

Lussana S. — A proposito della Nota del sig. Déguisne « Ueber die Frage nach einer Anomalie des Leitvermögens der wässerigen Lösungen bei 4° ». Pisa, 1894, 8°.

Id. — Influenza della pressione sulla temperatura di trasformazione. Pisa, 1895, 8°.

Id. — Osservazioni sismiche dei mesi di novembre e dicembre 1894 fatte col microsismografo Vicentini. Siena, 1895, 8°.

Id. — Sul calore specifico dei gas. Pisa, 1894, 8°.

Id. — Sul potere termoelettrico degli elettroliti. Pisa, 1894, 8°.

Monari A. e *Carlinfanti E.* — Studio e modificazione del processo Röse per la determinazione delle impurezze nelle acquaviti etc. (Min. Int. Dir. San. Publ.). Roma, 1895, 4°.

Palazzo L. — La Stazione meteorica e geotermica annessa ai laboratori scientifici della Direzione di Sanità in Roma. Roma, 1895, 4°

Raineri S. — L'olio usato a calmare le onde. Roma, 1895, 8°.

Relazione della Giunta Superiore del catasto 18 apr. 1895, Roma, 1895 4°.

Wilde H. — On the evidence afforded by Bodès Law of a permanent contraction of the Radii Vectores of the Planetary Orbits. Manchester, 1895. 8°.

Id. — On the multiple proportions of the atomic weights of elementary substances in relation to the unit of Hydrogen. Manchester, 1895, 8°.

P. B.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 maggio 1895.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sopra l'orbita definitiva della Cometa IV, 1890.* Nota del prof. T. ZONA, presentata dal Socio TACCHINI.

« Nel 1890 il dì 15 novembre scopersi una nuova cometa. Siccome non si era scoperto alcun nuovo astro in questo osservatorio dopo Cerere scoperto dal Piazzi nel 1801, così credetti opportuno e conveniente che in questo stesso osservatorio si esaurissero le ricerche sull'orbita della stessa cometa.

« Incaricai dapprima l'ing. Agnello assistente a voler fare una ricerca sull'orbita di prima approssimazione nell'ipotesi parabolica, ciò che fu fatto e pubblicato; indi volle incaricarsi della stessa ricerca anche il dott. Mattina, assistente volontario presso questo stesso mio osservatorio e già mio scolaro come l'ing. Agnello.

« Esaurita la prima parte della ricerca il dott. Mattina fu da me successivamente invitato a volersi occupare della ricerca definitiva dell'orbita, a questo lavoro di buon grado si accinse e coll'aiuto dei miei consigli, ma più particolarmente per il suo grande affetto alla scienza astronomica e per la sua valentia di calcolatore, potè condurre a termine la laboriosa ricerca; e dico a più forte ragione laboriosa ricerca perchè per speciali cause inerenti all'indole del problema l'intero calcolo, per dubbi sorti, fu più volte ripetuto.

« La ricerca fu lungamente analizzata e discussa, pur tuttavia non credo esaurito completamente l'argomento; di ciò persuaso, consigliai al dott. Mattina di fare altre ricerche mutando radicalmente le basi del calcolo ed il metodo.

« Intanto credo cosa ben fatta presentare il risultato delle ricerche fatte, perchè esso può sempre servire non solo come risultato di laboriose ricerche, ma può servire ancora ad animare giovani calcolatori che pur usando metodi altamente apprezzati possono incontrarsi in risultati punto soddisfacenti.

« Ecco pertanto la relazione del lavoro del dott. Mattina.

« La cometa fu osservata in molti osservatori d'Italia, Germania, Francia, Svizzera ed Inghilterra dal 15 novembre al 13 gennaio, in tutto ottanta volte.

« Il Mattina raccolse tutte le osservazioni e con gli elementi parabolici

$$
\begin{aligned}
T &= 1890 \text{ Ag. } 7{,}5076 \text{ tm Berlino} \\
\omega &= 331^\circ\ 34'\ 21''3 \\
\Omega &= 85'\ \ 23\ \ 32\ \ 8 \quad \text{M. E. } 1890{,}0 \\
i &= 154\ \ 19\ \ 52\ \ 2 \\
\log q &= 0{,}312072
\end{aligned}
$$

costruì un'effemeride per l'intervallo 14 novembre 1890, 13 gennaio 1891, indi fece le opportune riduzioni di parallasse, aberrazione, nutazione e precessione relative all'equinozio 1890,0.

« Ridotte quindi le osservazioni alla più vicina mezzanotte, costruì i quattro seguenti luoghi normali:

1890	p	V_α	p	V_δ
Novemb. 15	1	— 3.1	—	—
16	4	+ 4.5	4	+ 0.7
17	4	+ 4.1	3	13.1
18	4	— 5.9	4	1.8
19	4	— 3.2	3	1.1
20	1	— 9.1	1	8.1
21	3	— 3.3	3	3.6
22	1	— 10.4	1	10.2
23	1	0.0	—	—

Primo luogo normale

Novembre 19.5

$x_\alpha = -\ 2''.3 \pm 1''.0$

$x_\alpha \sec \delta = -\ 2.\ 8$

Effemeride $= 78^\circ\ 13'\ 1''.5$

Ascen. retta normale $= 78\ \ 12\ \ 59.\ 2$

$x_\delta = 4''.5 \pm 1''.2$

Effemeride $= 34^\circ\ 17'\ 30''.5$

Decl. normale $= 34\ \ 17\ \ 35.\ 0$

1890	p	V_α	p	V_δ
Novembre 28	—	—	1	— 4.5
29	1	— 2.3	1	+ 16.0
30	4	— 5.4	4	+ 1.9
Dicembre 3	2	+ 3.0	2	+ 0.9
4	2	— 7.6	2	— 0.9
5	4	+ 4.1	4	— 1.2

Secondo luogo normale

Dicembre 3.5

$x = -\ 0''.7 \pm 1''.6$

$x_\alpha \sec \delta = -\ 1''.0$

Effemeride $= 57^\circ\ 46'\ 2''.7$

Ascen. retta normale $= 57\ \ 46\ \ 1.\ 7$

$x_\delta = 0''.2 \pm 1''.7$

Effemeride $= 34^\circ\ 56'\ 22''.0$

Decl. normale $= 34\ \ 56\ \ 22.\ 2$

1890	p	V_α	p	V_δ
Dicembre 7	1	+ 4.8	1	— 24.1
8	4	8.6	4	+ 1.2
9	1	12.0	1	— 4.3
10	2	12.5	2	— 2.4
11	1	5.5	1	0.0
12	2	7.3	2	— 2.5
13	2	14.2	2	— 0.7
14	3	16.7	3	— 4 4
15	4	13.2	4	+ 2.0
17	1	15.9	1	+ 5.2

Terzo luogo normale
Dicembre 12.5

$x_\alpha = 11''.8 \pm 0''.6$
$x_\alpha \sec \delta = 17.0$
Effemeride = 46° 33′ 42″.6
Ascen. retta normale = 46 33 59. 6

$x_\delta = 1''.8 \pm 1''.5$
Effemeridi = 33 35 27. 6
Decl. normale = 33 35 29. 4

1890	p	V_α	p	V_δ
Dicembre 29	2	+ 30.9	2	+ 0.3
31	1	36.4	1	6.5
Gennaio 2	1	34.0	1	21.0
13	1	61.3	1	5.0

Quarto luogo normale
Dicembre 31,5

$x_\alpha = 34''.3 \pm 1''.0$
$x_\alpha \sec \delta = 49''.0$
Effemeride = 31° 25′ 52″.4
Ascen. retta normale = 31 26 41. 4

$x_\delta = 6''.4 \pm 3''.8$
Effemeridi = 29° 36′ 41″.9
Decl. normale = 29 36 48. 3

« Per la formazione delle equazioni di condizione il dott. Mattina usò il metodo di Schönfeld: *Ueber die Berechnung der Differentialformeln zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahnelemente für Planeten und Cometen*, ed ottenne le seguenti

Equazioni di condizione originali logaritmiche.

	(x) −	(y) +	(z) +	(u) +	(w) +	(t) +	= 0
A. R.	9.13328_n	9.08475	9.26930	0.38885	9.61978_n	9.61035_n	0.36173
	9.39245	9.35392	9.44670	0.14739	9.30960_n	9.37184_n	9.84510
	9.61724	9.40210	9.48476	9.85478	8.92684_n	9.03320_n	1.07188_n
	9.69931	9.36547	9.47246	9.00762_n	8.57167	8.76826	1.53529_n
Decl.	9.27201_n	9.03173_n	9.00800_n	9.63507_n	0.03431_n	0.02488_n	0.65321_n
	9.19432_n	8.82816_n	8.80913_n	6.81898	0.01969_n	0.08193_n	9.30103_n
	8.82612_n	8.45142_n	8.46518_n	8.23536	9.97656_n	0.08292_n	0.25527_n
	8.95560	8.34751	8.22714	9.27186_n	9.84049_n	0.03708_n	0.80618_n

« Dividendo i coefficienti di una stessa incognita per il più grande di essi preso come fattore di omogeneità, e dividendo tutti i termini noti per il più grande di essi preso come unità di errore, ricavò le equazioni di condizione omogenee seguenti:

Equazioni normali numeriche.

x	y	z	u	w	t		
+ 2.2906	— 2.3314	+ 2.2999	+ 0.2630	+ 0.6594	+ 0.5807	— 1.2687	= 0
— 2.3314	+ 3.1509	— 3.2207	— 1.3168	— 0.3252	— 0.2906	+ 1.1656	
+ 2.2999	— 3.2207	+ 3.3229	+ 1.4403	+ 0.1343	+ 0.1230	— 1.2169	
+ 0.2630	— 1.3168	+ 1.4403	+ 1.4530	— 0.2979	— 0.2602	+ 0.0567	
+ 0.6594	— 0.3252	+ 0.1343	— 0.2979	+ 3.3020	+ 3.4664	+ 0.2649	
+ 0.5807	— 0.2906	+ 0.1230	— 0.2602	+ 3.4664	+ 3.7321	+ 0.2966	

« Quindi risolse le dette equazioni col metodo di sostituzione: una volta considerando il sistema come è stato scritto precedentemente, e una seconda volta considerando il sistema invertito, ed adottò poscia per valore di ciascuna incognita la media M dei valori ottenuti.

« Nello stesso modo operò per i rispettivi pesi ed ottenne il seguente quadro:

	x	y	z	u	w	t
I Sistema. .	1.167	8.315	7.719	— 0.271	1.944	— 1.693
II Sistema. .	2.127	9.303	7.701	+ 0.455	1.711	— 1.500
M.	1.647	8.809	7.710	0.092	1.828	— 1.597
Peso medio .	— 0.0008	— 0.0003	+ 0.0026	— 0.0003	— 0.0112	— 0.0123

« L'errore probabile dell'unità di peso è

$$r = \pm 1''.3$$

« Eseguite le operazioni suddette ricavò le

Correzioni degli elementi di partenza.

$$d\mathrm{T} = +0.238556$$
$$d\omega = +51.''7$$
$$d\Omega = -67.\ 9$$
$$di = -67.\ 4$$
$$d \log q = +0.000006$$
$$de = +0.004199$$

e quindi gli

Elementi definitivi.

$$\mathrm{T} = 1890 \text{ Ag. } 7.7462$$
$$\omega = 331^\circ\ 35'\ 13''0$$
$$\Omega = 85\ \ 22\ \ 24\ 9$$
$$i = 154\ \ 18\ \ 44\ 8$$
$$\log q = 0.312078$$
$$e = 1.004199$$

« Dagli elementi suddetti si vede che l'orbita è iperbolica, caso alquanto raro e perciò maggior importanza ha la ricerca.

« Considerando l'orbita iperbolica quasi parabolica, il Mattina fece la rappresentazione dei luoghi normali, questi non vennero che poco ben rappresentati. Per allontanare qualunque dubbio di errore di calcolo, il Mattina rinnovò i calcoli indipendentemente da cima a fondo più volte, ma sempre ricadde negli stessi risultati. Ciò che diede però più da pensare fu il valore negativo $[ff5]$ che teoricamente è essenzialmente positivo.

Rappresentazione dei luoghi normali.

	Nov. 19.5	Dic. 3.5	Dic. 12.5	Dic. 31,5
$A\alpha$	+ 2.′29″,7	+ 2.′12,″1	+ 1.′34,″8	+ 24.″4
$A\delta$	— 1. 5, 8	— 27, 8	— 10, 3	+ 9, 2

Soluzione diretta $[ff5] = -0,0130$
Soluzione inversa $[ff5] = -0,0006$.

« Il caso potrebbe tuttavia spiegarsi così (come opina anche il Mattina): $[ff5]$ è positivo, ma nella pratica, per un cumulo di piccole differenze nelle ultime cifre decimali e combinazioni di speciali elementi, può risultare come quì risultò, infatti, negativo.

« Quanto alla non buona rappresentazione dei luoghi normali, può attribuirsi ad una fortuita combinazione dei coefficienti delle equazioni la cui risoluzione diede origine a coefficienti ausiliari molto piccoli; una prova che così sia, sta nel fatto che i due sistemi di valori ottenuti, risolvendo le equazioni normali differiscono non poco, e ciò è naturalmente da attribuirsi alla piccolezza dei detti coefficienti ausiliari ».

Matematica. — *Sulle superficie che, da un doppio sistema di traiettorie isogonali sotto un angolo costante delle linee di curvatura, sono divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.* Nota del prof. CESARE FIBBI, presentata dal Socio DINI.

« Di queste superficie hanno trattato, primieramente il prof. Bianchi in una sua Memoria inserita negli Annali di Matematica [1] e posteriormente il Guichard [2] e lo stesso prof. Bianchi [3], per avere occasione di considerare

[1] *Sopra una nuova classe di superficie* ecc. (1890).
[2] Comptes rendus de l'Académie des Sciences (1893, pag. 483).
[3] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (agosto 1894).

quella classe delle superficie in discorso, per le quali le distanze dei piani principali da un punto fisso o sono eguali o hanno tra loro un rapporto costante, e in ciascuno dei ricordati lavori è posta in evidenza l'intima relazione che lega la teoria di queste superficie a quella delle congruenze pseudosferiche, o, che è lo stesso, della trasformazione di Bäcklund per le superficie a curvatura costante negativa.

« Scopo di questa Nota è d'insistere su questa relazione, e più specialmente su quella che lega le superficie in considerazione con quelle che son conosciute sotto il nome di superficie di Voss e che sono pure strettamente collegate colle superficie pseudosferiche.

« 1. Sia Φ una superficie riferita alle sue linee di curvatura (u, v) e sia

$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

l'elemento lineare della sua rappresentazione sferica. Se definiamo la superficie mediante le sue coordinate tangenziali X, Y, Z, W, e indichiamo con r_1, r_2 i suoi raggi principali di curvatura, avremo per le note formole di Weingarten:

$$(1)\quad \begin{cases} e r_2 = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} - \dfrac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \dfrac{e}{g}\dfrac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial v} + eW, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial u} - \dfrac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial v}, \\ g r_1 = \dfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \dfrac{g}{e}\dfrac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial u} - \dfrac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial v} + gW. \end{cases}$$

Indicando poi con X_1, Y_1, Z_1, W_1; X_2, Y_2, Z_2, W_2 le coordinate dei piani normali π_1, π_2 tangenti alle linee inclinate dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$ sulle linee di curvatura $v = \text{cost.}$, avremo:

$$(2)\quad \begin{cases} X_1 = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial X}{\partial u} - \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ X_2 = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

con le analoghe per Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, e quindi:

$$(3)\quad \begin{cases} W_1 = \Sigma x\, X_1 = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial W}{\partial u} - \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial W}{\partial v}, \\ W_2 = \Sigma x\, X_2 = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial W}{\partial v}. \end{cases}$$

Si avrà poi per derivazione delle (2):

$$\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{e}\,X,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\right)+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g}\,X,$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u}-\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{e}\,X,$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u}-\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\right)-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g}\,X;$$

e per derivazione delle (3), in forza delle (1) e delle stesse (3):

$$\frac{\partial W_1}{\partial u}=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{e}\,(r_2-W)-\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}(W_1-W_2\cos\alpha),$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial v}=-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g}\,(r_1-W)+\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}(W_1-W_2\cos\alpha);$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial u}=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{e}\,(r_2-W)-\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}(W_1\cos\alpha-W_2),$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial v}=\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g}\,(r_1-W)+\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}(W_1\cos\alpha-W_2).$$

Se da queste si eliminano r_1-W e r_2-W, si ottengono le altre:

$$(4)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial W_2}{\partial u}-\dfrac{\partial W_1}{\partial u}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}(W_2+W_1),\\[2mm]\dfrac{\partial W_2}{\partial v}+\dfrac{\partial W_1}{\partial v}=\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}(W_2-W_1);\end{cases}$$

che legano fra loro le distanze dall'origine dei piani tangenti alle due superficie Σ_1, Σ_2 inviluppate dai piani π_1, π_2. Notiamo infine che per i coefficienti degli elementi lineari sferici di queste superficie, avremo rispettivamente:

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)^2+\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot e\quad,\quad g_1=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)^2+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot g,$$

$$f_1=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{eg};$$

$$e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)^2+\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot e\quad,\quad g_2=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)^2+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot g,$$

$$f_2=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{eg}.$$

« 2. Ciò posto, se ricorriamo ai lavori citati del prof. Bianchi, vediamo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie Φ sia tagliata dalle traiettorie sotto l'angolo $\frac{\alpha}{2}$ delle linee di curvatura $v = \text{cost}$ in parallelogrammi infinitesimi equivalenti, è data dalla relazione:

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right) = \text{cotg}\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right), \tag{5}$$

alla quale si soddisfa, ponendo

$$\sqrt{e}\cos\frac{\alpha}{2} = \text{sen}(\omega_2 + \omega_1) \quad , \quad \sqrt{g}\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \text{sen}(\omega_2 - \omega_1),$$
$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \cos(\omega_2 + \omega_1) \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} = \cos(\omega_2 - \omega_1);$$

dove ω_1, ω_2 sono due angoli legati dalle relazioni:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(\omega_2 - \omega_1)}{\partial u} &= \frac{1 + \text{sen}\,\sigma}{\cos\sigma}\,\text{sen}(\omega_2 + \omega_1),\\ \frac{\partial(\omega_2 + \omega_1)}{\partial v} &= \frac{1 - \text{sen}\,\sigma}{\cos\sigma}\,\text{sen}(\omega_2 - \omega_1),\end{aligned}\right. \tag{6}$$

avendo posto $\sigma = \alpha - \frac{\pi}{2}$, ed essendo essi angoli soluzioni della stessa equazione

$$\frac{\partial^2 2\omega}{\partial u\,\partial v} = \text{sen}\,2\omega. \tag{7}$$

« Sono questi i risultati che dànno ragione del nesso che si è asserito esistere fra la teoria delle congruenze pseudosferiche e quella delle superficie Φ, giacchè è noto che se x_1, y_1, z_1 sono le coordinate di una superficie pseudosferica S_1 riferita alle sue linee assintotiche (u, v) inclinate fra loro di un angolo $2\omega_1$, soluzione della (7), se si costruisce la congruenza determinata dalle formole

$$x_2 = x_1 + \cos\sigma\,(\text{sen}\,\omega_2\,X' + \cos\omega_2\,X''), \tag{8}$$

dove $X', X'', \ldots$ sono i coseni di direzione delle linee di curvatura della S_1, e ω_2 è legato a ω_1 dalle (6), le x_2, y_2, z_2 saranno le coordinate della seconda falda S_2 della superficie focale, riferita essa pure alle sue linee assintotiche, il cui angolo d'inclinazione sarà $2\omega_2$. E siccome i coefficienti della rappresentazione sferica della congruenza così definita soddisfano la (5), si ha che le linee richieste sulla superficie Φ e sulla sfera rappresentativa sono quelle che corrispondono alle linee assintotiche della superficie focale di una qualunque congruenza pseudosferica.

« A questo risultato ottenuto dal prof. Bianchi possiamo aggiungere che avendosi ora

$$e_1=1 \quad , \quad f_1=-\cos 2\omega_1 \quad , \quad g_1=1 ,$$
$$e_2=1 \quad , \quad f_2=-\cos 2\omega_2 \quad , \quad g_2=1 ;$$

le linee (u, v) sulle superficie Σ_1, Σ_2 sono rispettivamente le immagini delle assintotiche delle superficie pseudosferiche S_1, S_2. Di più, se dalle (4), che ora si scrivono:

$$(4^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(W_2-W_1)}{\partial u}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}(W_2+W_1)\cos(\omega_2+\omega_1) , \\ \dfrac{\partial(W_2+W_1)}{\partial v}=\dfrac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}(W_2-W_1)\cos(\omega_2-\omega_1) , \end{cases}$$

si eliminano successivamente W_1, W_2, tenendo conto delle (6), si trova:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 W_1}{\partial u\,\partial v}=W_1\cos 2\omega_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial u\,\partial v}=W_2\cos 2\omega_2 ;$$

e queste esprimono che le linee (u, v) sulle superficie Σ_1, Σ_2 sono geodetiche e coniugate e perciò le Σ_1, Σ_2 appartengono a quella classe di superficie che son conosciute sotto il nome di superficie di Voss [1]. Si ha dunque il teorema:

Se sopra una superficie Φ le traiettorie isogonali sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{4}+\frac{\sigma}{2}$ di un sistema di linee di curvatura la dividono in parallelogrammi infinitesimi equivalenti, i piani normali tangenti alle dette linee inviluppano due superficie di Voss Σ_1, Σ_2 associate, secondo il senso stabilito dal prof. Bianchi [2], alle due falde di una congruenza pseudosferica, e saranno legate fra di loro dalle relazioni (4*).

« 3. Alla dimostrazione del teorema reciproco faremo precedere l'osservazione seguente. Siano Σ_1, Σ_2 due superficie definite dalle loro coordinate tangenziali

$$X_1 \;,\; Y_1 \;,\; Z_1 \;,\; W_1 ;$$
$$X_2 \;,\; Y_2 \;,\; Z_2 \;,\; W_2 ,$$

che supporremo funzioni delle stesse variabili u, v per le due superficie. I piani tangenti

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} X_1x+Y_1y+Z_1z=W_1 , \\ X_2x+Y_2y+Z_2z=W_2 \end{cases}$$

[1] Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu München, 1888.

[2] *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili.* Rend. della R. Accademia dei Lincei (luglio 1892).

in due punti corrispondenti s'intersecheranno secondo i raggi di una congruenza, e se si pone:

$$a = Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 \quad , \quad b = Z_1 X_2 - Z_2 X_1 \quad , \quad c = X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \, ,$$
$$a' = W_2 X_1 - W_1 X_2 \quad , \quad b' = W_2 Y_1 - W_1 Y_2 \quad , \quad c' = W_2 Z_1 - W_1 Z_2 \, ,$$

le equazioni di un raggio della congruenza potranno scriversi

$$bz - cy + a' = 0 \quad , \quad cx - az + b' = 0 \quad , \quad ay - bx + c' = 0 \, ,$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza sia normale è che l'espressione

$$(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} da \, , & db \, , & dc \\ a \, , & b \, , & c \\ a' \, , & b' \, , & c' \end{vmatrix}$$

sia un differenziale esatto (1).

« Introducendo i coseni di direzione X, Y, Z dei raggi della congruenza e l'angolo Ω dei piani (α), l'espressione precedente prende la forma:

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\text{sen}^2 \Omega} \left\{ (W_2 \cos \Omega - W_1) \, \Sigma X \, dX_1 + (W_1 \cos \Omega - W_2) \, \Sigma X \, dX_2 \right\} .$$

Ciò posto, si abbia una congruenza pseudosferica, e le Σ_1, Σ_2 siano due superficie corrispondenti rispettivamente per parallelismo delle normali alle falde S_1, S_2 della sua superficie focale. Completando le formole della trasformazione di Bäcklund, aggiungendo alle (6), (7), (8) del numero precedente le altre

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \cos \omega_1 \, X' + \text{sen} \, \omega_1 \, X'' \quad , \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = - \cos \omega_1 \, X' + \text{sen} \, \omega_1 \, X'' \, ,$$
$$\frac{\partial X'}{\partial u} = \frac{\partial \omega_1}{\partial u} X'' - \cos \omega_1 \, X_1 \quad , \quad \frac{\partial X'}{\partial v} = - \frac{\partial \omega_1}{\partial v} X'' + \cos \omega_1 \, X_1 \, ,$$
$$\frac{\partial X''}{\partial u} = - \frac{\partial \omega_1}{\partial u} X' - \text{sen} \, \omega_1 \, X_1 \quad , \quad \frac{\partial X''}{\partial v} = \frac{\partial \omega_1}{\partial v} X' - \text{sen} \, \omega_1 \, X_1 \, ,$$
$$X_2 = - \cos \sigma \cos \omega_2 \, X' + \cos \sigma \, \text{sen} \, \omega_2 \, X'' - \text{sen} \, \sigma \, X_1 \, ,$$

colle analoghe per Y_1, Z_1; Y_2, Z_2; Y', Z'; Y'', Z'', si avrà

$$X = \text{sen} \, \omega_2 \, X' + \cos \omega_2 \, X'' \, ,$$

colle analoghe per Y, Z e $\Omega = \dfrac{\pi}{2} + \sigma$.

« Con queste formole è facile verificare che si ha:

$$\Sigma X \frac{\partial X_1}{\partial u} = \Sigma X \frac{\partial X_2}{\partial u} = \text{sen} \, (\omega_2 + \omega_1) \, ,$$
$$\Sigma X \frac{\partial X_1}{\partial v} = - \Sigma X \frac{\partial X_2}{\partial v} = - \text{sen} \, (\omega_2 - \omega_1) \, ,$$

(1) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, deuxième partie, pag. 277.

e conseguentemente la (β) diventa, a meno del segno:

$$\frac{1}{1-\operatorname{sen}\sigma}(W_2+W_1)\operatorname{sen}(\omega_2+\omega_1)\,du+\frac{1}{1+\operatorname{sen}\sigma}(W_2-W_1)\operatorname{sen}(\omega_2-\omega_1)dv,$$

e sarà un differenziale esatto se fra le W_1, W_2 sussisteranno le relazioni (4*). Ponendo allora

$$W=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}(W_2+W_1)\operatorname{sen}(\omega_2+\omega_1)\,du+\frac{1}{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}(W_2-W_1)\operatorname{sen}(\omega_2-\omega_1)dv,$$

dove si è tornati a porre $\alpha=\frac{\pi}{2}+\sigma$, le coordinate tangenziali X, Y, Z, W definiranno una superficie per la quale si avrà:

$$e=\frac{\operatorname{sen}^2(\omega_2+\omega_1)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\quad,\quad f=0\quad,\quad g=\frac{\operatorname{sen}^2(\omega_2-\omega_1)}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\sqrt{e}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v},$$

ed essendo soddisfatta la (5), sarà una superficie Φ, sulla quale le u, v saranno le linee di curvatura.

« Si ha dunque il teorema:

Se Σ_1, Σ_2 sono due superficie di Voss, associate rispettivamente alle due falde S_1, S_2 di una congruenza pseudosferica, e legate dalle relazioni (4*), i loro piani tangenti nei punti corrispondenti s'intersecano secondo i raggi di una congruenza normale ad una superficie Φ, sulla quale le linee tangenti a detti piani sono inclinate di uno stesso angolo costante sulle linee di curvatura e la dividono in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.

« Osserviamo infine che le (9) ci forniscono per le (4*) i due sistemi di soluzioni particolari

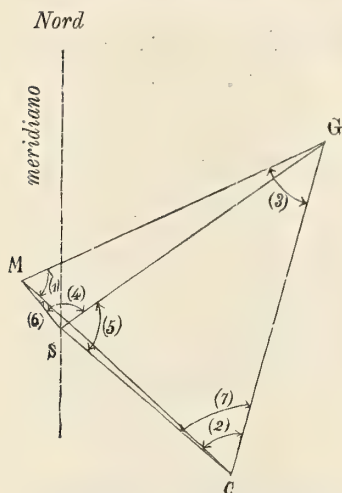
$$W_1=\frac{\partial\omega_1}{\partial u}\quad,\quad W_2=\frac{\partial\omega_2}{\partial u},$$

$$W_1=\frac{\partial\omega_1}{\partial v}\quad,\quad W_2=\frac{\partial\omega_2}{\partial v},$$

e che per $W_1=0$ si ritrovano le superficie Φ studiate dal prof. Bianchi nella Nota citata in principio ».

Geodesia. — *L'attrazione locale nella Specola geodetica di S. Pietro in Vincoli in Roma.* Nota di V. Reina, presentata dal Socio Cremona.

« I. Nella *Determinazione dell'azimut assoluto di monte Cavo sull'orizzonte della Specola geodetica di S. Pietro in Vincoli* (¹) venne eseguita la compensazione della piccola rete che servì a collegare la Specola S coi tre punti trigonometrici di primo ordine da essa visibili M (M. Mario), G (M. Gennaro), C (M. Cavo). Per gli angoli compensati, quali sono indicati dall'unita figura, si ottennero i seguenti valori:

S Specola. — M Monte Mario.
G Monte Gennaro. — C Monte Cavo.

(1) = 69°.12′.15″.84
(2) = 61. 10. 20. 84
(3) = 49. 37. 25. 58
(4) = 99. 03. 02. 68
(5) = 76. 46. 55. 07
(6) = 3. 28. 09. 90
(7) = 61. 52. 13. 21 .

« Con questi dati, e col valore della base MC

$$(\log s = \log \mathrm{MC} = 4.4583100.7)\,,$$

risultante da una comunicazione scritta dell'Istituto Geografico Militare, si determinarono le dimensioni della rete, ottenendosi:

log MC = 4.4583100.7	MC = 28728.ᵐ31
log MG = 4.5190068	MG = 33037. 47
log CG = 4.5472090	CG = 35254. 05
log SM = 3.6826090	SM = 4815. 14
log SG = 4.5042805	SG = 31936. 00
log SC = 4.3788295	SC = 23923. 76

« Ivi si avvertiva però (V. pag. 42) che, per effetto della compensazione della rete di primo ordine, il logaritmo fornito dall'Istituto Geografico avrebbe subìto una piccola modificazione, avente solo per effetto di alterare in un rapporto vicinissimo all'unità le dimensioni della piccola rete qui considerata, senza modificarne la forma. Terminata tale compensazione, io richiesi subito all'Istituto Geografico il nuovo valore della base MC, e, con

(¹) Pubblicazioni della R. Commissione geodetica italiana. Padova, 1894.

tutta sollecitudine, mi venne da esso comunicato per lettera il seguente valore

$$\log s' = \log \text{ MC} = 4.4583088.5.$$

« Questo logaritmo è inferiore al precedente di 12.2 unità della settima cifra decimale: si otterranno quindi le vere dimensioni della rete moltiplicando i valori dei lati già ottenuti per il rapporto $\frac{s'}{s}$, e quindi diminuendo i logaritmi dei lati stessi di 12.2 unità della settima cifra decimale. Si ottengono così i nuovi valori

log MC = 4.4583088.5	MC = 28728.^{m}23
log MG = 4.5190056	MG = 33037. 38
log CG = 4.5472078	CG = 35253. 95
log SM = 3.6826078	SM = 4815. 13
log SG = 4.5042793	SG = 31935. 91
log SC = 4.3788283	SC = 23923. 70

« II. Nella predetta comunicazione dell'Istituto Geografico venne anche dato l'azimut di M. Cavo sull'orizzonte di M. Mario

$$\text{azimut (MC)} = 131^{\circ}.50'.33''.084\,,$$

e le coordinate geodetiche di M. Mario

$$\begin{aligned} \varphi &= \quad 41^{\circ}.55'.24''.381 \\ \theta &= -\ 3.\ 04.\ 06.\ 325\ , \end{aligned}$$

provenienti, come l'azimut, da Castanìa attraverso la rete di primo ordine compensata.

« Se all'azimut (MC) si aggiunge l'angolo (6), si ottiene

$$\text{azimut (MS)} = 135^{\circ}.18'.42''.984\,.$$

« Facendo uso dei due valori

$$s = 4815^{m}.13 \qquad\qquad \alpha = 135^{\circ}.18'.42''.984\ ,$$

ed adoperando le formole [1]

$$\begin{aligned} \varphi' - \varphi &= \frac{s \cos \alpha}{\varrho \operatorname{sen} 1''} - \frac{s^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2\varrho \operatorname{N} \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tg} \varphi \\ \theta' - \theta &= \frac{s \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{N'} \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi'} \\ m &= (\theta' - \theta) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi') \\ \alpha' &= \alpha + m \pm 180^{\circ}\ , \end{aligned}$$

(1) Cfr. Nicodemo Jadanza. *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche.* Torino, 1891 (pag. 47).

si faccia il trasporto della latitudine, della longitudine e dell'azimut da M. Mario alla Specola. Si ottengono per le coordinate geodetiche della Specola (provenienti da Castanìa)

$$\varphi' = 41^\circ.53'.33''.389$$
$$\theta' = -\ 3\ .01\ .39\ .417$$
$$\alpha' = \text{azimut (SM)} = 315^\circ.20'.21''.110\,.$$

« Se a questo azimut si aggiungono gli angoli (4) e (5) si ottiene

$$\text{azimut (SC)} = 131^\circ.10'.18''.86\,.$$

« Si adotti per la latitudine astronomica della Specola quella determinata nel 1887 (¹)

$$\varphi_a = 41^\circ.53'.35''.03\,,$$

e per l'azimut astronomico (SC) quello risultante dalla sopra accennata *Determinazione* ecc. Si avrà:

Latitudine della Specola	geodetica	$\varphi_g =$	$41^\circ.53'.33''.39$
	astronomica	$\varphi_a =$	41. 53. 35. 03
Deviazione locale in latitudine		$\varphi_g - \varphi_a =$	$-\ 1''.64$
Azimut di M. Cavo sul-l'orizzonte della Specola	geodetico	$\alpha_g =$	$131^\circ.10'.18''.86$
	astronomico	$\alpha_a =$	131. 10. 13. 52
Deviazione locale in azimut		$\alpha_g - \alpha_a =$	$5''.34$

« Con questi due dati si possono determinare le due componenti ξ (componente-Sud) ed η (componente-Ovest) della *attrazione locale*, definite dalle due formole (²)

$$\xi = \varphi_g - \varphi_a$$
$$\eta = (\alpha_g - \alpha_a)\ \text{cotg}\ \varphi_a\,.$$

« Sostituendovi i precedenti valori numerici se ne ricava

$$\xi = -\ 1''.64 \qquad \eta = 5''.95\,,$$

« La grandezza assoluta Θ dell'attrazione locale ed il suo azimut A (contato dal meridiano astronomico a partire dal Sud nel senso Sud-Ovest-Nord-est) saranno da ricavarsi dalle formole

$$\xi = \Theta \cos A \qquad \eta = \Theta\ \text{sen}\ A\,,$$

(¹) Cfr. *Sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi in Roma.* Esperienze eseguite dai prof. G. Pisati ed E. Pucci, pubblicate per cura di V. Reina. Mem. della R. Acc. dei Lincei, 1894 (pag. 94).

(²) Vedi Helmert. *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie.* Vol I, pag. 518, 537. Nelle formole date dal testo è stata solo introdotta una modificazione di simboli.

e queste dànno:

$$\Theta = 6''.18 \qquad A = 105^\circ.24'.10''.$$

« Questi elementi definiscono la posizione della normale geoidica (verticale) della Specola rispetto alla normale ellissoidica, cioè alla retta condotta dal punto stesso normalmente all'ellissoide di riferimento. Questo ellissoide, avente le dimensioni di Bessel ed avente l'asse di rotazione parallelo a quello terrestre, si suppone disposto in guisa da intersecare normalmente la verticale di Castanìa a livello del mare.

« III. Se si fosse determinata direttamente, con operazioni astronomiche, la longitudine della Specola rispetto a Castanìa, si potrebbe calcolare in un secondo modo la componente η dell'attrazione locale, cioè colla formola

$$\eta = (\theta_g - \theta_a) \cos \varphi_a ,$$

essendo la longitudine geodetica θ_g e la astronomica θ_a contate a partire da Castanìa positivameute verso l'Est [1]. Confrontando questo valore col precedente, si dovrebbe avere

$$\alpha_g - \alpha_a - (\theta_g - \theta_a) \operatorname{sen} \varphi_a = 0 ,$$

che è l'*equazione di Laplace*. Dal grado maggiore o minore con cui questa equazione riesce soddisfatta, si potrebbe trarre un criterio circa le esattezza delle operazioni astronomiche e geodetiche.

« Ora la determinazione astronomica della differenza di longitudine fra Roma e Castanìa non venne effettuata, ma lo fu però quella fra Roma e Pachino, risultante dalle due determinazioni Roma-Napoli e Napoli-Pachino: di più a Pachino venne determinato un azimut astronomico. Con questi elementi è possibile avere una verifica dei precedenti risultati.

« Nel *Processo verbale delle sedute della Commissione geodetica italiana tenute in Roma nel dicembre 1889* si trovano i seguenti dati (pag. 24):

Differenza astronomica di longitudine	Roma-Napoli . . .	1°.46'.20''.87
" " "	Napoli-Pachino . . .	0. 50. 21. 56
" " "	Roma-Pachino . . .	2. 36. 42. 43

Roma (cerchio meridiano del Campidoglio)
Napoli (centro dell'Osservatorio di Capodimonte)
Pachino (segnale trigonometrico).

« Questa differenza di longitudine si può facilmente ridurre dal Campidoglio alla Specola. Si rammenti perciò che nella *Determinazione del-*

(1) Nell'opera su citata di Helmert si presenta nel secondo membro il segno — perchè ivi è fatta l'ipotesi contraria circa il senso nel quale vengono contate le longitudini.

l'azimut ecc. sopra citata (pag. 49) sono date le coordinate geodetiche polari della Specola e del Campidoglio (asse della torre) rispetto al Collegio Romano (asse del tetto mobile dell'equatoriale):

Specola	$s = 1227.30$	$\alpha = 118.^{\circ}15.'57.''29$
Campidoglio	$s = 712.25$	$\alpha = 154.\ 48.\ 13.\ 26$

« Con queste coordinate, e facendo uso delle formole

$$\varphi' - \varphi = \frac{s \cos \alpha}{\varrho \operatorname{sen} 1''}$$

$$\theta' - \theta = \frac{s \operatorname{sen} \alpha}{N' \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi'},$$

si trova:

Differenza di longitudine	Specola — Collegio Romano	46''.896
" "	Campidoglio (torre) — Coll. Rom. . .	13. 155
" "	Specola — Campidoglio (torre) . . .	33''.741
Il cerchio meridiano è all'Est della torre di [1]		1''.61

quindi si ottiene:

Differenza di longitudine Specola — Campidoglio (cerchio merid.) 32''.13

« Applicando questa riduzione alla differenza astronomica di longitudine fra Roma e Pachino sopra riportata si trova

Differenza astronomica di longitudine Specola-Pachino $\theta_a = -2^{\circ}.36'.10''.30$

« D'altra parte dal fascicolo *Elementi geodetici dei punti contenuti nei fogli 273-74-76-77 della carta d'Italia* (pag. 33) si cava

	longitudine geodetica di Pachino . . .	— 0°.25'.46''.708
Si è trovato	" " della Specola . . .	— 3. 01. 39. 417

quindi si ha:

Differenza geodetica di longitudine Specola — Pachino $\theta_g = -2^{\circ}.35'.52''.709$

« Fra la Specola e Pachino si ha pertanto la *deviazione in longitudine*

$$\theta_g - \theta_a = 17''.59$$

[1] Questo valore è riportato a piedi della tabelletta a pag. 24 nel *Processo verbale* sopra citato. Ivi è detto però per errore « il cerchio meridiano è all'*Ovest* della torre », invece che all'*Est*, come volle gentilmente confermarmi per lettera il prof. Di Legge.

« Nel *Processo verbale* ecc. già più volte citato si trova ancora (pag. 22):

Azimut di Mezzogregorio sull'orizzonte di Pachino	geodetico	$\alpha_g = 337^{\circ}.03'.44''.608$
	astronomico . . .	$\alpha_a =$ 52. 10
		$\alpha_g - \alpha_a = -7''.49$
Per la Specola si è trovato		$\alpha_g - \alpha_a = +5.34$

e si ottiene quindi per la *deviazione in azimut* fra la Specola e Pachino

$$\alpha_g - \alpha_a = 12''.83\,.$$

« Sostituendo questi due valori nella equazione di Laplace si trova

$$\alpha_g - \alpha_a - (\theta_g - \theta_a) \operatorname{sen} \varphi_a = 1''.08\,,$$

residuo soddisfacente, che costituisce una prova della bontà delle operazioni astronomiche e geodetiche ».

Fisica. — *Sulle aree d'isteresi elastica.* Nota di M. CANTONE, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Sulla durata delle registrazioni sismiche.* Nota di E. ODDONE, presentata dal Socio TACCHINI.

« Considerando i diagrammi avuti nell'ultimo biennio dai migliori sismometrografi italiani, col preconcetto che i terremoti sono fenomeni quasi istantanei, si rimane colpiti dapprima della loro durata, poi della variabilità di questa durata. In uno stesso apparecchio gli uni avvengono in meno di un minuto primo, gli altri a svolgersi richiedono delle ore.

« Ho voluto ricercare i fattori che influiscono sulla durata del movimento, e mi sembrò che uno fosse la distanza dall'origine di scuotimento. Per accertarmene, ho preso in esame i dati dei sismometrografi più sensibili e per pormi al riparo dalle irregolarità dovute alla varia sensibilità degli apparecchi, comparai le durate ottenute in una stessa stazione e dallo stesso apparato in occasione di terremoti diversi, colle distanze della stazione agli epicentri probabili, contate sul cerchio massimo. In complesso sono tre confronti quelli che presento, l'uno indipendente dall'altro, e che riguardano le stazioni di Rocca di Papa, Roma e Siena [1].

« La seguente tabella presenta nelle prime tre colonne la data, la località e l'intensità dei terremoti più notevoli del biennio 1893-94, nella

[1] Gli strumenti registratori erano: A Rocca di Papa un sismometrografo di 7 m. di lunghezza, 100 kg. di massa ed ingrandimento da 1 a 10 cominciato a funzionare nell'agosto 1893. — A Roma un sismometrografo di 6 m. di lunghezza, 75 kg. di massa ed ingrandimento da 1 a 10 cominciato a funzionare nel febbraio 1893. — A Siena un sismometrografo di 6 m. di lunghezza, 50 kg. di massa ed ingrandimento da 1 a 75 cominciato a funzionare nel marzo 1894.

quarta e quinta colonna un primo confronto tra le distanze dall'epicentro e le durate di movimento alla stazione di Rocca di Papa, nella quarta e sesta colonna un secondo confronto, indipendente dal primo, tra le stesse variabili per la stazione di Roma, finalmente nella quarta ed ultima colonna il terzo confronto per la stazione di Siena.

Data	Località	Intensità	Distanze dall'Epicentro in Km.	Durata del movimento a		
				Rocca di Papa	Roma	Siena
15 Ag. 94	Colli Laziali	debole	0	10″		
			25		70″	
			220			nulla
7 Ott. 94	idem	sensibile	0	6″		
			25		75″	
			220			nulla
29 Ott. 94	Colli di Tivoli	idem	25	nulla	60″	
			200			nulla
14 Lugl. 94	Volterra (Pomarance). . .	forte	40			150″
			220 circa	nulla	nulla	
20 Mag. 94	Castel fiorentino (Siena).	fortissimo	40			130″
			240 circa	nulla	nulla	
2 Ag. 93	Abbruzzi.	forte	70	nulla	180″	
28 Mag. 94	Basilicata	fortissimo	345 circa	90″	360″	
			550			300″
11 Mag. 93	Palermo	forte	425		360″(?)	
16 Nov. 94	Calabria e Sicilia.	disastroso	455	360″		
			480		660″	
			675			600″
14 Giug. 93	Epiro (Grecia).	rovinoso	755		480″	
3 Lugl. 93	idem	forte	755		420″	
17 Apr. 93	Zante.	disastroso	850		160″	
31 Genn. 93	idem	idem	850		240″	
1 Febbr. 93	idem	rovinoso	850		240″	
4 Ag. 93	idem	forte	850		240″	
8 Apr. 93	Belgrado Ungheria. . . .	rovinoso	825		540″	
20 Apr. 94	Locride (Grecia)	idem	1300 circa	traccie	960″	600″
27 Apr. 94	idem	idem	1300 circa	900″	1080″	600″
10 Lugl. 94	Costantinopoli.	disastroso	1400 circa	900″	1860″	2280″
9 Febbr. 93	Samotracia.	rovinoso	1400 circa		1200″	
2-3 Marzo 93	Aleppo	fortissimo	2500 circa		900″	
5 Nov. 93	Turkestan	idem	5000 circa	420″	1260″	
22 Marzo 94	Giappone.	disastroso	9330 circa	4380″	4800″	3600″
27 Ott. 94	Rioia (Rep. Argentina). .	idem	11170 circa	1800″	2100″	3600″

« Dal quadro soprascritto, anche a dispetto di talune forti irregolarità, risulta che nelle tre stazioni considerate *la durata del movimento crebbe col crescere della distanza dall'epicentro*. Le forti irregolarità sembrano specialmente dovute alla diversa natura dei terreni ed al fatto che le onde, sotto una data ampiezza, sfuggono agli apparati e moncano la registrazione. Non è infatti improbabile che le durate traggano origine dalle differenti velocità delle componenti, velocità che a loro volta variano nei varî strati; ed è poi naturale che in pratica le durate siano influenzate dall'intensità delle scosse. L'energia delle onde sismiche diminuendo almeno in ragione del quadrato dei raggi, esisterà una distanza alla quale una parte delle onde sfuggirà ai registratori ed un'altra distanza alla quale nessuna eserciterà più influenza sensibile su di essi. Le onde dei terremoti romani non giunsero all'apparecchio di Siena e reciprocamente i terremoti toscani non arrivarono agli apparecchi di Roma e Rocca di Papa. Io ascrivo a queste cause le eccezionalmente piccole durate delle registrazioni a Roma in occasione dei terremoti di Zante, dell'Epiro, di Samotracia e di Aleppo e quelle a Rocca di Papa nei terremoti del Turkestan e di Grecia il 20 aprile. Abbiamo ancora che se per qualsiasi ragione le ampiezze decrescono, le registrazioni dovranno riuscire di minor durata. Ad esempio si sa che le ampiezze sono minori nei terreni più elastici, dunque ivi le durate dovrebbero essere minori. È quel che si verifica. A parità di sensibilità degli apparecchi, nella stazione di Rocca di Papa sulla roccia sperone, le durate sono minori di quelle nel sottosuolo meno elastico di Roma.

« Ai futuri diagrammi, ottenuti con strumenti comparabili, in svariati osservatorî e passati al vaglio di ulteriori studî, il dire se l'enunciato di cui sopra è legge, e quali altre forze o fattori entrano in giuoco.

« Le lunghe durate a distanza, limitate dalla sensibilità degli apparecchi, suggeriscono alcune considerazioni sulla velocità di propagazione.

« Esse spiegano in parte le discrepanze occorse nei dati orari di osservatorî vicini e le divergenze nei valori della velocità di propagazione risultate fin'ora. Alle stazioni lontane, prima dei moderni diagrammi, gli strumenti segnavano solo una fase fugacissima, uno di quei massimi che ora sappiamo possono benissimo distare dal massimo principale per parecchi primi e dal vero inizio del movimento per delle mezz'ore. Ecco come in osservatorî vicini o nello stesso osservatorio per diversi apparati, si potevano avere dati diversi e quindi come malgrado la bontà dei procedimenti di calcolo e la copia delle stazioni, i valori della velocità potevano oscillare tra meno di 2 e più di 5 km. al secondo.

« I nuovi diagrammi, colle loro grandi durate, accennando ad onde di velocità varia, che percorrono spazi eterogenei, diversamente lunghi, hanno allargato il problema.

« Tolte le incertezze di cui sopra, la velocità di propagazione, in base

alla fase massima, ha potuto tendere vieppiù ad un valore costante (circa 2,5 km. al secondo): senonchè per il carattere delle oscillazioni in questa fase si è indotti a credere che il movimento non sia dovuto a semplici onde propagantisi in un solido indefinito, per quanto incompatto; ma piuttosto abbia origine da onde di natura diversa, forse superficiali e fors'anche dipendenti dalla forza di gravità.

« Sembra allora naturale che la *velocità principale* sia quella dell'onda che prima giunge alla stazione lontana, come quella che avrà percorso la strada più breve e gli strati più elastici, e che i movimenti seguenti appartengano a quelle onde che percorsero strade via via più lunghe, attraverso terreni via via meno elastici o che per istrada mutarono la loro stessa natura perchè assoggettate ad altre forze.

« Si hanno pochissimi dati di queste velocità principali e quei pochi non mi sembrano franchi da obbiezioni. Ad esempio, valendosi dei diagrammi ottenuti col sismometrografo di Roma e coi pendoli orizzontali di Nicolajew e Strassburg, il dott. Agamennone (1) calcolò la velocità di propagazione delle onde dei terremoti di Zante, l'anno 1893, ed in base alla fase iniziale, trovò il valore di 3,3 km. accennando però alla probabilità d'un aumento. Più recentemente, colle ore iniziali ottenute nei magnetografi di Lisbona, Parigi, Greenwich, Wilhelmshaven e colle ore pendolari di Cadice, in occasione della grande scossa di terremoto dell'Andalusia il 25 Dicembre 1884 (2), ricavò la velocità principale in km. 3,1 cioè quasi identica alla prima. Questa coincidenza non m'impedisce di ritenere questi valori troppo piccoli. Infatti chi considera la durata di movimento nelle stazioni sunnominate, ricordando la relazione, precipuo oggetto della mia nota, non tarderà a convenire che in generale le durate furono inferiori a quelle che competeva loro per la distanza dall'epicentro, e che quindi gli istanti creduti inizi corrispondevano ad una fase inoltrata del movimento. Della prima serie, il solo terremoto del 20 marzo, del terremoto andaluso, la sola stazione di Lisbona, hanno presentati diagrammi di durata sufficiente da inferire che probabilmente l'inizio della registrazione coincide col principio del movimento. Questi dati restanti sono troppo poca cosa per poter sussidiare col calcolo le mie vedute; per altro è degno di nota che ambedue gli esempi s'accordano per rialzare notevolmente le velocità principali.

« Qui torna opportuno ricordare che gli autori della classica monografia sul terremoto di Charleston del 1886, trovarono per la velocità di propagazione in base al principio dei movimenti sensibili alle persone, che è quanto dire in base alle prime fasi massime dei nuovi diagrammi (3), il valore medio di

(1) Rend. della R. Accad. dei Lincei, Serie 5ª, Vol. II, 2° sem., 1893, pag. 393 e Vol. III, 1° sem., 1894 p. 383.

(2) Rend. della R. Accad. dei Lincei, Serie 5ª, Vol. III, 2° sem., 1894, pag. 317.

(3) A rigore non è ancora noto come si comportano le registrazioni in rapporto alle sensazioni.

5,2 km. La considerazione della fase iniziale avrebbe dunque condotto a valori superiori. È anche noto che la scossa perturbò per breve tempo gli strumenti magnetici di Toronto a 1180 km. dall'epicentro, e che in base al principio di questa registrazione la velocità risultò anch' essa di 5 km. La perturbazione, ed è cosa solita nei magnetografi, avvenne con ogni probabilità ad una fase avanzata del movimento, e velocità maggiori di 5 km. si avrebbero avute tenendo conto dei primissimi tremiti.

« In molti dei grandi terremoti avvenuti nel biennio, la velocità, calcolata in base agli istanti iniziali sui migliori apparati italiani, mi risultò variabile e superiore ai 5 km. Essendomi arrivati i dati orarî americani, in occasione del disastro dell' Argentina il 27 ottobre 1894, da nessuno ch' io sappia ancora pubblicati in Europa [1], li fò di pubblica ragione valendomene a prova della maggior velocità di propagazione principale. Secondo la relazione ufficiale americana degli ingegneri A. Cantoni ed L. Caputo, firmata dalla Direzione delle Miniere, l'epicentro di questo terremoto, che distrusse le due città di Rioja e S. Juan, sta a 30° di lat. Sud ed a 67° di long. W. da Parigi. L'ora del disastro fu le 21 - 48′ t. m. E. C. — Però la città di Rioja avendo dato le 21 - 41′ - 48″ io riterrò quest'ora, che evidentemente riduce ad un minimo le velocità calcolate. In Europa le ondulazioni furono segnate nelle seguenti stazioni con dati orari del movimento iniziale variabilissimi, che io riproduco, ordinati per tempo crescente e coll' indicazione dell'apparecchio registratore, a conferma delle opinioni svolte nelle precedenti pagine.

Stazioni	Apparati indicatori	Ore del movimento iniziale	Ore della fase massima
Roma	Sism.fo L = 16 m. M = 200 kg. Ingr. 10	22 8′	22 56′
Charkow	Pendolo orizzontale	» 9′	23 10′
Nicolayew . . .	Pendolo orizzontale	» 12′	23 5′
Siena	Sism.fo L = 6 m. M = 50 kg. Ingr. 75	» 12′	22 56′
Ischia	Simoscopio e pendoli orizzontali	» 33′	23 8′
Utrecht.	Magnetografi	» 45′	22 56′
Pavia.	Sism.fo L = 4,5 m. M = 40 kg. Ingr. 10	» 46′	22 55′
Rocca di Papa	Sism.fo L = 7 m. M = 100 kg. Ingr. 10	» 49′	22 51′
Wilhelmshaven	Magnetografi	» 56′	23 3′

[1] Nell'intervallo tra la consegna del manoscritto e la correzione delle bozze, uscirono sul terremoto argentino le seguenti due Note: C. Davison, *The velocity of the Argentine Earthquake Pulsations, of October 27, 1894.* Nature, Vol. 51, pag. 462. — A. F. Noguès, *Tremblement de terre chilo-argentin du 27 Octobre.* C. R., tome CXX, p. 167. Consultare anche le: Europaïsche Beobachtungen des grossen japanischen Erdbebens vom 22 März 1894, und des venezolanischen Erdbebens von 28 April 1894 nebst Untersuchungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Erdbeben, del Dr. E. v. Rebeur Paschwitz nelle Petermann's Mittheilungen. Marzo 1895. pag. 13

« Le differenze di tempo tra l'ora epicentrale e quelle iniziali di Roma e Charkow sono rispettivamente di 1572 e 1632", gli spazi calcolati sul cerchio massimo sono rispettivamente di 11,200 e 12,700 km.: risultano dunque le due velocità di 7,1 e 7,8 km. al secondo. Se invece dell'arco, per lo spazio percorso si tiene la corda, le velocità diventano di poco inferiori e precisamente di 6,4 e 7,0 km.

« Ho inoltrato questi dati non credendo dover ritenere definitiva la velocità di 3 km. circa risultante dalle note suaccennate; ma siccome velocità superiori ai 5 km. non si sono sperimentate mai in nessun solido, essi non vanno ancora ritenuti per valori assoluti. Quando nelle aree epicentrali vediamo mancare ogni distribuzione geometrica oraria, quando cioè abbiamo per ogni punto una scossa brevissima, ma i dati orari sono saltuariamente diversi da punto a punto; quando ancora non abbiamo nessun diagramma di sismografi buoni per le medesime aree in occasione di fortissimi terremoti, cosicchè ignoriamo se i tremiti che occasionano le prime registrazioni lontane irradiano prima od al momento della scossa; e quando finalmente, nulla sappiamo del meccanismo dei terremoti e del mezzo che percorrono le onde, le velocità trovate possono risultare solo apparenti.

« Vengo alle seguenti conclusioni:

« La durata di movimento cresce col crescere della distanza dall'epicentro.

« I vari massimi che s'osservano nei nuovi diagrammi, in parte spiegano le discrepanze avute nei dati orari e quindi nei valori delle velocità di propagazione.

« La velocità in base alla fase massima è pressochè costante a circa 2,5 km. al secondo; ma sembra non corrispondere alla solita propagazione longitudinale delle onde.

« La velocità in base alla fase iniziale ha valori apparenti variabili, in generale notevolmente più alti di quelli attribuitile fin' ora.

« I dati iniziali dei magnetografi non coincidono coll' inizio del movimento, e di conseguenza al pari della falange di dati dei sismoscopi e sismografi poco sensibili, vanno scartati nel calcolo della velocità principale.

« In attesa che cresca il numero degli apparati comparabili e sensibili, credo che i confronti sulle durate di movimento potranno giovare a decidere se il principio d'un diagramma corrisponde al vero inizio del movimento, oppure ad una fase inoltrata del medesimo.

« Dell' importanza geologica dei fenomeni sismici in un dato centro, sembrami si possa giudicare meglio dal confronto delle durate di movimento in varie stazioni, su apparecchi comparabili, che non dalla gravità dei danni, i quali ormai sappiamo sono sempre relativi alla stabilità del terreno superficiale, alla solidità di costruzione, alla densità degli abitati ecc. ».

Chimica. — *Sulla Octoidro-para-dimetil-etil-naftalina.* Nota di A. Andreocci, presentata dal Socio Cannizzaro.

« Annunziai con una mia Nota preliminare (¹) che dalla santonina per azione del cloruro stannoso e dello stagno in soluzione cloridrica all'ebollizione, si forma oltre all'acido santonoso destrogiro, un idrocarburo con sviluppo di anidride carbonica, e mi proposi di stabilire la composizione e di indagare possibilmente la struttura del detto idrocarburo con ulteriori ricerche che oggi rendo note.

« Dopo una lunga serie di prove trovai che il miglior metodo per ottenere l'idrocarburo è il seguente:

« Entro un pallone della capacità di litri cinque, che si possa adattare a smeriglio con un refrigerante ascendente, si disciolgono grammi 250 di santonina in litri 2,5 di acido cloridrico fumante e si aggiungono grammi 400 di stagno in verghe e grammi 2,5 di cloruro rameico, che rende più rapido l'attacco del metallo.

« Riscaldando all'ebollizione per 10 ore su bagno di sabbia, o a fiamma diretta, si separa l'acido santonoso bruno e vischioso, si svolge anidride carbonica e ricade nel recipiente coi vapori condensati del liquido, un olio, la di cui quantità però non sembra che aumenti dopo le prime due ore di riscaldamento, e che in fine dell'operazione si può raccogliere distillando una parte del liquido stesso.

« Da un chilogramma di santonina ho ottenuto così circa 20 grammi di olio; mentre trattando all'ebollizione la santonina con una soluzione di cloruro stannoso in presenza di stagno, se ne formano solo piccole quantità, però maggiore è il rendimento e la purezza dell'acido santonoso.

« L'olio ridistillato in corrente di vapore, lavato con carbonato sodico e seccato contiene cloro; ma in quantità così piccola da non corrispondere a quella di un possibile composto mono-clorurato, come risulta dalla seguente analisi:

gr. 0,4730 di olio dànno gr. 0,0761 di AgCl; ossia contiene il 3,98 % di cloro.

« L'olio distilla fra 250° e 270° svolgendo acido cloridrico e perde così quasi completamente il cloro per una prolungata ebollizione a ricadere; infatti dopo 3 ore di riscaldamento non è più sensibile lo sviluppo dell'acido cloridrico, e l'olio distilla fra 251° e 265°. Lasciato per qualche tempo sull'idrato potassico fuso e fatto bollire a ricadere per altre tre ore, distilla fra 248°-260° e la frazione più grande, bollente fra 248°,5 e 251°, contiene

(¹) Questi Rendiconti, seduta del 30 aprile 1893.

ancora una piccolissima quantità di cloro, come risulta dai dati seguenti:
gr. 0,4676 di olio dànno gr. 0,0090 di AgCl corrispondenti a 0,47 % di cloro.

« Fatto bollire a ricadere sul sodio per due ore, perde ogni traccia di cloro, e distilla tutto in un grado da 247° a 248°, ma non è ancora purissimo, come risulta dalla prima delle seguenti combustioni, però migliora col prolungare l'ebollizione sul sodio, come risulta dalle altre due:

I. gr. 0,3233 di olio bollito 2 ore sul sodio dànno gr. 0,9404 di CO^2 e gr. 0,2949 di H^2O

II. gr. 0,2236 di olio bollito 4 ore sul sodio dànno gr. 0,7139 di CO^2 e gr. 0,2461 di H^2O

III. gr. 0,2245 di olio bollito 12 ore sul sodio dànno gr. 0,7191 di CO^2 e gr. 0,2489 di H^2O.

« Da questi dati si hanno per la composizione centesimale dell'idrocarburo i seguenti valori:

	I	II	III
C	86.97	87.07	87.36
H	12.18	12.23	12.32
Totale	99.15	99.30	99.68

« La densità di vapore della frazione bollente da 247,4° a 247,8°, determinata col metodo di Meyer in atmosfera d'idrogeno riscaldando coi vapori di difenilammina, risulta dal seguente specchietto:

Peso della sostanza	gr.	0,0715
Volume d'idrogeno spostato	cc.	8,5
Temperatura.	gradi	13,2
Pressione (corr.)	mm.	754,3
Densità riferita all' H = 1		100
Peso molecolare		200

« Da queste esperienze ed analisi si deduce:

1° Lo stagno in soluzione cloridrica a caldo riduce facilmente la santonina nell'acido santonoso, che poi converte parzialmente in un idrocarburo, oppure direttamente trasforma la santonina in quest'ultima sostanza.

2° L'idrocarburo si deve addizionare, per lo meno parzialmente, ad una molecola di acido cloridrico trasformandosi in un composto clorurato, più idrogenato, poco stabile, perchè si dissocia in gran parte distillato alla pressione ordinaria ed anche in corrente di vapore e che perde completamente il cloro per ebollizione sul sodio.

3° Il composto clorurato deve bollire ad una temperatura più alta dell'idrocarburo, poichè il loro miscuglio bolle fra 250° e 270°; mentre l'idrocarburo a 247°-248°.

4° L'idrocarburo deve anche essere probabilmente inquinato da piccole quantità di una sostanza ossigenata, alla quale probabilmente deve l'odore di menta che possiede, e tale impurezza si può eliminare in gran parte per una prolungata ebollizione sul sodio.

5° I valori ottenuti dalla 3ª combustione e dalla densità di vapore della frazione bollente da 247,4° a 247,8° sono sufficienti per stabilire, come vedremo, la formola dell'idrocarburo; intanto si accordano colle formole possibili $C^{15}H^{26}$ e $C^{14}H^{24}$ e non con le altre $C^{15}H^{24}$ e $C^{14}H^{22}$, pure possibili; come risulta dal seguente specchio:

	Calcolato per				Trovato
	$C^{15}H^{24}$	$C^{14}H^{22}$	$C^{15}H^{26}$	$C^{14}H^{24}$	
Carbonio	88,23	88,42	87,38	87,50	87,36
Idrogeno	11,77	11,58	12,62	12,50	12,32
Peso molec^e^.	204	190	206	192	200

« Considerando poi, che la formazione dell'idrocarburo e del suo composto d'addizione coll'acido cloridrico avviene contemporaneamente allo sviluppo di anidride carbonica, e che la santonina e l'acido santonoso sono composti a 15 atomi di carbonio, si deve necessariamente attribuire all'idrocarburo la formola $C^{14}H^{24}$ e non l'altra $C^{15}H^{26}$; poichè adottando questa si dovrebbe ammettere la trasformazione del carbossile della catena propionica nel gruppo metile, cosa poco probabile anche per la natura del riducente e le condizioni della reazione. Inoltre non si dovrebbe tener conto dello sviluppo dell'anidride carbonica, che deve provenire evidentemente dal distacco del carbossile per azione dell'acido cloridrico su quella parte di acido santonoso, o di santonina, che si trasforma in idrocarburo; tanto più che il volume dell'anidride carbonica raccolta corrisponde a circa una molecola per ogni molecola d'idrocarburo formatosi.

6° L'idrocarburo derivando dalla santonina deve essere perciò una para-dimetil-etil-octoidronaftalina; il composto clorurato probabilmente una para-dimetil-etil-decaidro-cloronaftalina e la loro formazione potrebbe esprimersi nel modo seguente:

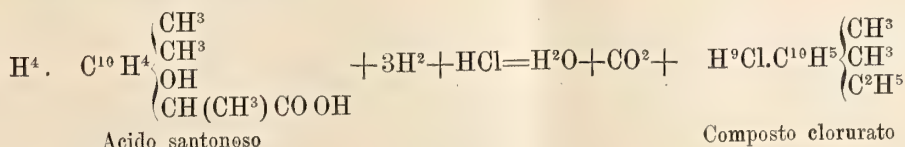
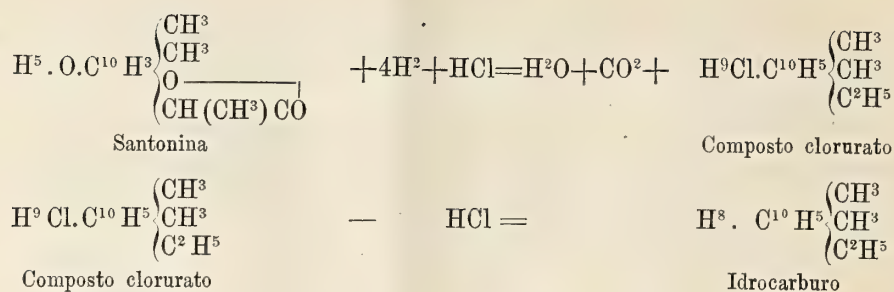
$$H^4.\ C^{10}H^4\begin{cases}CH^3\\CH^3\\OH\\CH(CH^3)COOH\end{cases} + 3H^2 + HCl = H^2O + CO^2 + H^9Cl.C^{10}H^5\begin{cases}CH^3\\CH^3\\C^2H^5\end{cases}$$

Acido santonoso — Composto clorurato

$$H^5.O.C^{10}H^3\begin{cases}CH^3\\CH^3\\O\text{———}|\\CH(CH^3)CO\end{cases} + 4H^2 + HCl = H^2O + CO^2 + H^9Cl.C^{10}H^5\begin{cases}CH^3\\CH^3\\C^2H^5\end{cases}$$

Santonina — Composto clorurato

$$H^9Cl.C^{10}H^5\begin{cases}CH^3\\CH^3\\C^2H^5\end{cases} - HCl = H^8.C^{10}H^5\begin{cases}CH^3\\CH^3\\C^2H^5\end{cases}$$

Composto clorurato — Idrocarburo

« L'idrocarburo può essere rappresentato in un piano con una delle sette possibili formule di struttura per le quali l'idrogeno additivo del nucleo che porta l'etile è distribuito in tutte ugualmente, come è distribuito nella santonina e negli acidi santonosi; mentre nel nucleo bimetilato gli altri quattro atomi d'idrogeno aggiunti sono distribuiti differentemente.

« Il composto clorurato, sarebbe il derivato d'una naftalina completamente idrogenata.

« Lo studio dell'idrocarburo e del composto clorurato ha una certa importanza, perchè una volta stabilita indiscutibilmente la loro struttura, si potrebbe anche dire che dalla santonina si sono ottenuti derivati in tutte le serie dal tipo naftalina al più idrogenato; cioè al tipo decaidro, come risulta dal seguente specchio, col quale credo opportuno rammentarne i principali rappresentanti:

Tipo naftalina $C^{10}H^8$

Para-dimetil-naftalina	$C^{10}H^6(CH^3)_2$
Para-dimetil-naftol	$C^{10}H^5.OH.(CH^3)^2$
Para-dimetil-etil-naftalina	$C^{10}H^5(CH^3)^2 - C^2H^5$
Acidi santinici	$C^{10}H^5(CH^3)^2 - CH{<}^{CH^3}_{COOH}$

Tipo biidro-naftalina $H^2.C^{10}H^8$

Biidro-para-dimetil-naftol	$H^2.C^{10}.H^5OH.(CH^3)^2$
Biidro-para-dimetil-etil-naftalina? . .	$H^2.C^{10}H^5(CH^3)^2 - C^2H^5$
Acidi biidro-santinici	$H^2.C^{10}H^5(CH^3)^2 - CH{<}^{CH^3}_{COOH}$

Tipo tetraidro-naftalina $H^4.C^{10}H^8$

Acidi santonosi	$H^4.C^{10}H^4\begin{cases}-OH\\=(CH^3)^2\\-CH{<}^{CH^3}_{COOH}\end{cases}$

Iposantonine . . . . $H^4 . C^{10} H^4 \left\{ \begin{array}{l} = (CH^3)^2 \\ - O - \\ - CH\text{-}CO \\ \quad CH^3 \end{array} \right.$

Desmotroposantonine . . . . $H^4 . C^{10} H^3 \left\{ \begin{array}{l} - OH \\ = (CH^3)^2 \\ - O - \\ - CH\text{-}CO \\ \quad CH^3 \end{array} \right.$

Tipo esaidro-naftalina $H^6 . C^{10} H^8$

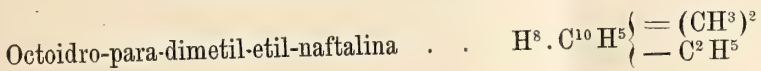
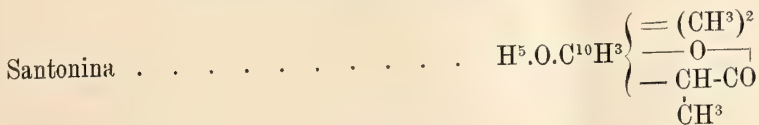
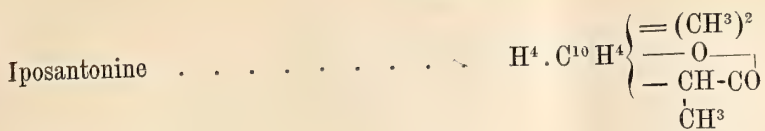
Santonina . . . . $H^5.O.C^{10}H^3 \left\{ \begin{array}{l} = (CH^3)^2 \\ - O - \\ - CH\text{-}CO \\ \quad CH^3 \end{array} \right.$

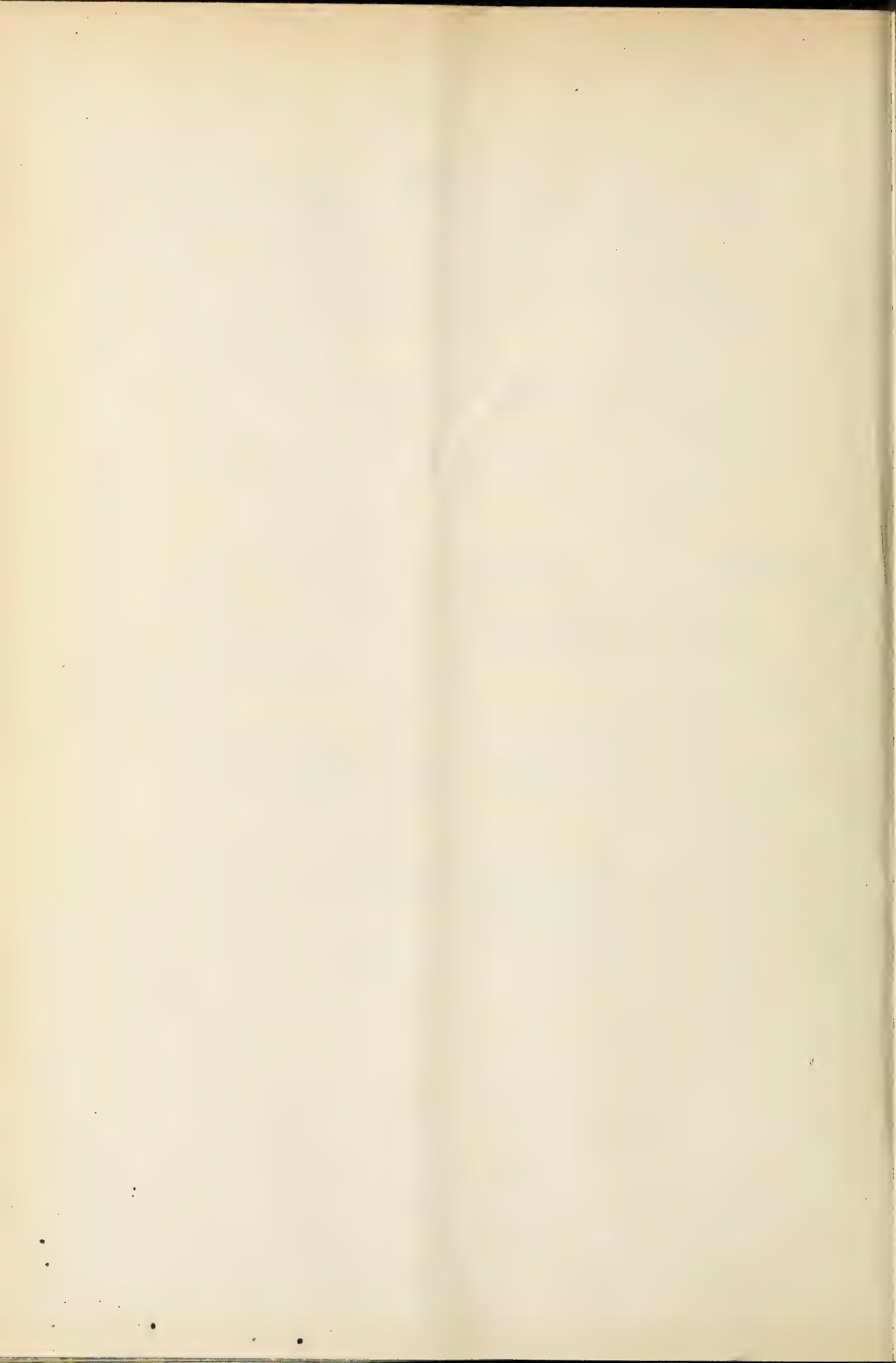
Santoninammina . . . . $H^6 . C^{10} H^3 \left\{ \begin{array}{l} - NH^2 \\ = (CH^3)^2 \\ - O - \\ - CH\text{-}CO \\ \quad CH^3 \end{array} \right.$

Tipo octoidro-naftalina $H^8 . C^{10} H^8$

Octoidro-para-dimetil-etil-naftalina . . $H^8 . C^{10} H^5 \left\{ \begin{array}{l} = (CH^3)^2 \\ - C^2 H^5 \end{array} \right.$

Tipo decaidro-naftalina $H^{10} . C^{10} H^8$

Decaidro-cloro-para-dimetil-etil-naftalina ? $H^9Cl.C^{10}H^5 \left\{ \begin{array}{l} = (CH^3)^2 \\ - C^2 H^5 \end{array} \right.$

Fisiologia. — *Alcune ricerche sul metabolismo nei cani privati delle tiroidi.* Nota dei dottori U. Dutto e D. Lo Monaco, presentata dal Corrispondente Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 giugno 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui complessi generati da due piani in corrispondenza birazionale reciproca.* Nota di P. Visalli, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulle aree d'isteresi elastica* (1). Nota del dottore M. Cantone, presentata dal Socio Blaserna.

« Assodata per alcune mie precedenti ricerche la esistenza dei fenomeni d'*isteresi* nei cicli di deformazione, importava di esaminare (analogamente a quanto si è praticato dallo Steinmetz nel caso del magnetismo), come varia il lavoro consumato nel corpo in un *ciclo bilaterale* tra le forze estreme P_1 e $-P_1$ al variare di questi limiti, e poichè lo studio da me fatto *sulla flessione dell'ottone* (2) e *sull'attrito interno dei metalli* (3) forniva un materiale sufficientemente esteso per tale indagine, ho voluto profittarne per i calcoli di cui qui espongo i risultati.

« Ho già mostrato nel lavoro sulla flessione che in un ciclo bilaterale la curva rappresentante la legge di deformazione delle lastre è sensibilmente simmetrica rispetto al punto medio del tratto dell'asse delle deformazioni

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di fisica della R. Università di Palermo.

(2) V. Rend. Acc. dei Lincei, 1893 e 1894.

(3) V. Nuovo Cimento, marzo e aprile 1895.

compreso fra i punti d'incontro con quella curva. Ciò si verifica ancora meglio nei diagrammi relativi alla torsione ed in ispecie ad *accomodazione* innoltrata, tuttavia non mancano anche qui lievi imperfezioni di simmetria, le quali più che alla disposizione sperimentale parmi sieno da attribuire al comportamento stesso del corpo per i fenomeni d'isteresi (1). A parte però queste anomalie di ordine secondario, resta come carattere essenziale di aversi nel passaggio da $-P_1$ a P_1 una legge di deformazione presso a poco uguale a quella inerente al passaggio da P_1 a $-P_1$, e rappresentata nei due casi da archi la cui convessità è rivolta all'esterno della curva e le cui ordinate, per uno stesso valore della forza, presentano la massima differenza all'incirca per $P = 0$.

« Or se la legge di Hooke fosse seguita esattamente, noi avremmo per una variazione armonica della forza una variazione parimenti armonica della deformazione, od in altri termini, se ci riferiamo per fissare le idee alla torsione, dato per il momento torcente M:

$$M = M_1 \cos \alpha \tag{1}$$

si avrebbe per l'angolo ω relativo ad M:

$$\omega = \omega_1 \cos \alpha,$$

dove ω_1 è l'angolo dovuto al momento estremo M_1, ed α serve a denotare una variabile che lungo il ciclo assume valori da *zero* a 2π.

« Ma, tenendo conto delle precedenti considerazioni, i corpi nel deformarsi invece che rispondere ad una legge così semplice, presentano da essa deviazioni stando alle quali converrà tentare di assumere simultaneamente alla (1)

$$\omega = k \cos \alpha + k' \operatorname{sen} \alpha,$$

o ciò che è lo stesso

$$\omega = A \cos (\alpha - \lambda). \tag{2}$$

« Senza insistere per ora sull'ammissibilità delle (1) e (2) che porterebbe a supporre una differenza di fase fra le variazioni di M e di ω (2), vogliamo, mantenendoci nel campo delle relazioni puramente empiriche, andar oltre esprimendo la ω per mezzo della serie di Fourier:

$$\omega = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \cos m (\alpha - \lambda) \tag{3}$$

« Per lo scopo prefissoci, occorrendo avere il valore dell'area racchiusa

(1) Poichè, infatti, operando fra limiti ristretti di deformazione quella dissimetria tende a sparire, è poco probabile, specialmente nel caso della torsione, che le anomalie di cui sopra è fatto cenno, sieno dovute ai mezzi sperimentali impiegati.

(2) Mi riserbo di tornare su questo argomento in una prossima Nota.

nella curva d'isteresi, si tratta di trovare la espressione di $\int M\, d\,\omega$ esteso a tutto il ciclo, ovvero tenendo conto delle (1) e (3) di

$$-\,M_1 \sum_{m=1}^{m=\infty} m\, A_m \int \operatorname{sen} m\,(\alpha - \lambda) \cos \alpha\, d\alpha$$

esteso a due valori di α che differiscano di ω, e stante la natura dei limiti d'integrazione si avrà per l'area cercata L'':

$$L'' = M_1\, A_1 \operatorname{sen} \lambda \int \cos^2 \alpha\, d\,\alpha = \pi\, M_1\, A_1 \operatorname{sen} \lambda .$$

« Questa soluzione generale si semplifica ancora quando si ponga per ω il valore dato dalla (2), poichè per la (1), se denotiamo con ω_0 la torsione permanente, si ha in questo caso:

$$\omega_0 = A \operatorname{sen} \lambda\,,$$

e di conseguenza:

$$L'' = \pi\, M_1\, \omega_0\,; \tag{4}$$

ed una relazione analoga vale per la flessione, quando si sostituiscano ad M_1 ed ω_0 rispettivamente la forza flettente massima del ciclo e la saetta di deformazione permanente.

« In base alla (4) e servendomi dei dati sperimentali che mi aveano fornito le precedenti ricerche furono da me calcolate tanto per la flessione che per la torsione le L'' che trovansi nelle seguenti tabelle. In ciascuna di esse la prima colonna contiene le date, e la seconda le indicazioni relative ai valori delle successive colonne nelle righe corrispondenti, convenendo di denotare con P_1 la forza massima impiegata in ciascun ciclo ed espressa in grammi, con L il valore dell'area d'isteresi dedotta dall'esperienza, e con L'' il valore calcolato per mezzo della (4). Le L ed L'' sono date in misura assoluta, eccezion fatta per la prima tabella, nella quale i valori di L ed L'' che si riportano vanno moltiplicati per 1000.

« Ho creduto opportuno registrare altresì nelle tabelle che si riferiscono alla torsione le L' che si ebbero col metodo dinamico, cioè i valori delle diminuzioni di energia potenziale corrispondenti alle diminuzioni di ampiezza all'intorno delle ω_1 relative ai singoli cicli, perchè dovremo tenerli presenti nella discussione dei risultati [1].

[1] Per la ristrettezza dello spazio concesso ad una Nota, ho dovuto limitarmi a riportare solo una parte dei risultati ottenuti, ma ho procurato che nulla fosse omesso di ciò che riguarda i particolari salienti da me rilevati.

I. *Flessione dell'ottone*

Lastre	Data	P_1	582	776	970	1164	1358	1552	1649	1746	1843	1940
O_1	28 nov.	L				65	92	205		513	880	1496
		L″				41	67	191		521	897	1553
»	30 »	L				51	94	211		519	879	1444
		L″				29	84	191		521	902	1487
»	2 dic.	L				44	79	194		501	818	1363
		L″				30	67	172		505	843	1495
»	3 »	L				45	82	200		497	812	1303
		L″				36	67	179		492	848	1371
»	3 »	L				43	85	200		495	829	1270
		L″				30	63	191		500	823	1338
O_4	8 marzo	L	16	28	57	160	542					
		L″	15	36	69	186	615					
»	10 »	L	17	31	57	164	544					
		L″	19	36	69	186	615					
»	13 »	L		37	59	165	542	1706				
		L″		37	72	193	615	1911				
»	16 »	L		28	57	156	533	1738				
		L″		36	75	179	596	1945				
»	21 »	L	19	38	75	166	534	1688	2819			
		L″	21	45	81	193	610	1892	3163			
O_5	30 »	L		6.7		23		131		352		
		L″		6.0		23		141		349		
»	6 apr.	L		4.7		20		124		324		798
		L″		4.8		18		122		349		866
O_7	17 »	L		22	62	225	676					
		L″		22	63	246	742					

II. *Torsione dell'ottone* Ot_1

Data	P_1	50	75	100	125
11 lugl.	L	42	192	952	5234
	L'	50	337	1316	4921
	L''	39	184	906	5296
17 »	L	30	117	481	1924
	L'	14	111	534	2404
	L''	28	101	408	1987
18 »	L	52	175	505	2070
	L'	16	126	607	2352
	L''	39	112	473	2106
22 »	L	41	137	394	1412
	L'	7	56	354	1697
	L''	42	70	332	1400

III. *Torsione dell'ottone* Ot_2

Data	P_1	100	150	200	250	300
27 lugl.	L	40	171	658	2771	
	L'	14	110	553	2620	
	L''	23	121	585	2843	
28 »	L	41	136	507	2080	
	L'	13	69	374	2045	
	L''	35	93	428	2091	
30 »	L	44	313	1223	3915	
	L'	33	330	1452	4569	
	L''	54	321	1269	4295	
1 ag.	L	41	141	581	2560	12760
	L'	13	79	668	3010	11270
	L''	29	105	531	2621	13420
4 »	L	53	180	582	2419	9131
	L'	7	77	474	2549	9169
	L''	29	87	453	2353	9640

IV. *Torsione del ferro* Fe_1

Data	P_1	100	150	200	250	300
8 ag.	L	29	104	185	304	432
	L'	30	77	134	205	335
	L''	17	77	152	214	287
9 »	L	42	106	205	327	458
	L'	30	76	135	200	360
	L''	32	72	137	214	309
10 »	L	33	96	171	283	415
	L'	30	77	138	194	273
	L''	25	68	130	205	276
	P_1	200	300	400	500	600
13 »	L	147	371	752	1268	1873
	L'	137	283	436	634	—
	L''	128	324	513	937	1294
14 »	L	150	373	708	1134	1647
	L'	137	270	422	628	—
	L''	144	324	524	873	1155

V. *Torsione del ferro* Fe_2

Data	P_1	100	150	200	250	300
20 ag.	L	56	195	392	722	1162
	L'	28	75	152	273	—
	L''	44	108	232	412	818
22 »	L	60	172	430	790	1207
	L'	28	70	147	257	—
	L''	41	108	216	412	733
	P_1	200	300	400	500	
24 »	L	392	1461	4024	11290	
	L'	198	742	2746	9319	
	L''	304	1166	3582	10710	
25 »	L	406	1311	3619	9778	
	L'	198	703	2248	8251	
	L''	319	1104	3232	9329	
30 »	L	447	1524	3824	8008	
	L'	211	755	2040	6861	
	L''	371	1251	3232	7708	
	P_1	100	150	200	250	300
31 »	L	65	220	457	949	1497
	L'	29	89	202	354	836
	L''	57	151	345	682	1189

VI. *Torsione del ferro* Fe_3

Data	P_1	50	75	100	125	150
14 ott.	L	43	170	873	3347	
	L′	55	213	972	3505	
	L″	43	135	851	3534	
15 »	L	46	119	560	2204	
	L′	52	160	599	2381	
	L″	48	149	541	2404	
16 »	L	47	109	319	1646	
	L′	52	131	394	1750	
	L″	44	119	354	1740	
17 »	L	59	127	255	1242	5009
	L′	55	139	378	1598	5390
	L″	70	144	252	1227	5145
19 »	L	67	162	341	595	2955
	L′	57	133	270	747	3109
	L″	87	151	289	567	2899
22 »	L	83	175	295	458	
	L′	51	117	203	376	
	L″	82	126	295	412	

VII. *Torsione del ferro* Fe_4

Data	P_1	200	300	400	500	600
23 ott.	L	444	1274			
	L′	139	939			
	L″	404	1074			
24 »	L	398	1260	3377		
	L′	166	602	2736		
	L″	361	1046	2925		
26 »	L	434	1412	3663	12870	
	L′	194	723	2813	14640	
	L″	386	1064	3199	11760	
27 »	L	416	1412	4303	13850	45720
	L′	283	1040	4364	17420	47380
	L″	398	1335	3983	13940	47480
28 »	L	507	1696	5216	15110	40770
	L′	355	1280	4861	17540	42550
	L″	504	1718	5028	15150	42680

VIII. *Torsione del nichel* Ni_9

Data	P_1	100	150	200	250	300
12 giu.	L	49	184	480	1162	2758
	L′	43	115	298	944	2384
	L″	45	167	424	1073	2692
20 »	L	75	184	372	835	1982
	L′	50	132	292	700	1863
	L″	78	176	346	745	1898
21 »	L	81	238	522	1192	2969
	L′	72	191	447	1242	3278
	L″	78	226	457	1129	2976
23 »	L	83	250	576	1271	3042
	L′	75	208	467	1167	3174
	L″	84	234	485	1129	2851

IX. *Torsione del nichel* Ni_{10}

Data	P_1	200	250	300	350	400
21 nov.	L	806	2128	5327	14420	27700
	L′	1028	2870	6874	17440	32510
	L″	949	2253	5746	14940	33140
23 »	L	730	1842	4161	10960	24090
	L′	811	2131	5733	12960	24380
	L″	836	1963	4508	11590	26200
24 »	L	734	1712	3926	9738	22770
	L′	796	2057	5381	11960	22500
	L″	842	1815	4246	10790	24720
25 »	L	637	1653	3724		
	L′	710	1891	4665		
	L″	740	1780	4178		

X. *Torsione del nichel* Ni_{11}

Data	P_1	200	250	300	350	400
27 nov.	L	639	1664	3853	9819	20370
	L′	631	1756	5214	11980	22030
	L″	657	1658	4196	10450	22590
	P_1	100	150	200	250	300
29 »	L	101	301	682	1507	3434
	L′	67	212	581	1488	3663
	L″	92	259	624	1498	3561

XI. *Torsione del platino* Pt_1

Data	P_1	100	125	150	175	200
26 sett.	L		296	912		
	L′		58	418		
	L″		170	701		
28 »	L		281	664		
	L′		68	424		
	L″		189	520		
29 »	L	213	510	1136	3924	10940
	L′	132	314	911	3772	9613
	L″	257	465	1132	3738	10980
11 ott.	L	296	688	1493	4410	10560
	L′	219	495	1285	4711	10850
	L″	246	623	1413	4214	10750

XIV. *Torsione del rame* Cu_1

Data	P_1	50	75	100	125
3 sett.	L	77	320	1220	
	L′	71	344	1180	
	L″	90	307	1325	
6 »	L	71	303	1009	
	L′	71	310	1033	
	L″	72	324	1130	
6 »	L	69	330	1329	4608
	L′	73	378	1526	4254
	L″	72	351	1433	5044
7 »	L	72	360	1262	4494
	L′	77	378	1459	4094
	L″	68	351	1374	4819

XII. *Torsione dell'alluminio* Al_1

Data	P_1	50	75	100	125
2 nov.	L	257	1073	3079	
	L′	247	986	3081	
	L″	256	1050	3118	
2 »	L	295	901	2955	11310
	L′	225	923	3303	8537
	L″	312	928	3078	11420
5 »	L	151	681	2562	9516
	L′	183	745	3090	8008
	L″	146	705	2576	9783
10 »	L	163	710	2869	9674
	L′	140	803	3436	9026
	L″	178	720	2989	10180

XV. *Torsione del rame* Cu_2

Data	P_1	50	75	100
11 sett.	L	66	285	1070
	L′	63	292	1091
	L″	64	313	1176
12 »	L	58	262	940
	L′	60	272	947
	L″	54	264	1037

XIII. *Torsione dell'alluminio* Al_2

Data	P_1	100	150	200	250
12 nov.	L	86	2120		
	L′	36	1310		
	L″	80	2059		
13 »	L	68	583		
	L′	26	458		
	L″	60	591		
14 »	L	77	289	1810	17690
	L′	61	388	2471	11620
	L″	73	268	1812	17040
16 »	L	40	159	808	7353
	L′	16	112	1136	5860
	L″	40	137	772	7324

XVI. *Torsione del rame* Cu_3

Data	P_1	50	75	100	125	150
13 sett.	L	15	51	144	397	1151
	L′	11	41	155	447	1078
	L″	13	47	138	408	1209
14 »	L	17	56	140	375	974
	L′	11	43	143	415	981
	L″	13	54	143	398	1016
14 »	L	14	54	134	340	
	L′	11	39	134	368	
	L″	11	50	131	372	

XVII. *Torsione dell'argento* Ag_3

Data	P_1	50	75	100
19 sett.	L	45	176	770
	L′	44	182	764
	L″	44	177	789
19 »	L	49	180	669
	L′	44	176	665
	L″	42	170	685
20 »	L	42	158	607
	L′	40	162	649
	L″	44	154	610
22 »	L	55	166	626
	L′	42	158	668
	L″	53	163	627
24 »	L	45	156	570
	L′	42	141	585
	L″	46	140	569

« Nella flessione risulta un discreto accordo fra i valori di L e di L″. Le divergenze si rendono sensibili nei cicli di grande estensione, e sempre nel senso di aversi $L > L''$.

« Anche nella torsione l'accordo è in generale raggiunto, ma vi ha qualche fatto che importerà di mettere in evidenza.

« Il filo Ot_1 che, come si è visto (1), presenta nei valori di L′ un andamento il quale accusa effetti assai sensibili dell'accomodazione, si comporta in modo più regolare nelle ricerche col metodo statico per riguardo alla verifica della (4), tuttavia i risultati delle ultime serie manifestano qualche disaccordo rilevante che potrebbe essere dovuto alla stessa causa ora citata. A conferma di questo modo di vedere starebbero l'esperienze col filo Ot_2, per il quale si è mostrato (2) essere più forti gli effetti dell'accomodazione sin dalle prime serie, e concordemente qui troviamo sin da principio alquanto accentuata la divergenza fra le L e le corrispondenti L″.

« È notevole che il filo Fe_1, il quale nell'esperienze col metodo dinamico presentava un'accomodazione con caratteri opposti a quelli dell'ottone (3) fornisce valori di L″ quasi sempre più vicini alle L′ anzichè alle L, e ciò si verifica tanto meglio a misura che si va alle ultime serie, beninteso purchè non si oltrepassi la forza massima di 300 gr.: infatti al di là di questo limite le L″ tendono ad avvicinarsi alle medie di L ed L′. Uguale tendenza si rivela per il filo Fe_2 nell'esperienze dal 20 al 22 agosto, mentre

(1) V. Nuovo Cimento 1, p. 174.

(2) V. loc., cit.

(3) V. loc. cit., p. 179.

Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 185; *Fucus verruculosus* Bertol. *Amoenit.* p. 291, t. 5, f. 4 a-b.

« Tripoli. Colla fruttificazione a tetrasporangii.

Sphaerococcaceae.

« 5. **Gracilaria dura** (Ag.) J. Ag. *Alg. med. ad.* p. 151, *Sp.* II, p. 589, *Epicr.* p. 419; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 239; Hauck, *Meeresalgen* p. 183; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 88; *Sphaerococcus durus* Ag. *Sp.* I, p. 310.

« Tripoli. Un esemplare sterile, decolorato.

« 6. **Gracilaria armata** (Ag.) Grev. *Alg. Brit.* p. LIV; J. Ag. *Sp.* II, *Epicr.* p. 591; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 242; Hauck, *Meeresalgen* p. 182; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 88; *Sphaerococcus armatus* Ag. *Aufzähl.* p. 73.

« Tripoli. Alcuni frammenti.

Rhodymeniaceae.

« 7. **Gloiocladia furcata** (Ag.) J. Ag. *Alg. med. ad.* p. 87, *Sp.* II, p. 216, *Epicr.* p. 353; Zanard. *Icon. phyc. adriat.* I, t. 4 A; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 223; *Chondria furcata* Ag. *Aufzähl.* n. 49.

« Tripoli, aderente a frammenti di conchiglie.

« 8. **Fauchea repens** (Ag.) Mont. *Fl. d'Algérie* p. 64; J. Ag. *Sp.* II p. 218; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 206; Hauck. *Meeresalgen* p. 152; De Toni e Levi *Fl. Alg. Ven.* I, p. 74; *Sphaerococcus repens* Ag. *Sp.* I, p. 244.

« Tripoli. Un frammento che può riferirsi alla specie del Montagne. Com'è noto nel Mediterraneo vegeta un'altra specie, la *Fauchea microspora* Born.

« 9. **Chrysymenia Chiajeana** Menegh. in *Giorn. bot. ital.* I, p. 296; Zanard. *Icon. phyc. adriat.* I, p. 155, t. 36 B; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 211; Hauck, *Meeresalgen* p. 159; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 76; *Physidrum ovale* Delle Chiaje *Hydrophyt. Neap.* p. 11, T. 42?.

« Tripoli. Un esemplaretto sterile, corrispondente colla figura datane då Zanardini.

« 10. **Plocamium coccineum** (Huds.) Lyngb. *Hydrophyt. Dan.* p. 39, t. 9; J. Ag. *Sp.* II, p. 395; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 219; Hauck, *Meeresalgen* p. 163; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 72; *Fucus coccineus* Huds. *Fl. Angl.* p. 586.

« Tripoli, rejetto sulle spiaggie.

Bonnemaisoniaceae.

« 11. **Asparagopsis Delilei** Mont. *Canar.* p. XV; J. Ag. *Epicr.* p. 666; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 335; *Fucus taxiformis* Del. *Égypte* p. 295, t. 57.

« Tripoli. Secondo Ardissone, questa specie fu raccolta a Saida sulle coste della Siria dal Barbey.

Rhodomelaceae.

« 12. **Polysiphonia complanata** (Clem.) J. Ag. *Sp.* II, p. 933; Zanard. *Icon. phyc. adriat.* III, p. 109, t. 107; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 364; *Fucus complanatus* Clem. *Ensayo* p. 316.

« Tripoli, tra altre alghe agglomerate a matassa.

« 13. **Dasyopsis plana** (Ag.) Zanard. *Saggio* p. 52, *Not. cell. mar.* p. 33; *Dasya plana* Ag. *Sp.* II, p. 118; J. Ag. *Sp.* II, p. 1202; Zanard. *Icon. phyc. adriat.* II, p. 79, t. LV A; Hauck, *Meeresalgen* p. 153; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 255.

« Tripoli; un esemplare aderente ad un pezzo di conchiglia.

Ceramiaceae.

« 14. **Bornetia secundiflora** (J. Ag.) Thur. in *Mém. Soc. sc. nat. et math. de Cherb.* III (1855), p. 155; Zanard. *Icon. phyc. adriat.* II, p. 43, t. LI; J. Ag. *Epicr.* p. 612; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 308; Hauck, *Meeresalgen* p. 49; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 113; *Griffithsia secundiflora* J. Ag. *Symb.* p. 39, *Alg. med. adriat.* p. 75, *Sp.* II, p. 86.

« Tripoli, rejetta sulla spiaggia.

« 15. **Pleonosporium Borreri** (Sm.) Naeg. in *Sitz. Münch. Ak. Wiss.* 1861, II, p. 342; *Callithamnion Borreri* Harv., Kuetz. *Sp.* p. 643; *Tab. Phyc.* XI, t. 71; J. Ag. *Sp.* II, p. 49; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 59; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 42; *Conferva Borreri* Smith *Engl. Bot.* tab. 1741.

« Tripoli.

« 16. **Callithamnion granulatum** (Ducl.) Ag. *Sp.* II, p. 177; J. Ag. *Sp.* II, p. 61; Mont. *Fl. d'Algér.* p. 147, t. 4, f. 1; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 73; Hauck, *Meeresalgen* p. 87; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 43; *Ceramium granulatum* Ducl. Ess. p. 72.

« Tripoli, su foglie di zosteracee.

« 17. **Microcladia glandulosa** (Soland.) Grev. *Alg. brit.* p. 99, t. 13; J. Ag. *Sp.* II, p. 151; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 125; *Fucus glandulosus* Soland. *mscr.*

« Tripoli, rejetta sulla spiaggia.

Gloiosiphoniaceae.

« 18. **Schimmelmannia ornata** Schousb. in Kuetz. *Sp.* p. 722, *Tab. Phyc.* XVI, t. 84 a-c; Zanard. *Icon. phyc. adriat.* I, p. 169, t. XXXIX; Ardiss. *Phyc. Medit.* II, p. 157; *Schimmelmannia Schousboei* J. Ag. *Sp.* II,

p. 209; *Carpoblepharis? mediterranea* Ardiss. *Enum. Alg. Sicil.* p. 33; *Erb. crittog. ital.* ser. I, n. 1026.

« Tripoli. Un solo frammento, senz'alcun dubbio riferibile alla bellissima specie dal Schousboe raccolta a Tangeri. Nel Mediterraneo la scoperse ad Acireale (Sicilia) il prof. Ardissone, nel cui Erbario potei vederne splendidi esemplari.

Grateloupiaceae.

« 19. **Halymenia Floresia** (Clem.) Ag. *Sp.* I, p. 209; J. Ag. *Sp.* II, p. 205; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 145; Hauck, *Meeresalgen* p. 127; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 56; *Fucus Floresius* Clem. *Ensayo* p. 312; Turn. *Hist. Fuc.* tab. 256.

« Tripoli. Un esemplare privo della porzione basale.

FUCOIDEAE.

Elachistaceae.

« 20. **Giraudia sphacelarioides** Derb. et Sol. *Mém. physiol. Alg.* p. 49, t. 14, f. 12-16; Zanard. *Icon. phyc. adriat.* III, p. 73, t. XCVIII; Ardiss. *Phyc. Medit.* II, p. 84; Hauck, *Meeresalgen* p. 335, fig. 139; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* II, p. 66.

« Tripoli, sulle foglie di *Zosteracee.*

Sphacelariaceae.

« 21. **Cladostephus verticillatus** (Lightf.) Ag. *Syn.* p. XXV; J. Ag. *Sp.* I, p. 43; Ardiss. *Phyc. Medit.* II, p. 94; Hauck, *Meeresalgen* p. 350, f. 147; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* II, p. 72; *Conferva verticillata* Lightf. *Fl. Scot.* p. 984.

« Tripoli, rejetto sulla spiaggia.

CHLOROPHYCEAE.

Ulvaceae.

« 22. **Ulva fasciata** Del. *Égypte* p. 297, t. 58, f. 5; Mont. *Fl. d'Algérie* p. 151, t. 14, f. 1-2; Ardiss. *Phyc. Medit.* II, p. 195; De Toni, *Syll. Algar.* I, *Chloroph.* p. 114.

« Tripoli, un solo esemplare.

Dasycladiaceae.

« 23. **Dasycladus clavaeformis** (Roth) Ag. *Sp.* II, p. 16; Ardiss. *Phyc. Medit.* II, p. 180; Hauck, *Meeresalgen* p. 483; De Toni e Levi, *Fl. Alg.*

Ven. III, p. 110; De Toni *Syll. Algar.* I, *Chloroph.* p. 411; *Conferva clavaeformis* Roth *Cat. bot.* III, p. 315.

« Tripoli, due esemplaretti.

MYXOPHYCEAE.

Rivulariaceae.

« 24. **Calothrix crustacea** Thur. in Born. et Thur. *Not. algol.* I. p. 13, t. 4; Born. et Flah. *Revis.* I, p. 359; Hauck, *Meeresalgen* p. 492; Ardiss. *Phyc. Medit.* II, p. 260.

« Tripoli, su un pezzo di roccia.

Oscillariaceae.

« 25. **Lyngbya sordida** (Zanard.) Gom. *Monogr. Oscill.* p. 146, t. II, f. 21; *Calothrix sordida* Zan. *Saggio* p. 63; *Lyngbya violacea* Rabenh. *Fl. Eur. Algar.* II, p. 144; *Leibleinia violacea* Menegh. in *Giorn. bot. ital.* I, p. 304; *Leibleinia polychroa* Menegh. in Kuetz. *Phyc. germ.* p. 179, *Sp.* p. 278, *Tab. Phyc.* V, t. 85, f. V.

« Tripoli. Gli scarsi filamenti da me osservati su varie alghe corrispondono perfettamente coi caratteri riscontrati sugli esemplari autentici delle specie Meneghiniane, a me concessi in esame dal ch. prof. T. Caruel ed esistenti nell'Erbario Fiorentino.

Prospetto comparativo delle Alghe tripolitane con le florule di Marocco fino a Tangeri (M), *dell'Algeria* (A), *della Tunisia* (T) *e dell'Egitto fino ad Alessandria* (E).

	M	A	T	E
Liagora viscida		+		+
— ceranoides				
Scinaia furcellata	+	+		
Galaxaura adriatica				
Wrangelia penicillata	+			
Pterocladia ? tripolitana				
Gelidium crinale	+	+	+	
Phyllophora nervosa	+	+		
Gymnogongrus Griffithsiæ	+	+		+
Rissoëlla verruculosa		+	+	
Sphaerococcus coronopifolius	+	+		
Gracilaria dura	+			+
— armata	+	+		+
— confervoides	+	+		+
Hypnea musciformis	+	+	+	+
Gloiocladia furcata				
Fauchea repens	+	+		
Sebdenia Monardiana		+		
Chrysymenia digitata				
— Chiajeana	+	+		
— Uvaria	+	+	+	
Plocamium coccineum	+	+		
Delesseria Hypoglossum	+	+		
Asparagopsis Delilei				
Ricardia Montagnei				
Laurencia obtusa	+	+	+	+
Laurencia papillosa		+		+
Vidalia volubilis	+	+	+	
Chondria dasyphylla	+	+		
Digenea simplex		+		
Halopythis pinastroides	+	+		+
Rityphlœa tinctoria	+	+		+
Acanthophora Delilei				+
Polysiphonia complanata	+	+		
— sertularioides		+		
— elongata	+	+		
— secunda	+	+	+	+
— fruticulosa	+	+		+
— Castelliana				
— subulifera			+	
— obscura	?		+	+
Dasya spinella			+	
Dasyopsis plana		+		
Spermothamnion flabellatum				
Griffithsia Schousboei	+	+		
Bornetia secundiflora	+	†		
Rhodochorton Rothii	+			
Callithamnion scopulorum	+			
— granulatum	+	+		?
Pleonosporium Borreri	+	+		
Antithamnion Plumula	+	+		
Ceramium rubrum	?	+		+
— diaphanum	+	+	+	
— ciliatum	+	+		+
Microcladia glandulosa	+	+		
Schimmelmannia ornata	+			
Halymenia Floresia	+	+		
Grateloupia dichotoma	+	+		
Acrodiscus Vidovichii				

	M	A	T	E
Cryptonemia Lomation		+		+
Rhizophyllis Squamariæ	+	+	+	
Contarinia peyssonelliæformis		+		
Peyssonellia Squamariae	+	+	+	
— rubra	+	+	+	
Melobesia farinosa	+		+	
— pustulata	+	+		+
Lithophyllum lichenoides	+	+		
Amphiroa rigida		+		
Corallina officinalis	?	+		+
— virgata (= C. granifera)		+	+	+
Jania rubens (incl. I. adhærens)	+	+	+	+
— corniculata	+	+		
Wildemania ? laciniata	+	+		
Bangia fusco-purpurea	+	+		
Erythrotrichia carnea				
Cystoseira Montagnei		+	+	
— abrotanifolia	+	+	+	+
— discors		+		
— Hoppii		+		+
— barbata		+		+
— crinita	?	+	+	
— amentacea		+		
Sargassum linifolium	+	+		?
— salicifolium	+	+	+	
Dictyota dichotoma	+	+		
— linearis	+		+	+
— Fasciola	?	+	+	
Taonia Atomaria	+	+		+
Zonaria flava	+	+	+	
Padina Pavonia	+	+	+	+
Halyseris polypodioides	+	+	+	+
Zanardinia collaris	+	+		+
Stilophora rhizodes (adriatica)			+	
Colpomenia sinuosa	+	+		+
Asperococcus bullosus	+			
Scytosiphon lomentarius		+		
Cladostephus verticillatus	+	+	+	
Stypocaulon scoparium	+	+	+	+
Ectocarpus arctus				
Giraudia sphacelarioides		+		+
Ulva fasciata		+		
Ulva Lactuca (latissima)	+	+	+	+
Enteromorpha Linza				
— compressa	+	+		+
Chaetomorpha aerea	+	+		
Cladophora gracilis				?
Valonia utricularis	+	+	+	
Codium tomentosum	+	+		+
— Bursa	+	+	+	
Udotea Desfontainii		+	+	
Halimeda Tuna		+		+
Caulerpa prolifera		+		+
Anadyomene stellata		+		
Dasycladus clavæformis		+		
Calothrix crustacea	+	+		
Lyngbya sordida	+	+		

Fisiologia. — *Alcune ricerche sul metabolismo nei cani privati delle tiroidi.* (¹) Nota dei dottori U. Dutto e D. Lo Monaco, presentata dal Corrispondente Luciani.

« La letteratura sulla fisiologia delle tiroidi è vasta come forse in nessuna altra quistione controversa è dato di riscontrare, se si considera che è tutta di data relativamente recente.

« Noi non abbiamo per ora in animo di fare un esame critico di tale letteratura, nè di addurre gl' importanti studi ed osservazioni fatte in proposito. Piuttosto brevemente accenneremo ai capi saldi della così detta *cachessia strumipriva.*

« La teoria nervosa emessa da H. Munk non regge assolutamente, e ci piace di ricordare a questo proposito come essa sia stata brillantemente confutata dal Fano.

« La teoria chimica: ecco il *mare magnum* dove hanno navigato tutti i ricercatori, dallo Schiff, or sono 11 anni, ai più recenti.

« Secondo questa teoria la glandula tiroide formerebbe e verserebbe nel sangue una sostanza d' ignota natura necessaria alla normale nutrizione del sistema nervoso (Schiff), oppure distruggerebbe o favorirebbe in qualche modo l'espulsione dei prodotti di consumo che, accumulati nel sangue, produrrebbero un' autointossicazione analoga all' uremia (Luciani e Colzi), o infine impedirebbe col suo metabolismo la formazione di speciali veleni o tossine che poi si versano nel sangue (Gley ed altri). Che alla tiroidectomia segua un vero avvelenamento, è troppo evidente se si tien conto dell'insieme dei fenomeni che formano la cosidetta cachessia strumipriva.

« Il cane operato di estirpazione delle tiroidi, dopo un periodo di tempo che varia dalle 24 ore ai 4 giorni, comincia a presentare delle paresi isolate a qualche gruppo di muscoli degli arti anteriori. Sono specialmente gli estensori, per cui il cane cammina strisciando le zampe, arieggiando quasi l' incedere paralitico-spastico. Seguono contrazioni fibrillari nei vari muscoli, contrazioni e rigidità degli arti, tremori nella mandibola, trisma, opistotono, polipnea, vomito, prurito, innalzamenti ed abbassamenti della temperatura e depressione psichica dell'animale che giace come preso da ambascia. La mucosa nasale che in generale nei cani è tumida ed umidiccia, diventa arida, polverulenta, come ricoperta di piccole squamette, e sede di un intenso prurito, tanto che il cane cerca sempre di strofinare il naso in qualche oggetto a superficie ruvida.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto fisiologico di Roma.

« Convinti anche noi che si tratti realmente di un avvelenamento, abbiamo voluto vedere se il lavaggio del sangue che fu esperimentato utilmente da Sanquirico [1] in diverse specie di avvelenamenti acuti, fosse capace di fare eliminare la *materia peccans* della cachessia strumipriva. Ci confortavano a ciò fare alcuni precedenti tentativi sperimentali i cui risultati armonizzano bene colla dottrina dell'autointossicazione.

« Il Colzi [2], per consiglio del Luciani, facendo la *trasfusione reciproca* del sangue tra due cani, uno operato di estirpazione di tiroidi, e l'altro normale, constatò che mentre quest'ultimo non risentiva alcun rilevante effetto, nel primo invece si aveva una scomparsa temporanea della cachessia strumipriva. Fano e Zanda [3] sperimentarono il salasso, estraendo 270 cc. di sangue che veniva sostituito da un'eguale quantità di soluzione di Nacl 0,73 $^0/_0$ e videro scomparire i sintomi per circa quattro giorni. Il Vassale [4] ed altri sperimentarono l'azione di sostanze diuretiche, fra le quali ricordiamo in modo speciale l'urea che introdotta nelle vene agisce evidentemente come un diuretico. Ottennero anche con questo mezzo una diminuzione dei sintomi di autointossicazione. Non vogliamo a questo proposito omettere di ricordare che, secondo molti, il succo tiroideo non avrebbe nella cura del missoedema e della cachessia strumipriva negli animali altra azione che non sia quella diuretica.

« Per mezzo di uno dei soliti apparecchi a pressione costante, noi abbiamo iniettato in una vena femorale dei cani da 500 a 1000 cc. di soluzione di Nacl 0,73 $^0/_0$ alla temperatura di 38°. Le prime infusioni furono da noi eseguite in cani operati di estirpazione delle tiroidi, e nei quali già erano comparsi i fenomeni già descritti. Riferiamo qui brevemente le storie:

Esperienza I.

Cane nero piccolo, già smilzato precedentemente da parecchi mesi, del peso di gr. 3530.

5 dic. 1894. Alle ore 9 si asportano le tiroidi.

6 » » Il cane è ancora in uno stato normale, non rifiuta il cibo e mangia una discreta quantità di carne. Alle ore 14 presenta fenomeni paretici agli arti. L'incedere è paralitico-spastico. Cade sopra un fianco, mantenendo irrigiditi e distesi i quattro arti. Alle ore 15 s'inietta nella vena femorale destra un litro di soluzione. Appena levato dall'apparecchio di contenzione, il cane cammina per la camera; è cessata la polipnea. Incomincia ad urinare in notevole quantità.

7 » » Continua il benessere

[1] Sanquirico, *Lavatura dell'organismo negli avvelenamenti acuti.* Arch. per le scienze mediche. Tomo II, 1887.

[2] Colzi, *Sulla estirpazione della tiroide.* Lo sperimentale, 1884.

[3] Fano e Zanda, *Contributo alla fisiologia del corpo tiroideo.* Arch. per le scienze mediche XIII, 1889.

[4] Vassale, *Effetti dell'iniezione intravenosa di succo tiroideo nei cani operati di estirpazione di tiroide.* Riv. sper. di freniatria XVI e XVIII.

8 dic. 1894 Alle ore 8 il cane sta bene, è scomparso qualsiasi sintomo. Alle ore 14 sono ricomparsi i fenomeni della cachessia; contrazioni fibrillari dei muscoli, opistotono ecc. Cade su un fianco, emettendo un grido, e distendendo i quattro arti. S'inietta nella femorale di destra 800 cc. di soluzione fisiologica di Nacl. Durante l'iniezione già si stabilisce la urinazione (si aveva avuto cura di vuotare la vescica prima). Alle ore 16 il cane si è rimesso completamente.

9 » » Ore 8. È in condizioni perfettamente normali, cammina speditamente, beve del latte e mangia della carne spontaneamente. Alle ore 17 ricompaiono i sintomi.

10 » » Si trova morto.

Esperienza II.

Cane nero piccolo del peso di gr. 3900, già smilzato precedentemente da parecchi mesi.

6 dic. 1894. Si asportano le tiroidi.

7 » » Non presenta ancora nulla di notevole.

8 » » Ore 8. È in preda ad un accesso eclamptico. Sta coricato su di un fianco coi quattro arti distesi ed irrigiditi. Polipnea. Si siringa, si mette nell'apparecchio di contenzione, e gli s'inietta un litro di soluzione fisiologica di Nacl nella vena femorale di destra. Appena levato dall'apparecchio, ha luogo un'abbondante urinazione. Alle ore 14 il cane sta molto meglio, cammina speditamente, non ha più accessi convulsivi, nè contrazioni.

9 » » Continua il benessere, mangia spontaneamente.

10 » » Sono cominciati i fenomeni morbosi. Alle ore 9 s'inietta nella vena femorale di destra un litro di soluzione fisiologica di Nacl. Dopo l'iniezione comincia subito a urinare e alle ore 14 è cessato ogni sintomo e beve spontaneamente del latte.

11 » » Alle ore 8 il cane sta ancora apparentemente bene; non ha paresi, nè contratture, nè emette alcun lamento. Alle ore 10 muore improvvisamente senza emettere alcun grido, nè dare alcun segno di agonia.

« Da queste storie si desume che la sostanza o sostanze tossiche che si formano dopo l'ablazione della tiroide, sono solubili nell'acqua o in una soluzione fisiologica di Nacl 0,73 $^0/_0$ e che questa, introdotta nel sangue alla dose di $^1/_2$ litro o più, è valido veicolo per sbarazzarne l'organismo. Il miglioramento, anzi la cessazione temporanea di ogni sintomo della cachessia strumipriva è un fenomeno legato strettamente alla diuresi e quindi al normale funzionamento dei reni. Le condizioni istologiche dei reni in seguito alla tiroidectomia ci sono perfettamente sconosciute; siamo però edotti della loro funzionalità più o meno completa dal modo in cui entrano in attività secretoria per espellere quella grande quantità di liquido che si aggiunge alla massa circolante del sangue. Quando per condizioni abnormi non ancora determinate ha luogo un'alterazione dell'attività secretoria dei reni, per cui essi non espellono con sufficiente prontezza il di più del liquido iniettato, la cessazione di ogni sintoma della cachessia strumipriva non avviene. Ciò si rileva dalla seguente

Esperienza III.

Grossa cagna da pastore del peso di Kgr. 22,400.

7 dic. 1894. Si opera di estirpazione delle tiroidi.

8 dic. 1894 Nulla di anormale.
9 » » » »
10 » » » »
11 » » Alle ore 17 si notano i primi sintomi: contrazioni fibrillari dei muscoli.
12 » » Contrazioni fibrillari dei muscoli e movimenti clonici della mandibola. Non paresi nè disturbi respiratorî. Alle 11, previa siringazione, s'iniettano 1500 cc. di soluzione di Nacl 0,73 %. Alle 14 il cane muore e dalla vescica si estraggono solo 150 cc. di liquido che rappresentano tutto ciò che i reni poterono espellere dalle ore 11 alle 14.

« Questa storia di esito negativo è interessante perchè dimostra che una grossa cagna sopportò benissimo per 3 giorni la mancanza delle tiroidi, e al 4° sebbene i sintomi non fossero ancora completamente sviluppati perchè non si osservavano che leggiere contrazioni fibrillari ai muscoli masseteri, morì, essendo assai diminuita l'attività secretoria dei reni.

« Accertatici che nei cani, nei quali l'attività funzionale dei reni è mantenuta, l'infusione di acqua clorurata espelle la sostanza tossica; noi abbiamo fatto delle ricerche per sapere qualche cosa sulla natura di questa sostanza. E prima di tutto abbiamo voluto studiare l'eliminazione giornaliera dell'azoto in una cagna tiroidectomizzata non sottoposta ad alcun tentativo di cura.

« In tutte queste ricerche abbiamo sempre scelto delle cagne, perchè in esse la siringazione (dopo aver scoperto il meato urinario, tagliando un poco di mucosa vaginale della parte anteriore) riesce molto facile e spedita. La giornata decorreva dalle 9 del mattino alle 9 del giorno appresso. Dopo la siringazione, le cagne venivano esattamente pesate in una bilancia sensibile ai 5 grammi. L'urina delle 24 ore veniva esattamente misurata e filtrata, essendo l'animale continuamente tenuto in una gabbia che permetteva di raccoglierla senza alcuna perdita. Il dosaggio dell'azoto si faceva sempre col metodo Kyeldhall. Abbiamo sempre alimentato le cagne operate con una dose costante di latte proporzionata al peso dell'animale, e ciò non solo perchè riesciva più facile alimentarle colla sonda, quando esse si rifiutano di assumere il cibo spontaneamente, ma anche perchè abbiamo potuto osservare che l'alimentazione carnea le conduce più rapidamente alla morte, talora in maniera improvvisa come nell'espezienza seconda. Su questo fatto che ci sembra molto importante, torneremo dopo più maturi studî.

Esperienza IV.

Cagna del peso di gr. 4670. Si alimenta con 300 cc. di latte al giorno.

N. pr.	Data	Peso	Urina c.c.	Azoto gr.	Osservazioni
1	13 Genn.	4670			
2	14 »	4360	410	3,44	
3	15 »	4300	255		
4	16 »	4220	275	2,38	
5	17 »	4150	290	2,43	
6	18 »	4120	245	2,33	
7	19 »	4030	290	2,35	
8	20 »	3950	285	1,75	
9	21 »	3900	285	2,39	
10	22 »	3850	300	2,21	Si estirpano le tiroidi.
11	23 »		215	1,80	Nulla di anormale.
12	24 »	3770	290	1,94	» »
13	25 »	3670	300	2,10	» »
14	26 »	3530	260	1,80	Rifiuta il latte che si dà con la sonda. Emette dei lamenti.
15	27 »	3470	175	1,52	Sintomi manifesti di cachessia strumipriva.
16	28 »	3450	120	2,18	
17	29 »	3930	95	1.91	
18	30 »				La cagna si trova morta

« Da questa esperienza si desume che l'eliminazione dell'azoto diminuisce nei cani privati delle tiroidi. Prima dell'operazione si arrivò ad avere una cifra presso che costante nella eliminazione dell'azoto che era di gr. 2.41 Subito dopo l'estirpazione delle tiroidi, l'azoto diminuì arrivando a una media giornaliera di gr. 1,89.

« Sicchè dunque nei cani senza tiroidi, si ha una ritenzione di sostanze azotate nell'organismo. Ciò posto, abbiamo voluto vedere se l'infusione della solita soluzione clorurata nel sangue, che già avevamo sperimentato così benefica ai cani privati di tiroide, fatta quotidianamente cominciando dal giorno successivo all'operazione servisse ad aumentare l'eliminazione di sostanze azotate. Cinque ore dopo effettuata la sopradetta infusione, l'animale si siringava, e si determinava l'azoto totale emesso in queste urine che chiameremo di *lavaggio*. Dopo di ciò si somministrava all'animale la sua solita dose di latte, si rimetteva nella gabbia, e compiute le 19 ore rimanenti della giornata, si siringava di nuovo e si dosava l'azoto di questa seconda urina che chiameremo *spontanea*. Poi si ripeteva l'infusione di acqua clorurata e tutte le

altre operazioni del giorno precedente. Riportiamo la storia di una cagna trattata in questo modo.

Esperienza V.

Cagna bastarda del peso di Kgr. 10,750. Si pratica l'infusione nel sangue ogni giorno alle ore 9 con 500 cc. di soluzione di NaCl *0,73 %; alle ore 17 si dànno 300 cc. di latte.*

Numero progressivo	Data	Peso dell'animale in gr.	Quantità dell'urina di lavaggio in cc.	Azoto di questa urina	Quantità dell'urina spontanea	Azoto di questa urina	Azoto totale della giornata	OSSERVAZIONI
1	3 Genn.	10750	610	2,39	—	—	—	
2	4 "	10200	400	1,79	—	—	—	Alle ore 16 si estirpano le tiroidi.
3	5 "	9930	110	1,76	—	—	—	
4	6 "	9800	385	2,69	450	7,43	10,12	La cagna presenta leggieri fenomeni paretici, ma beve spontaneamente il latte.
5	7 "	9370	230	2,25	570	6,06	8,31	
6	8 "	9220	375	2 41	425	4,88	7,29	
7	9 "	9110	355	2,48	400	4,36	6,84	
8	10 "	8960	485	4,34	375	4,93	9,27	La cagna è in buone condizioni. Non presenta alcun sintoma di cachessia.
9	11 "	8630	470	3,55	355	5,96	9,51	La cagna è un po' abbattuta, ma dopo l'infusione mostra un evidente miglioramento, è cessato il lamento che emetteva prima.
10	12 "	8300	425	3,09	390	6,87	9,96	Continua il benessere generale malgrado che le ferite sieno suppuranti. Da oggi in poi non si praticano altre infusioni. Le ferite fatte per queste sono in cattive condizioni. La cagna muore il giorno 21 genn., non avendo mai mostrato alcun sintoma di cachessia. Era ridotta in uno stato di grande emaciazione, e le ferite, malgrado un'accurata disinfezione, erano difteriche. All'autopsia non si notò nulla degno di nota.

« Emerge da questa storia il fatto già constatato negli altri cani sopra ricordati, *che il lavaggio del sangue fa cessare ogni sintoma di cachessia strumipriva.* Ma dalla tabella si desume anche un altro fatto importante, cioè che l'azoto dell'urina di lavaggio va successivamente aumentando dopo l'operazione, mentre l'azoto dell'urina spontanea va diminuendo. Ciò vuol dire che nei cani privati delle tiroidi, c'è una tendenza a trattenere delle sostanze azotate nell'organismo, sostanze che le infusioni clorurate a cui segue sempre il benessere del cane, forzatamente espellono. Per meglio affermare questa conclusione, abbiamo voluto vedere quali erano gli effetti delle infusioni in un cane non privato delle tiroidi, mettendoci perfettamente nelle identiche condizioni del precedente esperimento.

Esperienza VI.

Cagna nera del peso di Kgr. 8,830. Si fa l'infusione endovenosa con 500 cc. di soluzione di NaCl *0,73 °/₀ ogni giorno alle ore 9. Alle 17 si dànno 300 cc. di latte.*

Numero progressivo	Data	Peso dell'animale in gr.	Urina del lavaggio in cc.	Azoto di questa urina in gr.	Urina spontanea in cc.	Azoto di questa urina in gr.	Azoto totale della giornata	OSSERVAZIONI
1	19 Genn.	8830	470	1.84	—	—	—	
2	20 "	8500	305	0,77	425	2,74	3,51	
3	21 "	8200	295	1,23	325	3,46	4,69	
4	22 "	8070	415	1,97	330	6,67	8,64	
5	23 "	7800	230	1,86	405	5,10	6,96	La cagna rifiuta di prendere il latte che le si dà con la sonda.
6	24 "	7650	245	2,05	490	6,03	8,08	
7	25 "	—	265	2,59	485	7,33	9,85	La cagna è molto abbattuta.
8	26 "	—	405	3,06	480	8,73	11,79	
9	27 "	—	—	—	—	—	—	La cagna muore alle 9.

« Da questa tabella si desume in primo luogo che *le infusioni di acqua-clorurata al 0, 73 °/₀ portano alla morte l'animale.*Noi non sappiamo per ora a quali alterazioni organiche attribuire la causa di questa morte, ma poichè ciò non è stato ancora da nessuno notato ci proponiamo di ritornare su questo argomento. Emerge poi il fatto contrario a quanto si è osservato nell'animale precedente privato delle tiroidi. Il lavaggio ha bensì di per sè stesso il potere di aumentare l'eliminazione delle sostanze azotate come possiamo constatare coll'esame delle urine e colla rapida diminuzione di peso dell'animale; ma la cifra dell'azoto va aumentando in egual misura tanto nell'urina spontanea che in quella di lavaggio.

« Ciò con maggiore evidenza si desume dalla tabella seguente nella quale si vede calcolata la quantità di azoto che avrebbe dovuto eliminare il cane senza l'intervento del lavaggio. Paragonando questa quantità di azoto calcolato con quella che il cane ha emesso nelle 5 ore dopo l'infusione, si nota che mentre nel cane sano la differenza fra queste due cifre è minima, in quello senza tiroidi è grande.

TABELLA

CANE PRIVATO DELLE TIROIDI			CANE NORMALE		
Azoto delle prime 5 ore calcolato su quello eliminato nelle 19 ore rimanenti	Azoto delle 5 ore dopo l'infusione	Differenza	Azoto delle prime 5 ore calcolato su quello eliminato nelle 19 ore rimanenti	Azoto delle 5 ore dopo l'infusione	Differenza
1,95	2,69	0,74	0,69	0,77	0,08
1,59	2,54	0,95	0,92	1,23	0,31
1,26	2,41	1,15	1,79	1,97	0,18
1,14	2,48	1,34	1,34	1,86	0,52
1,29	4,34	3,05	1,58	2,05	0,47
1,56	3,55	2,01	1,89	2,52	0,63
1,80	3,09	1,29	2,29	3,06	0,77

« Sicchè l'insorgere dei fenomeni della cachessia strumipriva nei cani è accompagnato da una ritenzione di sostanza azotata. Siccome questo stesso fatto deve aver luogo nei casi di uremia che la Clinica giornalmente ci offre l'opportunità di osservare; ciò spiega perchè la sindrome della cachessia strumipriva offra molta analogia con quella dell'uremia.

« Questo fatto della ritenzione di sostanze azotate nell'organismo armonizza con quanto altri osservatori trovarono nell'uomo in casi di missoedema. I dottori Ord e White (¹) assoggettarono una donna ammalata di missoedema ad una dieta costante prima e dopo la somministrazione del succo tiroideo, e notarono che tre giorni dopo detta somministrazione, la quantità dell'azoto nell'urina eccedette la quantità introdotta cogli alimenti, mentre prima della somministrazione era minore. Gli stessi autori calcolando l'azoto totale e l'urea dopo aver dato il succo tiroideo, videro che il più di azoto che veniva escreto, si trovava sotto forma di urea. Anche Vermehren (²) constatò un aumento nell'eliminazione di azoto colla cura sostitutiva in 3 missoedematosi, la qual cosa dimostra come l'organismo abbia in questa malattia tendenza a ritenere delle sostanze azotate.

« Per queste nostre ricerche siamo lungi dall'affermare l'identità causale dei due processi, *uremia e cachessia strumipriva*. È certo però che qualunque sia la causa della morte in seguito ad estirpazione delle tiroidi, sia essa effetto di un avvelenamento prodotto dalle sostanze che determinano l'uremia, o di una tossina, o di altri prodotti organici ancora ignoti essa è certamente legata ad una ritenzione di prodotti azotati ».

(¹) *Clinical remarks on certain changes observed in the urine in Myxoedema atter the administration of glycerine extract of thyroid gland.* British. Medical Journal 1893 217.

(²) *Stoffwechseluntersuchungen nach Behandlung von Glandula thyroidea an Individuen mit und ohne Myxödem.* Deutsch. Med. Wochenschr. 1893, n. 43.

Mineralogia. — *Di due roccie a glaucofane dell' isola del Giglio.* Nota del dott. ITALO CHELUSSI, presentata dal Corrispondente COCCHI.

Queste due roccie furon raccolte dal chiarissimo prof. Carlo De Stefani all' isola del Giglio, nell' arcipelago toscano, l' una, indicata col nome di diorite, presso la Cala dell' allume in località denominata *Pietralta;* l'altra, indicata col nome di gabbro a glaucofane, nella località detta *Zuffolone.* Presento in questa nota i resultati dell' analisi petrografica di ambedue.

Diorite di Pietraltà.

È una roccia di color bruno a tono bluastro, abbastanza compatta e leggermente schistosa, con delle vene molto estese di calcite biancastra. Al microscopio risulta formata dai minerali seguenti in ordine di frequenza: *feldspato*, *anfibolo*, *clorite*, *pirosseno;* quindi *calcite*, *ilmenite*, *apatite*, *titanite* e prodotti ferriferi d' alterazione. I primi due sono i principali componenti; però in alcune sezioni la clorite ed il pirosseno sembrano sostituire quasi completamente l' anfibolo; più rare sono la ilmenite e l' apatite, rarissima la titanite.

Feldspati. — Quasi mai presentano sezioni di cristallo; sono per lo più piccoli granuli ed aggruppamenti di granuli, con linee di geminazione poco frequenti e di poca evidenza. Granuli più grossi, sparsi porfiricamente nella roccia, mostrano invece numerose, sottili e chiare linee di geminazione, le quali con le direzioni di estinzione fanno in generale un angolo variabile intorno ai 20° tali da ritenerli di natura labradoritica. Questi feldspati hanno talora estinzione ondulata, indizio forse di pressioni meccaniche subite dalla roccia; le inclusioni loro più frequenti sono di lacinie verdi chiare, leggerissimamente pleocroiche, con bassi colori di polarizzazione, riferibili perciò alla clorite; più raramente vi si notano aghetti e fascetti di aghi sottilissimi di glaucofane riconoscibile al suo caratteristico pleocroismo; l' alterazione loro produce per lo più caolino terroso ed alcune minutissime pagliette vivamente iridescenti di muscovite.

Anfibolo. — L' altro componente principale della roccia, forse più importante del feldspato per quantità e sviluppo degli individui, è il glaucofane. Esso può presentarsi o in scagliette irregolari, le quali probabilmente impartiscono alla roccia una leggera schistosità, o in cristalli tabulari allungati, con terminazioni sfrangiate a due estremità opposte, o in aghi e fibre talora uniche talora raccolte in fascetti. Quest' ultimo modo di presentarsi si verifica preferibilmente quando il glaucofane forma le inclusioni negli

altri elementi della roccia. Nelle sezioni tabulari di questo minerale si osserva un solo sistema di linee di sfaldatura; negli individui paralleli o quasi alla base se ne hanno due sistemi, che incrociandosi formano l' angolo caratteristico degli anfiboli; i colori di polarizzazione sono in generale molto bassi negli individui abbastanza sviluppati, sono invece più vivi nei cristalletti aciculari. Il solito pleocroismo caratteristico varia nei toni diversi del bleu, celeste, ecc. secondo la sezione basale o tabulare; nelle sezioni basali si hanno plaghe con diversa intensità di colore; e nei tabulari non è infrequente il caso di due colorazioni diverse alle due estremità.

Questo minerale, come è stato già accennato più sopra, viene sostituito, in alcune sezioni, quasi completamente dalla clorite forse prodotta dall' alterazione di un minerale preesistente, e da un minerale ben cristallizzato in piccolissime sezioni rettangolari, talora molto allungate, trasparenti, non pleocroico, con i colori di polarizzazione molto vivaci e con estinzione parallela al massimo allungamento; lo riferisco dubitatamente ad un pirosseno. La ilmenite si trova per lo più nelle plaghe dove prevale la clorite; essa è in granuli irregolari opachi o in listarelle tra loro intrecciantesi a guisa di rete, nelle cui maglie comparisce una sostanza biancastra inattiva alla luce polarizzata e riferibile al leucoxeno. Finalmente si hanno alcuni cristalli di apatite e qualche raro granulo cuneiforme, roseo chiaro, debolmente pleocroico di titanite probabilmente secondaria.

Questa roccia potrebbe esser ritenuta, per la piccolezza degli elementi, come una microdiorite in cui l'orneblenda tipica è stata sostituita dal glaucofane; la struttura alquanto schistosa e l'abbondanza dell'anfibolo l'avvicinerebbero piuttosto ad una anfibolite; nell'un caso e nell'altro essa presenta molta analogia con quelle roccie a glaucofane dell'appennino settentrionale citate dal De Stefani (1) e dal Bonney (2).

Gabbro a glaucofane.

La roccia non ha colore uniforme, ora rossiccia per gli ossidi di ferro, ora verde cupa con scaglie a lucentezza submetallica; possiede frattura irregolare angolosa e si rompe facilmente lungo i piani di sfaldatura del diallagio. Al microscopio risulta formata da *diallagio*, *feldspato*, sostanza *viriditica*, *ilmenite*, *oligisto*, *glaucofane*, *smaragdite* e i soliti prodotti ferriferi d'alterazione.

I feldspati sono in granuli irregolari e in frammenti per lo più alterati in esili pagliette a colori vivamente iridati di muscovite; sono compenetrati spesso da una sostanza verdiccia o gialliccia e posseggono come inclusione

(1) De Stefani, *L'Appennino tra il colle dell'Altare e la Polcevera.* Boll. Soc. geol. it. Vol. VI, fasc. 3 pag. 8 e seg.

(2) T. I. Bonney, *Notes on some Ligurian and Tuscan serpentines.* The geol. Mag. August 1879.

qualche cristalletto aciculare di glaucofane. Rari sono i granuli che presentano ben distinte le linee di geminazione dei plagioclasi, le quali fanno con le direzioni di estinzione degli angoli variabili intorno agli 8°; il che li farebbe ritenere di natura non troppo basica. Questi feldspati non sono molto abbondanti.

Molto più frequente è il diallagio di color bruno o verdastro e con lucentezza madreperlacea a luce riflessa; per trasparenza è invece giallo tomback, giallo chiaro, fino a divenire quasi incoloro e i toni più carichi di questo colore corrono paralleli alla direzione della principale sfaldatura, la quale impartisce al minerale un aspetto fibroso, spesso a fibre contorte e ripiegate, il che insieme allo stato frammentizio dei feldspati, indurrebbe a ritenere che la roccia sia stata soggetta a forti pressioni. Un altro sistema di linee di sfaldatura, molto meno sensibile, fa col precedente un angolo di circa 90°.

Notevoli sono le alterazioni e le inclusioni del diallagio; raramente si ha una produzione di una sostanza fibrosa a fibre talora parallele talora perpendicolari a quelle di questo minerale, di color verde erba, leggermente pleocroica, con colori vivaci come nella comune orneblenda, caratteri che la ravvicinano alla smaragdite o uralite. Più abbondante invece è la produzione di una gran quantità di oligisto rosso e rosso bruno e della sostanza viriditica verde chiara o gialliccia, non pleocroica, che a nicols incrociati si presenta come un aggregato di polarizzazione. Oligisto e viridite sono sparsi abbondantemente nella roccia.

Inoltre lungo le linee di sfaldatura del diallagio, nelle sue fenditure e specialmente dove tende a divenire incoloro, si annida un minerale che per il pleocroismo caratteristico e per l'estinzione obliqua si rivela come vero e proprio glaucofane, il quale si presenta o in piccole scaglie o in fibre ripiegate e contorte come quelle dell'ospite o radialmente ordinate intorno a un centro comune, quasi un principio di struttura sferolitica.

La ilmenite è molto frequente e spesso alterata in Leucoxeno che si ritrova per lo più nelle maglie formate dalle liste inalterate della medesima.

Per la presenza del glaucofane sembrami dover ritenere questa roccia, seguendo il Kalkowsky, per un gabbro a orneblenda analogo a quello di Zobten nella Slesia, citato da questo autore, nel quale una orneblenda per il suo speciale dicroismo ricordava il glaucofane [1].

Queste due roccie acquistano una certa importanza dal contenere il glaucofane, minerale ritrovato, credo per la prima volta, nelle roccie della Toscana.

[1] Kalkowsky, *Elemente der Lithologie.* pag. 224, Heidelberg 1886.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. Procenzano. *Nuova teoria delle parallele e saggio di pangeometria con nuova curva non euclidiana e corrispondente superficie di rotazione.* Presentata dal Segretario.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio E. D'Ovidio presenta una sua Commemorazione del Socio nazionale Giuseppe Battaglini.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Il Presidente dà annuncio della perdita fatta dalla Classe nella persona del Socio straniero Franz Neumann, mancato ai vivi il 23 maggio 1895; apparteneva il defunto Socio all'Accademia, sino dal 30 luglio 1865.

CORRISPONDENZA

Il Presidente presenta un piego suggellato, inviato dal sig. Gaetano Viveros per prender data.

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società di scienze naturali di Emden; il Museo di zoologia comparata di Cambridge Mass.; il Museo nazionale di Buenos Aires; l'Osservatorio di Breslau.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta dell'8 giugno 1895

Badaloni G. — Sulla mummificazione dei cadaveri. Studi intorno al terreno del cimitero del Precetto in Ferentillo. Perugia, 1895, 8°.

Baratta M. — Notizie sui terremoti avvenuti in Italia durante l'anno 1895. Roma, 1895, 8°.

Basile M. — Boschi e pioggie, paludi e fiumi di Sicilia. Messina, 1895, 8°.

Brédikhine Th. — Mouvement des substances émises par les comètes, 1893, II & 1893 IV. S. Pétersbourg, 1895, 4°.

Carazzi D. — Animali viventi nell'interno dei cavi elettrici sottomarini. Genova, 1895, 8°.

Id. — Intorno ad alcuni recenti microtomi. Firenze, 1895, 8°.

Id. — Sulla fagocitosi nei lamellibranchi. Firenze, 1895, 8°.

De Marchi. L. — Sulla teoria dei Cicloni (Pubbl. Oss. di Brera XXXVIII). Milano, 1895, 4°.

Facciolà L. — Le metamorfosi del Conge Balearicus. Palermo, 1895, 8°.

Faggiotto A. — I terremoti calabro-siculi e loro probabili cause. Reggio C., 1895, 8°.

Helmholtz H. v. — Handbuch der physiologischen Optik. Hamburg, 1895, 8°.

Hafkine W. M. — Anti-coleraic inoculations. s. l., 1895 8°.

Kuntze O. — Geogenetische Beiträge. Leipzig, 1895, 8°.

Meyer H. — Bogen und Pfeil in Central-Brasilien. Leipzig, s. a., 8°.

Mosso U. — Sur la transformation du rouge de Kola en caféine. Turin, 1894 8°.

Id. — Revue des travaux de pharmacologie, de toxicologie et de thérapeutique publiés dans l'année 1894. Turin, 1895, 4°.

Nasini R. — Sopra l'Argo, il nuovo elemento scoperto nell'aria da Lord Rayleigh e dal prof. Ramsay. Venezia, 1895, 8°.

Ottolenghi F. — Olio di Strofanto ed Acido Strofantico, Genova, 1894, 8°.

Relative Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen. Ausgeführt durch die k. und k. Kriegs-Marine in den Jahren 1892-1894. Wien, 1895, 8°.

Report of the scientific result of the exploring voyage of H. M. S. Challenger 1873-76. — Summary of results, part. I. II. London 1895, 4° (*Dono del Governo Britannico*).

Ricchetti F. — Sull'azione fisiologica e terapeutica del Salacetolo. Genova, 1894, 8°.

Rossi G. — In memoria del comm. Paolo Cornaglia ispettore del Genio Civile. Reggio C., 1895, 8°.

Sacco F. — Essai sur l'orogènie de la terre. Turin, 1895, 8°.

Sassoli de Bianchi. F. — Alcune considerazioni sui principî fondamentali delle scienze naturali. Parte I, Chimica. Bologna, 1895, 8°.

Schilling A. J. — Der Einfluss von Bewegungshemmungen auf die Arbeitsleistungen der Blattgelenke von Mimosa pudica. Jena, 1895, 8°.

Taramelli T. — Sugli stati a Posidonomya nel Sistema Liasico del Monte Albenza in provincia di Bergamo. Milano 1895, 8°.

Torossi G. B. — Varietà di storia naturale. Vicenza, 1895, 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 giugno 1895.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sui potenziali termodinamici.* Nota del Socio E. BELTRAMI.

« Si assumano le due equazioni fondamentali della termodinamica nella forma:

$$dQ = dE + dL = t dF, \tag{1}$$

dove E è l'energia, F l'entropia, t la temperatura assoluta, dQ il calore elementare (in misura meccanica) assorbito dal sistema e finalmente dL il lavoro elementare speso dal sistema contro le forze esterne. Lo *stato* del sistema si suppone definito dalla temperatura t e da un certo numero di variabili *geometriche* $v_1, v_2, \ldots$, collettivamente designate con v ed atte ad individuare la configurazione del sistema stesso. Nell'espressione esplicita:

$$dL = \Sigma p\, dv \tag*{(1)$_a$}$$

del lavoro elementare dL, le quantità $p_1, p_2, \ldots$, collettivamente designate con p, denotano (in senso generale) le forze puramente meccaniche che emanano dal sistema e che tendono ad aumentare i valori delle rispettive variabili $v_1, v_2, \ldots$. Queste forze, insieme colle due quantità E ed F, vengono considerate, di regola, come funzioni delle variabili indipendenti t e v.

« Se esiste una funzione H tale che per ogni coppia di valori corrispondenti di p e di v si abbia:

$$p = -\frac{\partial H}{\partial v}, \tag*{(1)$_b$}$$

questa funzione si suole considerare, a giusta ragione, come il potenziale delle forze p e propriamente come l'*energia libera* del sistema, come quell'energia, cioè, cui è dovuta l'azione esterna *puramente meccanica*, epperò *liberamente trasformabile*, del sistema stesso. Questa funzione, se esiste, non può dipendere dalle sole variabili v, perchè l'espressione del lavoro elementare dL non può essere, evidentemente, un differenziale esatto. Essa deve quindi dipendere, oltre che dalle dette variabili v, da un parametro u che viene considerato come costante nella deduzione delle forze p mediante le equazioni $(1)_b$. Questo parametro rappresenta una determinata funzione:

$$(1)_c \qquad u = u(t, v)$$

della temperatura t e delle variabili geometriche v. Ammettere la costanza di questo parametro equivale ad ammettere che la funzione H non esercita veramente l'ufficio di potenziale, o di energia libera, che per i *processi termodinamici invertibili* definiti dall'equazione $u =$ costante. Se, per esempio, u fosse funzione solamente della temperatura t, H sarebbe il potenziale relativo ai *processi isotermi*; se invece u fosse funzione solamente dell'entropia F, H sarebbe il potenziale relativo ai *processi isentropici* od adiabatici.

Ciò posto, si presenta questo quesito: Ad *ogni* specie di processo termodinamico invertibile $u =$ costante corrisponde sempre un potenziale H?

« Bisogna escludere innanzi tutto il caso che la funzione u non contenga la temperatura t; e ciò sia perchè il processo non potrebbe, a rigor di termini, dirsi allora *termo*dinamico, sia perchè la forma stessa delle equazioni $(1)_b$ suppone che le variabili v sieno fra loro indipendenti, e tali non sarebbero se fra loro sussistesse una relazione $u =$ costante. Per questa stessa ragione si è ammesso senz'altro che il potenziale H non potesse contenere che un solo parametro costante u.

È anche da notarsi che il potenziale H, quando esiste, non riesce compiutamente determinato dalle equazioni $(1)_b$, perchè queste rimangono inalterate se ad H si aggiunge una funzione arbitraria di u. Questa funzione non può risultare individuata se non da qualche altra condizione. Per esempio, nel caso dei processi isotermi ($u = t$) si sa che ponendo:

$$(1)_d \qquad \mathrm{E} - t\mathrm{F} = \mathrm{G},$$

è lecito assumere come potenziale la funzione G e che questa funzione speciale soddisfa all'ulteriore condizione:

$$(1)_e \qquad \mathrm{F} = -\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}.$$

Così ancora, nel caso dei processi isentropici ($u = \mathrm{F}$) si sa che è lecito as-

sumere come potenziale la stessa energia E (considerata come funzione di v e di F) e che questa funzione speciale soddisfa all'ulteriore condizione:

$$(1)_f \qquad t = \left(\frac{\partial E}{\partial F}\right),$$

dove le parentesi indicano che la derivata di E è presa nell'ipotesi or detta.

« Ciò premesso, considerando H come funzione incognita delle variabili v e del parametro u, si ha $(1)_{a,b}$:

$$dL = -dH + \frac{\partial H}{\partial u} du$$

e quindi (1):

$$dE - dH + \frac{\partial H}{\partial u} du = t\, dF,$$

o meglio $(1)_d$:

$$dG - dH + \frac{\partial H}{\partial u} du + F\, dt = 0,$$

talchè se si pone:

$$(2) \qquad H = G + \psi,$$

si ottiene:

$$(2)_a \qquad d\psi = F\, dt + \frac{\partial H}{\partial u} du.$$

« Qui bisogna distinguere due casi.

« Se nella funzione $u(t, v)$ non entrano le variabili v, le quantità t ed u non sono fra loro indipendenti, epperò l'equazione $(2)_a$, cui si può in tale ipotesi dare la forma:

$$d\psi = \left(F + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt}\right) dt,$$

stabilisce che ψ dev'essere funzione della sola temperatura t. E poichè da ciò segue:

$$F = -\frac{\partial H}{\partial t} + \psi'(t),$$

basta sopprimere la funzione additiva ψ in (2) per ottenere $H = G$ e per ricadere così sulle note formole $(1)_{d,e}$ relative ai processi isotermi.

« Se invece nella funzione $u(t, v)$ entra effettivamente anche una sola delle variabili v, le quantità t ed u diventano per ciò stesso fra loro indipendenti. In questo caso (che è il più generale) dall' equazione $(2)_a$ segue necessariamente che la funzione ψ dev'essere riducibile alla forma:

$$(2)_c \qquad \psi = \psi(t, u)$$

e che devono essere soddisfatte le due condizioni:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - F = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

questa funzione si suole considerare, a giusta ragione, come il potenziale delle forze p e propriamente come l'*energia libera* del sistema, come quell'energia, cioè, cui è dovuta l'azione esterna *puramente meccanica*, epperò *liberamente trasformabile*, del sistema stesso. Questa funzione, se esiste, non può dipendere dalle sole variabili v, perchè l'espressione del lavoro elementare $d\mathrm{L}$ non può essere, evidentemente, un differenziale esatto. Essa deve quindi dipendere, oltre che dalle dette variabili v, da un parametro u che viene considerato come costante nella deduzione delle forze p mediante le equazioni $(1)_b$. Questo parametro rappresenta una determinata funzione:

$$(1)_c \qquad u = u(t, v)$$

della temperatura t e delle variabili geometriche v. Ammettere la costanza di questo parametro equivale ad ammettere che la funzione H non esercita veramente l'ufficio di potenziale, o di energia libera, che per i *processi termodinamici invertibili* definiti dall'equazione $u =$ costante. Se, per esempio, u fosse funzione solamente della temperatura t, H sarebbe il potenziale relativo ai *processi isotermi*; se invece u fosse funzione solamente dell'entropia F, H sarebbe il potenziale relativo ai *processi isentropici* od adiabatici.

Ciò posto, si presenta questo quesito: Ad *ogni* specie di processo termodinamico invertibile $u =$ costante corrisponde sempre un potenziale H?

« Bisogna escludere innanzi tutto il caso che la funzione u non contenga la temperatura t; e ciò sia perchè il processo non potrebbe, a rigor di termini, dirsi allora *termo*dinamico, sia perchè la forma stessa delle equazioni $(1)_b$ suppone che le variabili v sieno fra loro indipendenti, e tali non sarebbero se fra loro sussistesse una relazione $u =$ costante. Per questa stessa ragione si è ammesso senz'altro che il potenziale H non potesse contenere che un solo parametro costante u.

È anche da notarsi che il potenziale H, quando esiste, non riesce compiutamente determinato dalle equazioni $(1)_b$, perchè queste rimangono inalterate se ad H si aggiunge una funzione arbitraria di u. Questa funzione non può risultare individuata se non da qualche altra condizione. Per esempio, nel caso dei processi isotermi ($u = t$) si sa che ponendo:

$$(1)_d \qquad \mathrm{E} - t\mathrm{F} = \mathrm{G},$$

è lecito assumere come potenziale la funzione G e che questa funzione speciale soddisfa all'ulteriore condizione:

$$(1)_e \qquad \mathrm{F} = -\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}.$$

Così ancora, nel caso dei processi isentropici ($u = \mathrm{F}$) si sa che è lecito as-

sumere come potenziale la stessa energia E (considerata come funzione di v e di F) e che questa funzione speciale soddisfa all'ulteriore condizione:

$$t=\left(\frac{\partial E}{\partial F}\right), \tag{1}_f$$

dove le parentesi indicano che la derivata di E è presa nell'ipotesi or detta.

« Ciò premesso, considerando H come funzione incognita delle variabili v e del parametro u, si ha $(1)_{a,b}$:

$$dL=-dH+\frac{\partial H}{\partial u}du$$

e quindi (1):

$$dE-dH+\frac{\partial H}{\partial u}du=t\,dF,$$

o meglio $(1)_d$:

$$dG-dH+\frac{\partial H}{\partial u}du+F\,dt=0,$$

talchè se si pone:

$$H=G+\psi, \tag{2}$$

si ottiene:

$$d\psi=F\,dt+\frac{\partial H}{\partial u}du. \tag{2}_a$$

« Qui bisogna distinguere due casi.

« Se nella funzione $u(t,v)$ non entrano le variabili v, le quantità t ed u non sono fra loro indipendenti, epperò l'equazione $(2)_a$, cui si può in tale ipotesi dare la forma:

$$d\psi=\left(F+\frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)dt,$$

stabilisce che ψ dev'essere funzione della sola temperatura t. E poichè da ciò segue:

$$F=-\frac{\partial H}{\partial t}+\psi'(t),$$

basta sopprimere la funzione additiva ψ in (2) per ottenere $H=G$ e per ricadere così sulle note formole $(1)_{d,e}$ relative ai processi isotermi.

« Se invece nella funzione $u(t,v)$ entra effettivamente anche una sola delle variabili v, le quantità t ed u diventano per ciò stesso fra loro indipendenti. In questo caso (che è il più generale) dall' equazione $(2)_a$ segue necessariamente che la funzione ψ dev'essere riducibile alla forma:

$$\psi=\psi(t,u) \tag{2}_c$$

e che devono essere soddisfatte le due condizioni:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-F=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial H}{\partial u}=0.$$

« Queste condizioni non sono indipendenti. Infatti, considerando in (2) H, G e ψ come funzioni delle variabili indipendenti v ed u (coll'eliminazione di t da G e ψ mediante $(1)_c$) e derivando rispetto ad u, si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

ovvero $(1)_e$:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - F\right)\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

equazione che è una combinazione delle due sopraddette. Dunque alla funzione ψ di t e di u basta imporre la prima delle condizioni trovate:

$$F = \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{3}$$

La seconda eguaglianza:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial u} \tag{$(3)_a$}$$

esprime una proprietà che scende necessariamente dalla precedente e dalla forma (2) del potenziale H.

« Ora l'equazione (3) costituisce una relazione fra le tre quantità F, t ed u, in virtù della quale il parametro u del processo termodinamico di cui si tratta non può dipendere che da t e da F: dunque i processi termodinamici che ammettono un potenziale sono quelli, e soltanto quelli per i quali la funzione u (dapprima supposta $(1)_c$ direttamente formata colle variabili t e v) è riducibile alla forma speciale (che abbraccia anche i processi isotermi):

$$u = u(t, F). \tag{$(3)_b$}$$

Naturalmente questa forma cessa d'essere speciale allorchè le variabili v si riducono ad una sola.

« Quando l'espressione $(3)_b$ del parametro u è *data*, e quand'essa contiene effettivamente F (il che esclude i processi isotermi), la determinazione della funzione ausiliaria ψ si riduce ad una quadratura, cioè (3) all'integrazione dell'equazione:

$$u = u\left(t, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right), \tag{$(3)_c$}$$

la quale definisce ψ a meno d'un termine additivo composto arbitrariamente con u, termine il quale passa, collo stesso carattere puramente additivo, nell'espressione (2) di H. Quest'ultima espressione può scriversi anche così:

$$H = E + \psi - t\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

sempre col sottinteso che venga eliminata la variabile t, mediante la sostituzione del valore che se ne ricava da $(3)_b$ in termini di u e di v. L'energia *non libera* (« *gebundene Energie* ») è pertanto rappresentata (per i processi non isotermi) da:

$$t\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\,.$$

« Questa soluzione del problema non è direttamente applicabile al caso (già più volte ricordato e del resto conosciutissimo) dei processi isotermi, caso nel quale, come si disse, le variabili t ed u non sono indipendenti come la soluzione richiede. Ma si può, ed in varii modi, far rientrare indirettamente questo caso d'eccezione nella soluzione precedente, come risulta dalla semplicissima osservazione che segue.

« Si assegni al parametro u la forma particolare:

$$u=\mathrm{F}^m\,t^n\,,$$

dove m ed n sono due numeri diseguali. L'integrazione dell'equazione $(3)_c$ dà:

$$\psi=\frac{mu^{\frac{1}{m}}\,t^{1-\frac{n}{m}}}{m-n}+\varphi(u)$$

e quindi:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{u^{\frac{1}{m}-1}\,t^{1-\frac{n}{m}}}{m-n}+\varphi'(u)\,,$$

talchè si può scrivere:

$$\mathrm{H}=\mathrm{E}+\frac{n\,t\,\mathrm{F}}{m-n}+\varphi(u)\,,$$

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u}=\frac{\mathrm{F}^{1-m}\,t^{1-n}}{m-n}+\varphi'(u)\,.$$

Per rientrare nel caso dei processi isotermi basta porre $u=t$, cioè $m=0$, $n=1$, con che si trova:

$$\mathrm{H}=\mathrm{E}-t\mathrm{F}+\varphi(t)\,,$$

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial t}=-\mathrm{F}+\varphi'(t)\,.$$

Così, per ottenere il caso dei processi isentropici basta porre $u=\mathrm{F}$, cioè $m=1$, $n=0$, con che si trova:

$$\mathrm{H}=\mathrm{E}+\varphi(\mathrm{F})\,,\qquad\qquad \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\mathrm{F}}=t+\varphi'(\mathrm{F})\,.$$

Se, in amendue queste ipotesi, si ommette la funzione arbitraria φ, si ricade esattamente sulle formole $(1)_{d,e}$ ed $(1)_f$ già ricordate quali ad esse notoriamente corrispondenti.

« Come ulteriore verificazione della soluzione che precede, si considerino i processi termodinamici del tipo:

$$u = t\chi(\mathrm{F}).$$

Dando a quest'equazione la forma equipollente:

$$\mathrm{F} = \varphi'\left(\frac{t}{u}\right),$$

la corrispondente equazione $(3)_c$ diventa:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \varphi'\left(\frac{t}{u}\right)$$

e dà (ommettendo per semplicità la funzione additiva):

$$\psi = u\varphi\left(\frac{t}{u}\right).$$

Ne risulta (2), $(3)_a$:

$$\mathrm{H} = \mathrm{G} + u\varphi\left(\frac{t}{u}\right) = \mathrm{E} + u\varphi\left(\frac{t}{u}\right) - t\varphi'\left(\frac{t}{u}\right),$$

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u} = \varphi\left(\frac{t}{u}\right) - \frac{t}{u}\varphi'\left(\frac{t}{u}\right)$$

e per conseguenza:

$$\mathrm{E} = \mathrm{H} - u\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u}.$$

Se ora si pone:

$$\frac{t}{u} = x, \qquad \mathbf{F} = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u} = x\varphi'(x) - \varphi(x),$$

si trova:

$$d\mathbf{F} = x\,d\varphi'(x) = x\,d\mathrm{F},$$

vale a dire:

$$u\,d\mathbf{F} = t\,d\mathrm{F}.$$

Quest'ultima eguaglianza permette di dare alle equazioni (1) la forma:

$$d\mathrm{Q} = d\mathrm{E} + d\mathrm{L} = u\,d\mathbf{F},$$

in cui le primitive quantità t ed F sono surrogate da u ed $\mathbf{F}$; ne segue che l'ordinario procedimento di deduzione del potenziale isotermo conduce medesimamente alle formole:

$$p = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial v}, \qquad \mathbf{F} = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u}, \qquad \mathrm{E} = \mathrm{H} - u\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u},$$

le quali coincidono con quelle testè incontrate (Questa osservazione si col-

lega con alcuni passi della prima Memoria di Helmholtz sulla *Statica dei sistemi monociclici*).

« Dalle equazioni $(1)_b$ si deduce:

$$\Sigma p\, dv = -dH + \frac{\partial H}{\partial u} du ,$$

ovvero $(3)_a$:

$$d\Sigma pv - \Sigma v\, dp = -dH + \frac{\partial \psi}{\partial u} du ,$$

equazione cui si può dare la forma:

$$\Sigma v dp + \frac{\partial \psi}{\partial u} du = d(H + \Sigma pv) . \tag{4}$$

« Questo risultato si può utilizzare in due modi.

« Se primieramente si pone:

$$H + \Sigma pv = K \tag{4$_a$}$$

e si concepisce questa nuova funzione K come espressa per mezzo delle quantità p ed u, colla sostituzione dei valori dedotti da $(1)_b$, $(3)_b$ per le quantità v e t, si ottiene (mercè la relazione (4) ed altre delle già precedentemente stabilite):

$$(4)_b \quad \left\{ \begin{aligned} & v = \frac{\partial K}{\partial p} , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial K}{\partial u} , \\ & E = K + t \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi - \Sigma p \frac{\partial K}{\partial p} . \end{aligned} \right.$$

« Ma si può anche sottrarre dall'equazione (4) l'identità:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial u} du = d\psi ,$$

con che si ottiene (2), (3):

$$\Sigma v dp - F\, dt = d(G + \Sigma pv) ,$$

formola da cui la funzione ψ è affatto scomparsa e che può essere dedotta direttamente da (1). Da quest'equazione, ponendo:

$$G + \Sigma pv = K_1 \tag{5}$$

e considerando questa nuova funzione K_1 come espressa per mezzo della temperatura t e delle forze p mediante la sostituzione dei valori dedotti per le quantità v dalle equazioni:

$$p = -\frac{\partial G}{\partial t} ,$$

si ricava:

$$(5)_a \quad \left\{ \begin{aligned} & v = \frac{\partial K_1}{\partial p} , \qquad F = -\frac{\partial K_1}{\partial t} , \\ & E = K_1 - t \frac{\partial K_1}{\partial t} - \Sigma p \frac{\partial K_1}{\partial p} . \end{aligned} \right.$$

« Queste sono le formole che fanno riscontro alle $(4)_b$ rispetto alla ipotesi isotermica, la quale fa sempre in tal qual modo eccezione. Nel caso, più comunemente considerato, che le variabili geometriche v si riducano ad una sola (volume specifico), la funzione K_1 corrisponde a ciò che il Sig. Duhem chiama (in un senso differente) potenziale termodinamico a pressione costante.

« In realtà questa funzione K_1, che non è più un vero potenziale nel preciso significato della parola, si riferisce sempre ai processi isotermi $(u = t)$. Volendo invece considerare, per esempio, i processi isentropici $(u = F)$, basta ricorrere alle formole più generali $(4)_b$, prendendo per K una funzione delle forze p e dell'entropia F e ponendo $(3)_c$ $\psi = tF$ (ommessa, per semplicità, la funzione additiva). Si trova così:

$$v = \frac{\partial K}{\partial p}, \qquad t = \frac{\partial K}{\partial F}, \qquad E = K - \Sigma p \frac{\partial K}{\partial p},$$

formole che si possono immediatamente verificare mercè le equazioni fondamentali (1).

« È quasi superfluo avvertire che il concetto di potenziale termodinamico, nel senso qui considerato, non coincide punto necessariamente con quello di *funzione caratteristica* ».

Matematica. — *Sui complessi generati da due piani in corrispondenza birazionale reciproca.* Nota di P. Visalli.

« 1. Sieno α, β due piani in corrispondenza birazionale reciproca di grado n [1]. Ad un punto di α corrisponde una retta di β, polare del punto; e ad una retta qualunque a di α, corrisponde un inviluppo φ'_a, razionale di classe n. Ad una retta qualunque di β corrisponde un punto di α, polo della retta; e ad ogni punto A′ di β corrisponde in α una curva φ, razionale di ordine n, la quale è il luogo dei poli delle rette di β uscenti per A′. Alla retta $\alpha\beta \equiv d$, corrisponde in α un punto D ed in β uno inviluppo φ'_d. Le curve φ hanno in comune un certo numero di punti, x_1 semplici, x_2 doppi, x_r r-pli, ecc., i quali si dicono punti fondamentali; e gli inviluppi φ' hanno in comune x'_1 tangenti semplici, x'_2 doppie, $x'_{r'}$, r'-ple, ecc., che si dicono rette fondamentali. Fra i numeri x_2, $x'_{r'}$, n, esistono le note relazioni:

$$\Sigma r^2 x_r = \Sigma r'^2 x'_{r'} = n^2 - 1$$
$$\Sigma r(r-1)\, x_r = \Sigma r'(r'-1)\, x'_{r'} = (n-1\,(n-2).$$

« Una retta a di α ed una retta a' di β si dicono *coniugate*, se a passa

(1) Iung, *Sulle superficie generate da due sistemi Cremoniani reciproci di grado m.* Rendiconti R. Accademia dei Lincei, a. 1885.

per il polo di a'; o, ciò che è lo stesso, se a' è tangente all'inviluppo corrispondente ad a.

« Un punto A di α ed un punto A' di β si dicono *coniugati* se A' giace sulla retta polare di A; e quindi se A è un punto della curva φ corrispondente ad A'.

« Un punto qualunque di α (o β) ha un numero semplicemente infinito di punti coniugati, e perciò *le rette che uniscono le coppie di punti coniugati formano un complesso* C. Lo studio di questo complesso forma l'oggetto della presente Nota (¹).

« 2. Sia π un piano qualunque, e sia $a \equiv \pi\alpha$, $a' \equiv \pi\beta$. Un punto A di a ha un punto coniugato A' su a', ed ogni punto di a', ha n punti coniugati su a; quindi *le rette del complesso, giacenti in* π, *inviluppano una curva* Γ *di classe* $n+1$. Questa curva è tangente alla retta a', ha la retta a come tangente n-pla ed è dell'ordine $2n$. La curva Γ si chiama *curva del complesso appartenente al piano* π.

« *Il complesso* C *è dell'ordine* $n+1$.

« 3. Ad un punto P_r, fondamentale r-plo di α, corrisponde in β un inviluppo razionale di classe r; quindi ogni punto A' di β è coniugato a P_r; e poichè per A' passano r rette dell'inviluppo, si può dire:

« *La stella di rette avente per vertice un punto* P_r, *fondamentale* r*-plo di* α, *contata* r *volte, fa parte del complesso C.*

« 4. Ogni punto A di α, giacente sulla retta $d \equiv \alpha\beta$, ha un punto coniugato A' situato sulla stessa retta; e viceversa, un punto A' di β, giacente su d, ha n punti coniugati su d; quindi:

« *Sulla retta* d *vi sono* $n+1$ *punti* U_i, *ciascuno dei quali è coniugato a se stesso.*

« *Le* $n+1$ *stelle di rette, avente i vertici nei punti* U_i, *fanno parte del complesso.*

« Indicheremo con u'_1, u'_2, u'_3, ...; u'_{n+1} le rette polari dei punti U_1, U_2, U_3, ... U_{n+1}, rispettivamente.

« 5. Se a è una retta di α, il punto ad di β ha n punti coniugati su a, quindi *tutte le rette di a sono rette n-ple del complesso.* Analogamente si dimostra che *tutte le rette di* β *sono rette semplici del complesso.*

« 6. Sia π un piano tale che il polo della retta $a' \equiv \pi\beta$ sia un punto A della retta $a \equiv \pi\alpha$. Tutte le rette di π, uscenti per A, sono rette del complesso. Inoltre, ogni punto di a ha per coniugato un punto di a'; e viceversa, ogni punto di a', ha per coniugati, oltre A, altri $n-1$ punti di a; segue quindi che *le rette di C, giacenti nel piano di due rette coniugate, formano un fascio, ed inviluppano una curva di classe n e di ordine* $2(n-1)$, *avente la retta a come tangente* $(n-1)$*pla.*

(¹) Hirst, *On the complexes generated by two correlative planes.* Collectanea Mathematica in Memoriam Dominici Chelini. Milano, Hoepli, 1881.

« Fra i punti di a' ve n'è uno, il punto di contatto di a' con l'inviluppo φ' corrispondente ad a, al quale corrisponde una curva φ tangente in A ad a. La retta che unisce al il punto A col punto di contatto di a' con φ', appartiene al fascio di centro A ed è tangente alla curva del complesso di classe n.

« Un piano π, la cui curva del complesso si spezza, si dice eccezionale.

« 7. Se un piano π passa per U_i, le rette del complesso, giacenti nel piano, formano il fascio U_i, ed inviluppano una curva Γ_n di classe n. Se poi il piano passa per U_i e contiene due rette coniugate, le rette del complesso formano un fascio di centro U_i, un fascio che ha per centro il polo della retta $\pi\beta$, ed inviluppano una curva di classe $n-1$.

« 8. L'inviluppo Γ_{n+1} delle rette del complesso, giacenti in un piano passante per un punto P_r, fondamentale r-plo di α, si compone del punto P_r, contato r volte, e di una curva di classe $n-r+1$, dell'ordine $2(n-r)$, avente la retta $\pi\alpha$ per tangente $(n-r)$ pla, e tangente alla retta che unisce P_r col punto in cui $\pi\beta$ taglia la tangente comune, non fondamentale, alla curva fondamentale corrispondente a P_r e all'inviluppo corrispondente alla retta $\pi\alpha$.

« Se il piano passa per P_r e per un punto U_i, l'inviluppo delle rette del complesso giacenti in esso, si comporrà del punto P_r, del punto U_i, e di un inviluppo della classe $n-r$.

« 9. Se un piano π passa per due punti fondamentali P_r, P_s, di α, di cui uno sia r-plo e l'altro s-plo, l'inviluppo Γ_{n+1}, si comporrà del punto P_r, contato r volte, del punto P_s, contato s volte e di un inviluppo di classe $n-r-s+1$.

« Se $r+s=n$, la retta $P_r P_s$ è fondamentale, e tutti i suoi punti sono i poli di una stessa retta p'_1, fondamentale semplice di β; quindi:

« *Per ogni retta fondamentale di α passa un fascio di piani eccezionali per il complesso, in ciascuno dei quali l'inviluppo Γ è composto di tre punti dei quali due sono i punti fondamentali situati sulla retta, ciascuno contato tante volte quanto è la sua moltiplicità per le curve φ, e l'altro è il punto ove il piano taglia la retta fondamentale di β, corrispondente alla retta fondamentale per la quale passa il piano medesimo.*

« 10. Anche i piani uscenti per le rette fondamentali di β sono eccezionali. Se $p'_{r'}$ è una retta fondamentale r'-pla di β, essa ha infiniti poli situati sulla curva $\psi_{r'}$, di ordine r', corrispondente; e quindi *l'inviluppo Γ delle rette del complesso, giacenti in un piano qualunque uscente per $p'_{r'}$, si compone degli r' punti in cui il piano taglia la curva $\psi_{r'}$, e di un inviluppo di classe $n-r+1$ ed ordine $2(n-r)$, avente per tangente $(n-r)$ pla la retta $\pi\alpha$.*

« 11. È degno di nota il caso in cui nel piano α vi sia un punto P_{n-1} fondamentale $(n-1)$ plo, e quindi in β una retta p'_{n-1} fondamentale $(n-1)$ pla. Vi saranno in α altri $2(n-1)$ punti fondamentali semplici, ed in β altre

$2\,(n-1)$ rette fondamentali semplici. Ai punti fondamentali semplici corrispondono altrettanti punti di β, ciascuno dei quali, è l'intersezione di una retta fondamentale semplice con la retta $(n-1)$ pla; ed al punto P_{n-1} corrisponde un inviluppo di classe $n-1$, tangente a tutte le rette fondamentali semplici di β ed avente la retta p'_{n-1} per tangente $(n-2)$ pla. Le curve fondamentali di α sono: le $2\,(n-1)$ rette, che uniscono il punto P_{n-1} con i punti semplici, e una curva di ordine $n-1$, che passa per i punti fondamentali semplici ed ha un punto $(n-2)$ plo in P_{n-1}.

« Ad una retta e di α, uscente per P_{n-1}, corrisponde l'inviluppo fondamentale di classe $n-1$, che propriamente corrisponde a P_{n-1}, ed un punto E' situato su p'_{n-1}, centro del fascio di rette polari dei punti di e. Viceversa ogni punto E' di p'_{n-1}, corrisponde ad una retta e per P_{n-1} in una data direzione.

« Risulta chiaramente che *l'inviluppo Γ delle rette del complesso giacenti in un piano π uscente per il punto* P_{n-1}, *si compone del punto P_{n-1} contato $n-1$ volte e di una conica.* Se poi il piano π su detto passa per il punto E', corrispondente alla retta $\pi\alpha$, essendo E' coniugato a tutti i punti di $\pi\alpha$, vi sarà su questa retta un punto M polo della retta $\pi\beta$, e quindi l'inviluppo Γ si comporrà del punto P_{n-1}, contato $n-1$ volte, del punto M e del punto E'. Inoltre è facile vedere che le tracce su β dei piani che passano per P_{n-1} e contengono una retta e ed il punto corrispondente E', inviluppano una conica; quindi possiamo conchiudere: *Se nel piano α vi è un punto fondamentale $(n-1)$plo per questo punto passa un numero semplicemente infinito di piani eccezionali, che inviluppano un cono di secondo ordine, e tali che la curva del complesso, appartenente a ciascuno di essi, si riduce a tre punti.*

« Per il § 9 si ha ancora: *Per ciascuna delle $2\,(n-1)$ rette fondamentali di α passa un fascio di piani eccezionali per il complesso, in ciascuno dei quali l'inviluppo Γ è composto di tre punti, dei quali due sono su α e l'altro sul piano β.*

« Consideriamo ora un piano π passante per $P_{n-1}\,U_i$, $(i=1, 2, \ldots, n+1)$. Le rette polari dei punti di $P_{n-1}\,U_i$ formano un fascio di centro $Q' \equiv p'_{n-1}\,u'_i$, il quale determina sulla retta $\pi\beta$ una punteggiata prospettiva alla punteggiata $P_{n-1}\,U_i$ dei poli delle rette del fascio; quindi l'inviluppo Γ, appartenente al piano π, si comporrà del punto P_{n-1}, contato $n-1$ volte, del punto U_i e di un altro punto, che diremo Q, esterno ai piani α, β, per il quale passano le rette di π che uniscono le coppie di punti coniugati delle punteggiate prospettive $\pi\alpha$, $\pi\beta$. Si ha quindi:

« *Esistono $n+1$ fasci di piani eccezionali aventi per assi le rette* $P_{n-1}\,U_i$, *tali che l'inviluppo Γ, appartenente a ciascun piano, è composto del punto* P_{n-1}, *contato $n-1$ volte, del punto* U_i *e di un'altro punto* Q *esterno ai piani α, β.*

« Consideriamo due piani π_1, π_2 uscenti per la retta $P_{n-1} U_i$, e sieno A'_1, B'_1 i punti della retta $\pi_1 \beta$, e A'_2, B'_2 i punti della retta $\pi_2 \beta$, coniugati rispettivamente, ai punti A, B, della retta $\pi\alpha$. I due triangoli $AA'_1A'_2$, $BB'_1B'_2$ sono prospettivi, avendo per centro di prospettiva U_i, quindi i tre punti $Q' \equiv A'_1A'_2 . B'_1B'_2$, $Q_1 \equiv AA'_1 . BB'_1$, $Q_2 \equiv AA'_2 . BB'_2$ sono in linea retta; perciò:

« *I punti Q, appartenenti ai piani del fascio avente per asse* $P_{n-1} U_i$, *giacciono sopra una retta, che dirò* q_i, *passante per il punto* $Q' \equiv p'_{n-1} . u'_i$.

« È bene osservare che ogni piano uscente per una retta q_i è eccezionale per il complesso, perchè taglia i piani α, β secondo due rette coniugate.

« 12. I piani eccezionali del complesso sono di due specie: 1° piani che tagliano i piani α e β secondo rette coniugate, e sono in numero doppiamente infinito ed inviluppano una superficie S.

« 2° piani che non tagliano i due piani α e β secondo rette coniugate. Tali sono i piani delle stelle aventi per centri i punti fondamentali di α, od i punti U_i.

« 13. Sia r una retta qualunque, ed A, A' i punti $r\alpha$, $r\beta$. Preso su d un punto M, le n tangenti condotte per A' all'inviluppo φ', corrispondente alla retta AM, determinano su d n punti che dirò M'. Viceversa, dato un punto M' su d alla retta A'M' corrisponde in α un punto, che unito ad A dà una retta che taglia d in un punto M. Vi sono sulla retta d $n+1$ punti M, ciascuno dei quali coincide con uno dei suoi corrispondenti punti M', e perciò per r passano $n+1$ piani contenenti, ciascuno, due rette coniugate; quindi:

« *La superficie* S *è della classe* $n+1$.

« 14. Per una retta r di α passano n piani, individuati dalla retta r e dalle n tangenti condotte per il punto rd all'inviluppo corrispondente, i quali sono tangenti ad S e non coincidono con α; quindi il piano α *è tangente alla superficie.*

« Se la retta r passa per D uno degli n piani precedenti coincide con α, e quindi *il punto D è il punto di contatto di* α *con la superficie* S.

« 15. Se la retta r è tangente alla sezione αS, due delle n tangenti che si possono condurre per il punto rd all'inviluppo φ', corrispondente ad r, coincidono; e ciò avviene quando φ' passa per rd. Ora, se φ' passa per il punto rd, viceversa la curva φ corrispondente al punto rd di β, è tangente ad r; quindi *la curva* αS *si può definire come l'inviluppo delle rette, condotte per ogni punto di d, tangenti alla curva* φ, *corrispondente a questo punto, considerato come appartenente al piano* β.

« Per ogni punto di β, situato d, passano $2(n-1)$ tangenti alla curva φ corrispondente; inoltre, vi sono nel fascio di curve φ, corrispondenti ai punti di d, $2(n-1)$ curve tangenti alla retta d; quindi *la curva* αS *è della classe* $4(n-1)$ *ed ha la retta d per tangente* $2(n-1)$ *pla.*

« Questa curva αS, tocca d nei $2(n-1)$ punti ove d taglia l'inviluppo φ'_d, corrispondente a d, passa per i punti U_i, ed ha un punto r'-plo nel punto in cui d è tagliata da una retta fondamentale r'-pla di β. Risulta quindi che *l'ordine della curva* αS, *e quindi della superficie* S, *è*

$$4(n-1)+n+1+\Sigma r' x_{r'}=8n-6$$

« 16. Una retta di β ha, in generale, una sola retta coniugata che la taglia; quindi per essa passa un solo piano tangente alla superficie S, e non coincidente con β. Se poi la retta è tangente all'inviluppo φ'_d il polo di essa giace su d, e quindi, oltre al piano β, nessun altro piano tangente passa per la retta medesima. Segue da ciò *che il piano β è piano tangente n-plo della superficie* S, *e φ'_d è la curva di contatto.*

« Se $p'_{r'}$ è una retta fondamentale r'-pla di β, ogni piano uscente per $p'_{r'}$ è piano tangente r'-plo della superficie S, perchè contiene r' poli di $p'_{r'}$; quindi questa retta è r'-pla per la superficie S. Inoltre ogni piano uscente per u'_i è tangente alla superficie S; e perciò questa superficie contiene le rette u'_i. Segue da ciò che *il piano β taglia la superficie* S *secondo le rette fondamentali, secondo le rette u'_i, e la tocca lungo la curva φ'_d, che è dell'ordine* $2(n-1)$.

« 17. Sia P' un punto fondamentale di β, corrispondente ad un punto P_1 fondamentale semplice di α, e sieno $p'_{r'}$, $p'_{s'}$ le due rette fondamentali $(r'+s'=n)$, che passano per P'

« I piani tangenti ad S, condotti per una retta m passante per P, sono: il piano $m.p'_{r'}$, r'-plo; il piano $m.p'_{s'}$, s'-plo; ed il piano mP_1; quindi ogni piano condotto per la retta P_1P' è tangente alla superficie, e perciò P_1P' *è una retta della superficie medesima.*

« 18. Oltre alle rette fondamentali di β, alle rette u'_i, ed alle x_1 rette P_1P' non giacenti in β, vi possono essere sulla superficie altre ε rette, ove ε indica il numero dei punti non fondamentali di β, per i quali passano n rette (per equivalenza) semplici della superficie.

« 19. Se la reciprocità fra i due piani è tale che nel piano β ci sia una retta fondamentale p'_{n-1}, $(n-1)$-pla, questa retta sarà pure $(n-1)$pla per la superficie S, la quale conterrà ancora $3n-1$ rette semplici, giacenti sul piano β. Per ciascuno dei $3n-1$ punti, ove queste rette semplici di S tagliano la retta p'_{n-1}, passa una retta semplice della superficie, non situata sul piano β. Queste rette, non situate sul piano β, sono le $2(n-1)$ rette P_1P', e le $n+1$ rette q_i, luogo dei punti Q (11).

« 20. Proiettiamo da un punto qualunque O dello spazio il piano α sul piano β, e indichiamo con α_1 il piano β considerato come proiezione di α, e con A_1, a_1, φ_1 le proiezioni del punto A, della retta a e della curva φ,

rispettivamente. Fra i due piani sovrapposti α_1, β vi è una reciprocità birazionale [1] e si sa che:

« 1° Il luogo dei punti di α_1, che si trovano sulle rette corrispondenti di β, è una curva G_{n+1} dell'ordine $n+1$, della classe $2(2n-1)$, e di genere $n-1$. Questa curva passa per i punti fondamentali di α_1 (proiezioni dei punti fondamentali di α), come le curve φ_1 corrispondenti ai punti di β, passa per i punti U_i e per i punti d'incontro di ogni retta fondamentale di β con la curva fondamentale corrispondente.

« 2° L'inviluppo delle rette di β, che passano per i corrispondenti punti di α_1 è una curva G'_{n+1} di classe $n+1$, dell'ordine $2(2n-1)$ e di genere $n-1$. Ogni retta fondamentale r'-pla di β è tangente r'-pla della curva G'_{n+1}, la quale tocca le rette u'_i e le tangenti che da ogni punto fondamentale r-plo di α_1 si possono condurre alla curva fondamentale corrispondente.

« In tal modo, per ogni punto O dello spazio vengono determinate sul piano β due curve, la G_{n+1} e la G'_{n+1}, che diremo curve corrispondenti al punto O.

« 21. Se un punto A_1 di α_1 si trova sulla retta corrispondente a' di β, che è la retta polare del punto A di α di cui A_1 è la proiezione, la retta OA_1 è una retta del complesso ed il piano Oa' è un piano tangente alla superficie S, e viceversa; perciò la curva G_{n+1}, corrispondente ad un punto O, è l'intersezione di β col cono del complesso avente il vertice in O, e la curva G'_{n+1} è l'inviluppo delle rette in cui β taglia i piani tangenti al cono circoscritto alla seperficie S, condotto per il punto O a cui la curva G'_{n+1} corrisponde.

« Si ha quindi:

« *1° Il cono del complesso, appartenente ad un punto* O, *è dell'ordine* $n+1$, *della classe* $2(2n-1)$ *e del genere* $n-1$. *Esso ha* x_r $(r=1,2,...)$ *generatrici r-ple, passanti per i punti fondamentali di* α, *e passa per i punti* U_i.

« *2° Il cono circoscritto alla superficie* S, *condotto per un punto* O, *è della classe* $n+1$, *dell'ordine* $2(2n-1)$ *e genere* $n-1$. *Fra i piani tangenti a questo cono vi sono quelli che passano per le rette fondamentali di* β, *o per le rette* u'_i *o per le rette* P_1P'.

« 22. Il cono del complesso, appartenente ad un punto O, ed il cono circoscritto alla superficie S, condotto per lo stesso punto, sono correlativi. Alle generatrici del primo corrispondono i piani tangenti del secondo, passanti per le generatrici medesime. Se il cono del complesso si spezza in

[1] Vedi Iung: *Sulle superficie generate da due sistemi Cremoniani reciproci di grado m.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, a. 1885; od anche una Nota del sig. Lazzeri pubblicata l'anno 1886 negli stessi Rendiconti ed intitolata: *Sulle reciprocità birazionali nel piano.*

un piano ed in un cono di ordine n, quello circoscritto si comporrà di una retta e di un cono di classe n.

« 23. Sia r una generatrice comune al cono del complesso, appartenente ad un punto qualunque O dello spazio, ed al cono circoscritto alla superficie S; e sia $A \equiv rd$, ed a' la polare di A. Il piano $\pi \equiv Aa'$ passa per r ed è tangente alla superficie S. Ora, perchè un altro piano uscente per r e tangente ad S, coincida con π è necessario che l'inviluppo φ', corrispondente alla retta $\pi\alpha$, sia tangente ad a' nel punto ra'; ma in tal caso la retta r conta per due rette del complesso infinitamente vicine (§ 6), e quindi π è piano tangente al cono del complesso. Segue da ciò che:

« *Il cono del complesso, appartenente ad un punto* O, *ed il cono circoscritto alla superficie* S, *condotto per lo stesso punto, si toccano lungo le generatrici che hanno di comune.*

« 24. Il cono del complesso, appartenente ad un punto qualunque O del piano α, si compone del piano α, contato n volte, e del piano che passa per O e per la retta o' polare di O. Questi due piani si tagliano secondo la retta $O . do'$, che appartiene al complesso ed è *una retta singolare* del complesso medesimo. Ogni retta a di α è singolare per il complesso, perchè su essa vi sono n punti, quelli coniugati al punto ad, tali che il cono del complesso, appartenente ad uno qualunque di essi, si compone di due piani (di cui uno è α) passanti per la retta medesima.

« Il cono del complesso, appartenente al punto D, è formato dal piano α contato $n+1$ volte. Di modo che il punto D presenta una singolarità, rispetto al complesso, differente di quella degli altri punti del piano α.

« Il cono del complesso appartenente ad un punto del piano β si compone del piano β e di un cono di ordine n. Le n rette comuni al piano β ed al cono, sono rette singolari del complesso. Per ogni punto di β passano quindi n di queste rette singolari, e sopra una retta qualunque di β vi è un sol punto, tale che il cono del complesso, appartenente ad esso, si compone del piano β e di un cono di ordine n che ha per generatrice la retta medesima.

« Le rette u'_i e la retta d presentano maggiore singolarità: ogni punto di una retta u'_i è il vertice di un cono del complesso composto del piano β e di un cono di ordine n avente la stessa retta per generatrice; ed il cono del complesso, appartenente ad un punto qualunque di d, si compone del piano α e del piano β ».

Fisica. — *Studio delle proprietà elastiche dei corpi fondato sull'uso contemporaneo dei metodi statico e dinamico* [1]. Nota del dott. M. CANTONE, presentata dal Socio BLASERNA.

« Lo studio delle proprietà elastiche per mezzo delle oscillazioni ha condotto a risultati i quali stanno in sensibile disaccordo con quelli ottenuti usando il metodo statico, anche quando venga adoperato lo stesso corpo nei due generi di esperienze. Da taluni si è voluto attribuirne la causa ad imperfezione delle misure, non si è escluso però dai più che la natura medesima del processo di deformazione potesse nei due casi portare a valori diversi per le costanti di elasticità, non essendo la legge di Hooke seguita esattamente; anzi tenendo conto di questa circostanza si sono accolti in generale con maggior fiducia i risultati delle ricerche col metodo dinamico, appunto perchè con esse si riesce a determinare le dette costanti, senza bisogno di provocare forti spostamenti delle particelle e quindi senza allontanarsi molto da quella legge.

« Accertata intanto da me la esistenza dei fenomeni d'*isteresi elastica* [2], conveniva trattare la questione da un punto di vista nuovo, importava cioè vedere se partendo dallo studio dei processi ciclici di deformazione fosse possibile avere, coll'uso dei due metodi statico e dinamico, risultati concordanti.

« Nella Nota attuale mi propongo di rendere conto delle ricerche fatte in proposito.

Ho già mostrato in una memoria: *Sull'attrito interno dei metalli* [3] come lo smorzarsi delle oscillazioni dovute a forze elastiche sia da attribuire con grande probabilità al lavoro che si consuma nel corpo per i fenomeni d'isteresi, ed ho fatto vedere ancora in una Nota successiva potersi rappresentare la legge che segue il corpo nel deformarsi per torsione in un ciclo bilaterale, fra limiti non molto estesi di ampiezza, mediante il sistema di equazioni:

$$M = M_1 \cos \alpha \quad , \quad \omega = A \cos (\alpha - \lambda) \ ,$$

essendo M il momento torcente, ω l'angolo di torsione, M_1 il momento massimo impiegato nel ciclo, λ un parametro da cui dipendono nel ciclo che si considera le deviazioni dalla legge di proporzionalità tra M ed ω, ed α una variabile indipendente.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica della R. Università di Palermo.

[2] V. Rend. Acc. dei Lincei, 2, 2° sem., p. 246, 295, 339 e 385, 1893; 3, 1° sem., p. 26 e 62, 1894.

[3] V. *Nuovo Cimento*, 1, p. 165 e 190, 1895.

« Mantenendoci i quest'ordine d'idee e restando nel campo della torsione, ammetteremo che nel caso delle oscillazioni la legge di dipendenza fra le M e le ω sia della stessa natura, porremo perciò, prendendo come origine dei tempi l'istante in cui il momento raggiunge il massimo valore dalla parte delle forze torcenti positive:

$$(1) \qquad M = M_1 e^{-\frac{\gamma t}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad , \quad \omega = A e^{-\frac{\beta t}{T}} \cos \frac{2\pi (t - \lambda)}{T} ,$$

dove T denota la durata della oscillazione, e le espressioni esponenziali costituiscono dei *fattori di smorzamento* che noi potremo assumere nella forma data, salvo ad esaminare poi la natura delle costanti γ e β.

« L'adottare il sistema delle (1) corrisponde ad ammettere una differenza di fase fra le variazioni di M e di ω, la quale, pur essendo suggerita dall'indole dei fenomeni d'isteresi, nella ipotesi che il corpo venga abbandonato a sè dopo averlo sottoposto all' azione di forze gradatamente crescenti, deve ritenersi, almeno per quanto riguarda il principio del moto oscillatorio, come puramente fittizia, giacchè in tal caso non può supporsi che al massimo di ω non corrisponda il massimo di M. Però la ipotesi potrebbe essere conforme alla realtà se invece di arrivare alla deformazione estrema con forze crescenti, vi giungessimo con un impulso dato al filo nello stato di riposo, in quanto è probabile che coll'aumentare della torsione una parte via via maggiore di molecole, assumendo le proprietà caratteristiche dei fluidi e quindi senza presentare reazioni elastiche, subiscano spostamenti oltre la posizione cui sarebbero pervenute qualora la rottura dei legami non si fosse verificata, in guisa da rendersi possibile una deformazione ancora nel senso primitivo quando le forze elastiche per la reazione delle parti rimanenti hanno raggiunto il massimo valore. Se così stessero le cose, il concetto da cui è partito l'Ewing nella denominazione dei fenomeni da lui studiati nel magnetismo non sarebbe nel campo della elasticità del tutto fittizio, ma avrebbe fondamento sulla realtà.

« Senza insistere oltre in tali considerazioni, ci contenteremo di trovare teoricamente la durata di oscillazione partendo da una legge relativa ai fenomeni d'isteresi molto vicina alla vera, per cui l'attuale studio senza avere la pretesa di risolvere in modo rigoroso il problema del moto dei sistemi elastici, è da riguardarsi come un tentativo di un nuovo metodo d'indagine.

« Cominceremo dal vedere a quali condizioni devono soddisfare i parametri β, γ, λ e T. Servirà a tal uopo la relazione generale:

$$-\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{M_1}{I} e^{-\frac{\gamma t}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T} ,$$

in cui I denota il momento d'inerzia della massa oscillante. Sostituendo per ω il valore dato dalla (1) si avrà:

$$(2)\quad Ae^{-\frac{\beta t}{T}}\left\{\frac{4\pi^2-\beta^2}{T^2}\cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{T}-\frac{4\pi\beta}{T^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi(t-\lambda)}{T}\right\}=\frac{M_1}{I}e^{-\frac{\gamma t}{T}}\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

« Una prima equazione si ottiene ponendo nella (2) $t=\lambda$. Risulta allora:

$$(3)\qquad Ae^{-\frac{\beta\lambda}{T}}\frac{4\pi^2-\beta^2}{T^2}=\frac{M_1}{I}e^{-\frac{\gamma\lambda}{T}}\cos\frac{2\pi\lambda}{T}$$

da cui si ricava:

$$(4)\qquad T=\sqrt{\frac{IAe^{-\frac{\beta\lambda}{T}}}{M_1}\,\frac{4\pi^2-\beta^2}{\cos\frac{2\pi\lambda}{T}}\,e^{\frac{\gamma\lambda}{T}}}$$

« Se poi facciamo nella (2) $t=T+\lambda$ si ha:

$$Ae^{-\frac{\beta\lambda}{T}}e^{-\beta}\frac{4\pi^2-\beta^2}{T^2}=\frac{M_1}{I}e^{-\frac{\gamma\lambda}{T}}e^{-\gamma}\cos\frac{2\pi\lambda}{T}\ ,$$

la quale relazione non può coesistere colla (3), a meno che non si abbia $e^{-\beta}=e^{-\gamma}$, ossia:

$$(5)\qquad \beta=\gamma\,.$$

« Se in fine si pone nella (3) $t=\frac{T}{4}$, avremo:

$$Ae^{-\frac{\beta}{4}}\left(\frac{4\pi^2-\beta^2}{T^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi\lambda}{T}-\frac{4\pi\beta}{T^2}\cos\frac{2\pi\lambda}{T}\right)=0\,,$$

da cui:

$$(6)\qquad \mathrm{tg}\,\frac{2\pi\lambda}{T}=\frac{4\pi\beta}{4\pi^2-\beta^2}\,,$$

ed attesa la piccolezza di β e λ:

$$(7)\qquad \frac{2\pi\lambda}{T}=\frac{\beta}{\pi}\,.$$

« Questo risultato ci dice che se una differenza di fase esiste in realtà fra le variazioni di M e di ω, essa tende a sparire con β. Sarebbe invero azzardato il supporre che il *decremento logaritmico* β, il quale quando si parta da grandi ampiezze diminuisce in modo assai marcato col diminuire della elongazione, abbia per limite inferiore lo *zero*, ma atteso il fatto che anche operando fra limiti di ampiezza assai ristretti [1] il valore di β è per

[1] V. W. Voigt, *Bestimmung der Constanten der Elasticität und Untersuchung der innern Reibung für einige Metalle.* Göttingen 1892.

ciascuna serie di oscillazioni sempre decrescente, quella ipotesi non sarebbe del tutto priva di base, ed allora si verrebbe per la (7) alla conseguenza di aversi un ritorno alle condizioni di struttura iniziali per la natura stessa del lavorio subìto dal corpo durante il moto oscillatorio. Del resto, ammesso pure che λ non raggiunga il limite *zero*, si manifesterebbe sempre nel filo la tendenza a questo ritorno, rimanendo solo effetti residui dello spostamento di fase, effetti che potrebbero forse anche spiegarci i fenomeni di *accomodazione* [1].

« Al principio di ogni ciclo dinamico corrisponderà un valore massimo di ω tale che per esso si abbia:

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-\frac{\beta t}{T}} \cos \frac{2\pi\,(t-\lambda)}{T}\right\} = 0$$

ossia:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\,(t-\lambda)}{T} = -\frac{\beta}{2\pi};$$

e poichè β è assai piccolo il valore del tempo relativo a questo massimo ci verrà dato, tenendo conto della (7), dalla formola:

$$t_1 = \frac{\beta T}{4\pi^2},$$

onde si avrà per il massimo cercato, che indicheremo con ω_1, nei limiti di approssimazione cui ci siamo attenuti:

$$\omega_1 = A\,\frac{4\pi^2 - \beta^2}{4\pi^2}\left(1 - \frac{\beta^2}{8\pi^2}\right) \tag{8}$$

« Se infine teniamo presenti le (4), (5), (6) ed (8), avremo con grande approssimazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I\omega_1}{M_1}}\left(1 + \frac{\beta^2}{16\pi^2}\right).$$

« Perveniamo così ad una espressione per T che differisce apparentemente da quella ammessa nella ipotesi che si abbiano reazioni elastiche proporzionali agli spostamenti delle particelle solo per la introduzione del fattore $\left(1 + \frac{\beta^2}{16\pi^2}\right)$, il quale fu trovato per i diversi fili tanto vicino all'unità da rendersi superfluo il tenerne conto; ma deve notarsi che nel radicale invece del noto rapporto $\frac{\omega}{M}$ comparisce il valore di questa espressione che corrisponde ai massimi di ω e di M relativi alla oscillazione che si consi-

(1) V. Rend. Acc. Lincei, 2, 2° sem., p. 385.

dera, onde risulta la durata T uguale a quella che si avrebbe ammettendo lungo il ciclo dinamico una legge di proporzionalità fra le ω e le M con una costante uguale ad $\frac{\omega_1}{M_1}$.

« La soluzione del problema riguardante il moto oscillatorio dei sistemi elastici si riduce pertanto alla ricerca del rapporto $\frac{\omega_1}{M_1}$ per le singole oscillazioni. Vediamo come si possa procedere in tale ricerca.

« È noto che, se non si va a deformazioni esagerate, sopprimendo d'un tratto il carico torcente il corpo oscillando si riporta ad una configurazione vicinissima a quella da cui è partito prima di essere deformato, specialmente ad accomodazione innoltrata. È da pensare adunque che i cicli compiuti in tal caso fra limiti gradatamente decrescenti tendano a far ritornare il corpo allo stato iniziale, presso a poco per la stessa via che esso avrebbe seguito arrivando alla deformazione massima con una serie di cicli bilaterali le cui ampiezze aumentino man mano ripassando in senso opposto per gli stessi valori di prima, e poichè sappiamo essere in tal caso i cicli rappresentati da cappî i quali fanno capo alla curva che dà l'andamento della deformazione per forze crescenti con continuità, siamo indotti a ritenere che anco in un filo oscillante per le forze elastiche le curve relative ai vari cicli facciano capo alla stessa linea.

« Ed a conferma di un tal modo di vedere varrebbero talune esperienze da me compiute con un filo di nichel. Ho trovato infatti che producendo sul corpo in esame una serie di cicli statici bilaterali tra le forze estreme: *24*, *— 22*, *20*, *— 18*, *16*, *— 14*, *12* ecc., le deformazioni avute per le forze: *24*, *20*, *16*, *12* ecc., coincidevano sensibilmente con quelle relative agli stessi carichi quando si andava direttamente da *zero* a *24*.

« Segue da tutto ciò che per la verifica della teoria avanti esposta converrà assumere per $\frac{\omega_1}{M_1}$ i valori forniti dalle ricerche col metodo statico, e se i risultati dell'esperienza andranno d'accordo con quelli dei nostri calcoli, avremo ragione di credere che la ipotesi ora fatta non sia del tutto arbitraria.

« Esaminiamo adunque se il valore di T dedotto dalla nuova teoria è d'accordo con quello ricavato sperimentalmente. Ricorreremo per tale raffronto alle ricerche intraprese in occasione dello studio sull'attrito interno dei metalli, servendoci oltre che della parte riguardante i cicli statici e lo smorzamento delle oscillazioni di alcune esperienze compiute allora per indagare come varia T al diminuire dell'ampiezza, e delle quali non si è reso conto nelle precedenti pubblicazioni.

« In queste ultime esperienze vennero da me compiute le misure del tempo e delle elongazioni nel modo che verrò ad esporre. Messo ad oscillare il filo colla rapida soppressione del carico torcente e preso l'andamento

del cronometro, passavo al cannocchiale e marcavo l'istante in cui si vedea coincidere per la prima volta la posizione di massimo spostamento a destra col filo del cannocchiale. Siccome intanto la misura del tempo non permetteva che si potesse apprezzare esattamente questa posizione, le letture relative alle ampiezze si cominciavano con una, e per fili oscillanti con grande rapidità con due, oscillazioni di ritardo rispetto all'istante marcato, e si limitavano a tre successive escursioni nei due sensi. Si avea così il mezzo di eseguire varie serie di queste misure coll'intervallo di *5* o di *10* oscillazioni, a seconda dei valori di T, durante il moto oscillatorio fino a che le ampiezze consentivano misure esatte del tempo.

« Esperienze cosiffatte fornivano i valori medî di T nei predetti intervalli; occorreva dunque ricercare le corrispondenti ampiezze che io voglio sin d'ora denotare con (ω_1). Per questo cominciavo dal completare le serie relative alle elongazioni servendomi delle serie analoghe di cui feci uso nello studio dell'attrito interno, nelle quali partendo dagli stessi limiti di forze torcenti si erano ottenute con continuità le escursioni a destra ed a sinistra per un numero piuttosto grande di oscillazioni [1], ed avute così le ω_1 corrispondenti ai valori segnati del tempo, si deducevano prendendo le successive medie i valori di (ω_1).

« A dir vero sarebbe stato più rigoroso riferirsi alle ampiezze relative agli istanti medî degl'intervalli sopra menzionati, ma siccome $\frac{\omega}{M}$ varia poco in un campo ristretto di deformazioni poteva bastare che le (ω_1) fossero determinate come ora si disse. Avute le (ω_1) si ricorreva al diagramma che dava, in base all'esperienze col metodo statico e per forze crescenti con continuità, le $\frac{\omega_1}{M_1}$ in funzione delle ω_1 e si cercavano le ordinate in corrispondenza dei diversi valori di (ω_1).

« Il calcolo di T potè estendersi fino ad un limite di ampiezza non molto piccolo, perchè quel diagramma era tracciato a partire dal punto relativo al primo dei pesi torcenti adoperati nell'esperienze col metodo statico, e per tal peso si produceva una deformazione superiore alle ampiezze cui ci si arrestava nelle ricerche col metodo dinamico; e siccome la nostra verifica era basata sulla conoscenza esatta dei rapporti $\frac{\omega_1}{M_1}$, non si credè opportuno ricavare le durate inerenti alle più piccole ω_1 usando valori di $\frac{\omega_1}{M_1}$ ottenuti per estrapolazione.

« Il momento d'inerzia della massa oscillante venne determinato con due serie di esperienze eseguite entro limiti di ampiezza assai ristretti con un

[1] Fu trovato che l'accordo fra le serie di elongazioni avute a partire dalla stessa lettura iniziale era assai soddisfacente.

filo di nichel crudo. Il sistema di cui qui parliamo era tutto di bronzo e costituito, come altra volta fu detto [1], di una ruota con sei raggi portante un albero centrale con una puleggia, e di due anelli aventi diametro esterno uguale a quello della ruota. Determinata la durata di oscillazione del filo, tanto nel caso del carico completo quanto togliendo l'anello superiore, colla conoscenza del peso e delle dimensioni di quest' ultimo si potè dedurre il momento d'inerzia del sistema completo.

Debbo però far rilevare che il valore di T in ciascuna di quelle due serie fu trovato decrescente dal principio al termine del moto oscillatorio, non ostante si fosse partiti in entrambi i casi da piccole ampiezze, se non che si trattava qui di variazioni poco notevoli, per cui bastò prendere come valori delle due durate le medie ottenute fra limiti uguali di ω_1. In tal modo si ebbe:

$$I = 2,039,200.$$

« Per il nostro metodo di verifica non era necessario che fossero note le dimensioni del filo oscillante, tuttavia, siccome nelle letture delle ampiezze si fece uso di uno specchio collocato lungo il filo ad una distanza dall'estremo superiore che indicheremo con l, il calcolo di $\frac{\omega_1}{M_1}$ richiedeva che le elongazioni relative ad l fossero ridotte ai valori corrispondenti alla lunghezza totale L mediante il fattore $\frac{L}{l}$, e poichè la l e la L, a causa delle saldature agli estremi del filo, non si potevano determinare con grande esattezza non era improbabile che i valori calcolati di T, atteso quanto ora si è detto, riuscissero per ciascun filo alterati nella stessa misura. Ma per l'indole dell'attuale studio non costituiva questa circostanza un grave inconveniente, giacchè per vedere se l'esperienze coi metodi statico e dinamico conducono a risultati concordanti, bastava che al variare dell'ampiezza le variazioni dei valori calcolati ed osservati di T fossero uguali.

« Ciò appunto parmi si possa dedurre dalla seguente tabella che contiene tutti i risultati cui sono giunto. Nelle successive colonne di essa si hanno rispettivamente le indicazioni dei diversi fili cimentati, le ampiezze ω_1 computate in minuti primi e per un centimetro del filo, i valori di T avuti dall'esperienza, quelli di T_1 dedotti dai calcoli [2], e finalmente le differenze Δ fra le T e le corrispondenti T_1.

[1] V. *Nuovo Cimento,* 1, p. 165.

[2] Nel calcolo di T_1 non si tenne conto della resistenza dell' aria, trattandosi di un'azione che non poteva influire in modo apprezzabile sul valore della durata nei limiti di approssimazione ai quali ci siamo arrestati.

	ω_1	T	T_1	Δ
Ot_2	20,3	5,31	5,30	0,01
	16,6	5,30	5,29	0,01
	14,9	5,29	5,29	0,00
	13,8	5,29	5,29	0,00
	----	----	----	----
	9,4	5,29	5,28	0,01
Fe_1	13,9	4,02	4,02	0,00
	9,5	4,01	4,01	0,00
	6,5	3,99	4,00	— 0,01
	4,7	3,98	3,98	0,00
	3,5	3,98	3,97	0,01
Fe_2	54,1	6,13	6,13	0,00
	37,3	6,10	6,09	0,01
	28,9	6,08	6,08	0,00
	23,7	6,07	6,07	0,00
	20,0	6,06	6,06	0,00
	17,2	6,06	6,06	0,00
Fe_3	36,8	8,32	8,25	0,07
	29,2	8,30	8,23	0,07
	24,0	8,30	8,22	0,08
	19,8	8,30	8,22	0,08
	16,4	8,28	8,22	0,06
	13,7	8,28	8,22	0,06

	ω_1	T	T_1	Δ
Fe_4	72,8	5,33	5,46	— 0,13
	32,1	5,28	5,36	— 0,08
	23,4	5,28	5,36	— 0,08
	18,3	5,28	5,35	— 0,07
	14,6	5,27	5,35	— 0,08
Ni_9	26,2	5,45	5,31	0,14
	17,8	5,44	5,30	0,14
	12,9	5,44	5,29	0,15
	9,5	5,44	5,29	0,15
	7,3	5,42	5,28	0,14
Ni_{11}	21,3	5,15	5,13	0,02
	13,9	5,12	5,10	0,02
	9,5	5,11	5,10	0,01
	6,9	5,09	5,09	0,00
Pt_1	56,1	8,16	8,11	0,05
	43,0	8,14	8,07	0,07
	35,6	8,14	8,05	0,09
	30,7	8,12	8,03	0,09
	27,1	8,10	8,02	0,08
	24,5	8,10	8,02	0,08

	ω_1	T	T_1	Δ
Al_2	10,6	3,21	3,21	0,00
	8,8	3,19	3,20	— 0,01
	7,4	3,19	3,20	— 0,01
	6,3	3,19	3,19	0,00
	----	----	----	----
	4,6	3,18	3,18	0,00
Cu_1	18,6	7,92	7,95	— 0,03
	12,1	7,80	7,83	— 0,03
	8,8	7,74	7,79	— 0,05
Cu_2	16,9	7,90	7,89	0,01
	11,8	7,74	7,78	— 0,04
	8,9	7,72	7,74	— 0,02
Cu_3	9,61	5,00	4,98	0,02
	7,16	4,98	4,95	0,03
	5,88	4,96	4,93	0,03
	4,98	4,94	4,93	0,01
	4,25	4,94	4,92	0,02
	3,69	4,92	4,92	0,00
	3,17	4,92	4,92	0,00
Ag_2	10,9	6,30	6,32	— 0,02
	7,6	6,24	6,27	— 0,03
	5,7	6,24	6,26	— 0,02
	4,7	6,22	6,24	— 0,02

« Il fatto che i valori di Δ sono d'ordinario assai piccoli, mostra che gli elementi costanti di cui si deve tener conto nella formula di T furono determinati con sufficiente esattezza, sicchè le divergenze più grandi fra le T e le T_1, nei casi in cui si presentano, è probabile sieno dovute alla imperfetta misura di L ed l. Ad ogni modo è da osservare che le Δ di ciascuna serie sono sensibilmente costanti, il che, come si disse, accenna ad una conferma dei nostri risultati teorici, e rivela quindi l'importanza dello studio del moto oscillatorio dei sistemi elastici fondato sulla ricerca col metodo statico della legge di deformazione.

« Il dott. W. Puddie (1) ha pubblicato in questi ultimi tempi uno studio sulla oscillazione dei fili per torsione, in cui riferendosi ad alcune esperienze

(1) Phil. Mag., 38, p. 36, 1894.

da lui fatte con un filo di ferro, mostra che la elongazione θ relativa al tempo t è data mediante la relazione empirica $\theta^n (t + t_0) = h$, dove θ_0 e h sono costanti. Egli trova che a questo risultato si può giungere teoricamente supponendo, secondo il concetto del Maxwell, che al crescere della torsione un numero di gruppi molecolari sempre maggiore si spezzi, ed ammettendo che per tal fatto si abbia una diminuzione di energia potenziale proporzionale ad una potenza dell'angolo di torsione.

« Se la legge empirica rilevata dal Sig. Puddie fosse applicabile a tutti i corpi, si potrebbe nella espressione generale che si dà per ω nel caso del moto oscillatorio, sostituire al fattore di smorzamento $\omega_1 e^{\frac{\beta t}{T}}$, dove comparisce la quantità β che non è mai costante, l'altro della forma $\frac{\omega_1}{(1 + ct)^{\sigma}}$, salvo a trovare in base alla equazione differenziale cui esso deve soddisfare le relazioni che legano le costanti c e σ agli elementi del fenomeno. Però la verifica da me tentata della formula del Sig. Puddie per lo smorzamento delle oscillazioni ha condotto a risultati negativi, nel senso che non è stato possibile trovare per alcun filo una coppia di valori di σ e c costanti. Il concetto da cui parte l'autore del citato lavoro si avvicina alle nostre vedute, ma egli nella teoria elementare che svolge non tien conto dei fenomeni d'isteresi, i quali, per quanto si è osservato in questo e nei miei precedenti lavori sull'elasticità, devono esercitare sul moto dei sistemi elastici una influenza tutt'altro che trascurabile.

« Converrà dunque per ora conservare al fattore di smorzamento la forma di una espressione esponenziale, dove la quantità β al pari della durata T è da riguardarsi come un parametro variabile da una oscillazione all'altra. È sperabile però che si arrivi a trovare per questo fattore una espressione che meglio risponda al comportamento reale dei corpi nei fenomeni dinamici, sopratutto per riguardo a ciò che operando con sostanze dotate di plasticità apprezzabile, qualora non si parta da una deformazione assai piccola, il corpo abbandonato a sè non ritorna esattamente alla posizione di riposo iniziale, e che di conseguenza non può a rigore ammettersi lo *zero* come limite di quel fattore al crescere di t ».

Chimica. — *Sul comportamento crioscopico di sostanze aventi costituzione simile a quella del solvente* (1). Nota di FELICE GARELLI, presentata dal Socio CIAMICIAN.

« In una Nota con lo stesso titolo della presente pubblicata in questi Rendiconti (2), il prof. Paternò fa alcune osservazioni a proposito di un lavoro

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) 1° semestre, vol. IV pag. 318.

pubblicato dallo scrivente e da Montanari alla fine del decorso anno sulla Gazzetta chimica italiana (1).

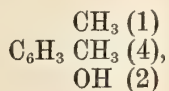
« Le obbiezioni del prof. Paternò mi sembrano più che altro derivare dall'aver egli dato ad alcune proposizioni contenute in quel lavoro, un'interpretazione alquanto diversa dalla nostra. Egli si propone specialmente di dimostrare la insussistenza di una regola espressa nel lavoro summentovato e che risguarda il comportamento crioscopico anormale dei corpi ciclici ossidrilati: inoltre afferma che tale comportamento anormale è dovuto, non all'analogia di costituzione fra il solvente ed il corpo sciolto, come io sostenni con Montanari, ma bensì alla funzione chimica dei corpi ossidrilati.

« Innanzi tutto mi sia concesso riferire qui testualmente le parole con le quali fu enunciata la regola, che è peculiarmente l'oggetto delle critiche mosse del prof. Paternò. Nella Memoria citata a pag. 237 è detto « .... si è indotti a credere che tutti i derivati « para » faranno eccezione o per lo meno si allontaneranno dalla regola *finora verificatasi*, secondo la quale ogni corpo ciclico, che differisce dal solvente per un solo ossidrile o per un gruppo amminico deve, disciolto in esso, fornire abbassamenti termometrici minori dei teorici ».

« Le parole « *finora verificatasi* » sfuggite evidentemente al prof. Paternò, poichè non citate nella sua pubblicazione, ristringono il significato della mentovata proposizione nei suoi veri limiti, che non appaiono invece agli occhi di chi leggesse soltanto la nota del prof. Paternò.

« In quella Memoria non s'ebbe la pretesa di enunciare in base a dati sperimentali ancora scarsi, una legge generale insofferente di eccezioni: ma bensì s'intese soltanto di riassumere in una frase i risultati delle esperienze *fino allora* eseguite. E questi, nonchè come vedremo alcuni di quelli forniti di recente dallo stesso prof. Paternò, inducono a ritenere che realmente quella regola sia *in massima* di indole generale, ma suscettibile di eccezioni tra le quali sono annoverate quelle presentate dai paraderivati.

« Un' altra eccezione venne trovata dal prof. Paternò nel paraxilenol

$$C_6H_3 \begin{matrix} CH_3\,(1) \\ CH_3\,(4), \\ OH\ (2) \end{matrix}$$

il quale, sciolto nel paraxilene, non presenta l'anomalia caratteristica dei corpi che formano col solvente soluzione solida; ma soltanto quella, comune a quasi tutti i corpi ossidrilati, che si esplica in modo ben diverso dalla prima.

« Onde è sopratutto importante tenere ben distinte le due specie di anomalie aventi cause ben diverse, quantunque esse talvolta possano trovarsi riunite in determinate soluzioni. E questa distinzione basata sulle diverse cause che producono le anomalie del comportamento crioscopico, opportuna-

(1) Gazz. chim., 1894, vol. II, pag. 229.

mente accennata dal prof. Paternò in principio della sua nota, sembra poi in seguito dimenticata.

« Egli di fatto è d'opinione, che le anomalie riscontrate nel comportamento dei fenoli nei vari solventi sieno generalmente un fenomeno dovuto alla loro funzione chimica. Su ciò nessun dubbio, e credo anzi, che le numerose esperienze di Raoult, Paternò, Beckmann (1), Eykman (2), abbiano provato questo fatto in modo, che esso non ha bisogno di ulteriore conferma.

« Ma questo è vero soltanto finchè si considerano le anomalie prodotte da una sola causa comune: cioè dalla tendenza dei corpi con ossidrile a formare molecole complesse. Ora non è questa categoria di anomalie quella a cui si riferisce la regola infirmata dal Paternò ed enunciata nella Memoria mia e del Montanari; e nessuna delle mie pubblicazioni si riferisce alle già notissime e ben spiegate eccezioni alle leggi delle soluzioni diluite presentate dai fenoli in genere, dalle ossime, dagli alcooli e dagli acidi.

« È noto che per gli alcooli, per le ossime, per i fenoli in massima, i valori dei pesi molecolari ottenuti in soluzione benzolica, tanto col metodo crioscopico, quanto con quello ebullioscopico, raggiungono od almeno si avvicinano assai a quelli teorici, quando la soluzione è diluita; laddove i pesi stessi crescono più o meno rapidamente con l'aumentare della concentrazione. E questo comportamento si ripete per gli stessi corpi sciolti in altri idrocarburi (*naftalina*, *difenile*, *paraxilene*, *difenilmetano*, *fenantrene* ecc.) come pure per le soluzioni in *bromuro di etilene* e in *nitrobenzina;* è meno spiccato, ma ancora sensibile, nelle soluzioni in *anetolo*, *azobenzolo*, *benzofenone* e cessa infine di verificarsi se il solvente è esso medesimo un fenolo od un acido. Di fatto l'acido benzoico non fa più menomamente eccezione alla legge di Raoult e van't Hoff quando è sciolto in acido acetico, fenilpropionico, stearico, caprinico ecc., nonchè nel fenolo e nel timolo: e così pure gli alcool, le ossime, il fenolo ordinario, sono pure normali se sciolti in fenolo, nel timolo e negli acidi.

« Ora il ripetersi dello stesso fenomeno per uno stesso corpo in solventi così diversi fra di loro, fa sì che non solo, « la supposizione che queste anomalie dipendano da analogia di costituzione fra solvente e sostanza sciolta perde molto del suo valore » (3) (così si esprime il prof. Paternò) ma, io non esiterei a dire, che sarebbe assurdo il volerla ammettere. Il prof. Paternò riconoscerà senza dubbio, che io non ho mai invocato l'analogia di costitu-

(1) Zeitschr. f. phys. Chemie, vol. II, pag. 715.

(2) » » » » IV, pag. 500 e 510.

(3) La stessa citata obbiezione del prof. Paternò era anzi già stata posta, da me e Ferratini, a proposito degli acidi (Gazz. chim. 1892, parte II^a, p. 267); ed implicitamente la ritenevamo estesa ai corpi con ossidrile, l'anomalia dei quali presenta pure lo stesso carattere di mantenersi inalterata in vari solventi.

zione per spiegare anomalie, la causa delle quali risiede unicamente nella formazione di molecole complesse.

« In questo proposito giova ricordare che rispetto al caso speciale delle soluzioni di fenolo in benzolo, io feci rilevare come il fenolo non si comportava in modo identico a quello seguito generalmente dagli altri corpi idrossilati. Nella mia prima Memoria sul comportamento crioscopico di sostanze aventi costituzione simile a quella del solvente (1) a pag. 370 scrivevo: « io ritengo assai più prossimo al vero ammettere che il fenolo in soluzione benzolica sfugga alle leggi che regolano il congelamento delle soluzioni per due cause riunite e cioè, prima per formazione di soluzione solida col solvente ed in secondo luogo per la sua tendenza, comune a quasi tutti i corpi idrossilati, a formare molecole complesse »

« Le ragioni che stanno in favore di tale supposizione e che a suo tempo ho svolto, sono:

1) Per gli alcool, per le ossime, pel timolo (e ora si può aggiungere per lo xilenol), in soluzione benzolica si raggiungono o quasi, tanto col metodo crioscopico quanto col metodo ebulliometrico i pesi molecolari teorici. Il che non avviene pel fenolo in soluzione benzolica.

2) I due naftoli, i quali sciolti in benzolo sono quasi normali, disciolti in naftalina danno effetti pei quali viene palese la formazione di soluzione solida. Anzi il β-naftolo e la naftalina costituiscono appunto una vera miscela isomorfa, dacchè quello innalza il punto di fusione di questa. Quindi non era fuori di luogo supporre che nelle soluzioni, perfetttamente corrispondenti per costituzione chimica, di fenolo in benzolo avvenisse lo stesso fenomeno.

3) Quando si determina il peso molecolare del fenolo in benzolo col metodo ebulliometrico, si ottengono a bassa concentrazione dei pesi molecolari molto prossimi ai teorici. Il divario rilevante che esiste fra il peso molecolare ottenuto coi due diversi metodi alla stessa concentrazione:

	peso molecolare	
concentrazione	col metodo crioscopico	col metodo ebullioscopico
2,5 p.cto, circa	169	109

non si può, parmi, attribuire ad una maggior forza dissociante acquistata dal benzolo alla temperatura dell'ebollizione, poichè il maggior numero degli altri corpi idrossilati e carbossilati dà, coi due metodi in soluzione benzolica, pesi molecolari quasi identici. Ed in proposito il Beckmann riassumendo i suoi risultati così si esprime (2): « Die 75° über dem Gefrierpunkt liegende Temperatur hat die bei der Gefriermethode beobachteten Anomalien im wesentlichen bestehen lassen ».

« Ma anche le nuove determinazioni del prof. Paternò parlano, mi pare,

(1) Gazz. chim. ital. 1893, parte 2a.

(2) Zeitschr. für Phys. Chem. VI, pag. 445.

in favore del fin quì detto. Poniamo di confronto i risultati delle determinazioni di pesi molecolari eseguite col fenolo in benzolo e in paraxilene:

Fenolo, $C_6H_6O = 94$

	In soluzione benzolica		In soluzione di paraxilene	
	concentrazione	peso molecolare	concentrazione	peso molecolare
(Beckmann)	0,337	144	—	—
"	*1,199*	*153*	*1,251*	*97,9*
(Paternò)	2,4465	168,9	2,765	106,7
"	3,7396	175,6	4,874	120,1
"	4,8853	178,8	6,813	129,4
"	9,8152	206,7	9,759	146,7

« In base a questi risultati non parmi che si possa concludere col prof. Paternò « che il fenolo si comporta in modo identico nella benzina e nel paraxilene ». È evidente invece, che il peso molecolare trovato pel fenolo sciolto in paraxilene tende al valore teorico e lo raggiunge senza dubbio a concentrazione inferiore all'1 p.cento; laddove sciolto in benzolo, ne rimane sempre notevolmente discosto anche a concentrazione del 0,3 p cto. E ciò perchè per la prima soluzione vi è una sola causa di anomalia comune ai cor i idrossilati: cioè la formazione di molecole complesse, man mano dissociate dal solvente; nella seconda vi ha inoltre la formazione di soluzione solida tra il fenolo e il benzolo, *causata questa dall'analogia di costituzione dei due corpi*, e sulla quale non influisce per nulla la diversa concentrazione.

« Per il paraxilenolo, il quale non sembra formare soluzione solida con il paraxilene, abbenchè i precedenti risultati inducessero a credere che ciò potesse avvenire, si osserva l'identico comportamento tanto in soluzione benzolica, quanto in soluzione di paraxilene.

« Ma in modo ancora più evidente viene confermata la regola suaccennata, dalle determinazioni eseguite in difenilmetano. In questo solvente il prof. Paternò ha studiato il comportamento del fenolo, e quello del fenolbenzilato o p-ossidifenilmetano.

« Poniamo di confronto i risultati di queste determinazioni:

Solvente: *Difenilmetano*; abbass. molecolare = 66

Fenolo, $C_6H_6O = 94$				*Ossidifenilmetano*, $C_{13}H_{12}O = 184$	
Eykman (1)		Paternò			
concentrazione	peso molecolare	concentrazione	peso molecolare	concentrazione	peso molecolare
—	—	0,4666	105,6	—	—
1,164	105,2	1,2392	108,6	1,0528	407,5
2,596	109	2,0588	110,8	—	—
—	—	3,7254	122,6	—	—
5,205	119	5,6715	138,3	6,6270	455,5
7,130	127	8,7941	154,7	—	—
—	—	16,6056	173,5	17,1838	489,9

(1) Zeitschr, f. phys. Chem. IV, pag. 501.

« Rispetto al fenolo si vede, che a deboli concentrazioni il suo peso molecolare è già assai vicino al teorico e che accenna a raggiungerlo a concentrazione ancora minore. Questo non è quindi che un altro caso della solita anomalia propria della funzione fenolica. Ma quando nello stesso idrocarburo il prof. Paternò discioglie una sostanza la quale non ne differisce che per un ossidrile, qual è il fenolbenzilato od ossidifenilmetano, realizzando così il caso di una di quelle soluzioni rispetto alle quali specialmente fu enunciata da me e da Montanari la regola in questione, si ha realmente nel comportamento crioscopico un' anomalia assai spiccata, ben diversa nelle cause e negli effetti da quella propria in genere ai fenoli.

« Rispetto alla ragione di questo comportamento *affatto anomalo*, la supposizione più logica a farsi è quella, che in questo caso avvenga nel congelamento della soluzione una parziale separazione del corpo sciolto con il solvente. Ciò del resto, come è noto, si potè provare sperimentalmente nel caso della soluzione di β-naftolo in naftalina, la quale, per le relazioni di costituzione chimica che intercedono fra solvente e corpo sciolto, è perfettamente paragonabile a quella dell'ossidifenilmetano in difenilmetano.

« La nuova conferma che il prof. Paternò si aspettava alla regola espressa da me e da Montanari, risulta quindi pienamente da queste esperienze; e di più non si può dire che pel fenolbenzilato in difenilmetano l'allontanamento dal caso normale sia maggiore che per qualunque altro fenolo in qualsiasi altro dei solventi studiati, dacchè il β-naftolo è tanto anormale sciolto in naftalina, che ne innalza addirittura il punto di fusione.

« Riassumendo adunque, il prof. Paternò, sebbene abbia trovato una eccezione nel comportamento del para-xilenolo alla regola che fu espressa nel lavoro mio e del Montanari, ha portato altresì ad essa una notevole conferma colla anomalia tipica dell'ossidifenilmetano in difenilmetano.

« Rispetto poi alle soluzioni degli acidi ossibenzoici nell'acido benzoico e a quelle di pirocatechina e di resorcina nel fenolo si sa già in precedenza, che l'anomalia da esse presentata nel congelamento non può avere nulla di comune con quella prodotta dal formarsi di molecole complesse. Ciò perchè, come si disse più sopra, è ben noto, che i corpi idrossilati, nonchè gli acidi riprendono il comportamento crioscopico normale quando sono disciolti in fenoli od in acidi. Che poi invece l'anomalia abbia il carattere di quelle causate dalla separazione del corpo sciolto col solvente, risulta dalle esperienze stesse. Di fatto la teoria di van't Hoff dimostra, che per esse si deve verificare una certa costanza nella irregolarità dei pesi molecolari a diverse concentrazioni; ed a questa condizione importantissima soddisfano anche, come riconosce lo stesso prof. Paternò, le soluzioni intorno alle quali egli discute.

« Con queste premesse non so darmi ragione di quanto obbietta il prof. Paternò a proposito degli acidi ossibenzoici. Egli dice: « ognuno di essi presenta una speciale anomalia senza che si abbia il fenomeno caratteristico

nei composti ossidrilici del rapido decrescimento della depressione molecolare col crescere della concentrazione », mentre è appunto il fatto della relativa costanza della depressione molecolare a diverse concentrazioni quello che dà, alla speciale anomalia degli acidi ossibenzoici, il carattere proprio ed esclusivo di quelle dovute a formazione di soluzione solida.

« Sembra infine, che il prof. Paternò non ritenga come sufficientemente provata l'anomalia della resorcina e della pirocatechina disciolte nel fenolo, pel fatto che i valori ottenuti per i pesi molecolari non sono molto lontani da quello teorico, facendo egli osservare, che essi restano compresi rispettivamente fra i numeri 129-138 e 132-142. Ma per esser certi di anomalie dovute a formazione di soluzione solida, non è necessario che esse siano molto spiccate; la condizione essenziale è che l'irregolarità nel comportamento crioscopico si mantenga anche in soluzioni molto diluite. Ora quando una determinata soluzione anche alla concentrazione del $\frac{1}{2}$ p. cento, persiste a fornire pel corpo sciolto un peso molecolare superiore di 20 unità a quello calcolato (come è il caso dei due biossibenzoli in soluzione fenolica) non è dato di affermare che la soluzione esaminata abbia comportamento crioscopico normale.

« La teoria di van't Hoff delle soluzioni solide afferma del resto chiaramente, che le differenze più o meno rilevanti, che si riscontrano fra i dati teorici e quelli sperimentali dipendono dalla proporzione maggiore o minore di sostanza sciolta, che cristallizza assieme al solvente. Ora la facoltà dei corpi di sciogliersi allo stato solido sembra essere assai diversa nei singoli casi, ed appare essere in relazione con l'analogia più o meno grande di forma cristallina dei corpi che fungono rispettivamente da solvente e da corpo sciolto, con la differenza dei loro punti di fusione e con altre proprietà e cause intorno alle quali non si può per ora precisare nulla. Sopra queste circostanze ho già richiamato l'attenzione nella mia Memoria già citata che ho pubblicato nel 1893. In essa, a pag. 373, è detto: « le numerose anomalie che ho potuto realizzare sperimentando il comportamento crioscopico di molti corpi in solventi analoghi ad essi per costituzione chimica, si esplicano però in misura molto diversa ».

« Tenendo conto delle proprietà suaccennate, sarà forse facile comprendere altresì perchè l'ossidifenilmetano sia maggiormente anormale del fenolo in benzolo e dell'α-naftolo in naftalina.

« Per ultimo siccome il prof. Paternò a maggior conferma della sua tesi cita le nuove esperienze eseguite col bromoformio da Ampola e Manuelli dalle quali, egli dice, risulta che « il fenolo ed il timolo sciolti in bromoformio si comportano in modo del tutto corrispondente che nella benzina e nel paraxilene » è mio debito, per esser coerente a quanto dissi più sopra, far notare che questa espressione non può essere esatta. Dacchè, secondo me, i risultati del prof. Paternò dimostrano che il comportamento del fenol in paraxilene è ben diverso da quello del fenolo in benzina: ora dunque, se il comportamento del fe-

nolo in bromoformio è corrispondente (come è presumibile ed è naturale) a quello del fenolo in paraxilene, non può essere in pari tempo analogo a quello del fenolo in benzolo. Le esperienze di Ampola e Manuelli, contenute nella nota pubblicata in seguito (1), mi confermano nella mia opinione. Il calcolo dei pesi molecolari, ch'io ho eseguito in base alle prime determinazioni di Ampola e Manuelli adottando la costante 144, conducono pel fenolo in bromoformio ai seguenti numeri:

Fenolo in bromoformio, $m = 94$.

concentrazione	peso molecolare
0,1987	102
0,6016	112
1,1596	124
2,0698	146,

dai quali non mi sembra giustificato asserire, come fanno i sigg. Ampola e Manuelli, che: « rispetto al fenolo l'analogia del bromoformio con la benzina ed il paraxilene non potrebbe essere più completa ».

« Quanto poi al fatto che il cloroformio in bromoformio è normale, osservo come tra i corpi della serie alifatica a catena aperta io non abbia ancor potuto constatare nessun caso di formazione di soluzione solida: ma d'altra parte avendo io trovato come risulta dalle mie esperienze, che tanto il bromobenzolo quanto il clorobenzolo sono normali in benzina (2), non v'ha nulla di sorprendente che anche il cloroformio nel bromoformio abbia comportamento crioscopico normale ».

(1) Questi Rendiconti, vol. IV (1° sem.), pag. 384.
(2) Gazz. chimica, 1893, vol. XXIII, parte IIa, pag. 371.

P. B.

INDICE DEL VOLUME IV, SERIE 5. — RENDICONTI

1895 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

F

G

H

J

L

M

N

O

INDICE PER MATERIE

A

B

C

N

P

ERRATA-CORRIGE

A pag. 25 lin. 28 dopo *simmetria* agg. *elastica*
» » 26 » 9 invece di *ordine* legg. *grado*
» » » » 31 trasportare (2) alla lin. 34
» » » » 34 nelle formule invece di $\frac{4\pi}{n}$ legg. $\frac{4\pi}{n} i$
» » 29 » 28 » » $y_2{}^2$ » $y_z{}^2$
» » » » 32 » » $-J$ » J
» » » » 35 » » $(x_z$ » $(x_x$
A pag. 372 riga penultima invece di *satura* legg. *acidata.*

in quelle successive, con limiti di deformazione più estesi, le L'' risultano più vicine alle L che alle L'. Si vede pertanto come al crescere della plasticità della sostanza, per l'accresciuta ampiezza dei cicli, il comportamento del ferro si avvicina a quello caratteristico dell'ottone. E che ciò sia vero si argomenta anche dall'esame delle tabelle relative ai fili Fe_3 ed Fe_4, che dànno in generale valori di L'' assai concordanti con quelli di L e quasi sempre compresi fra le L e le corrispondenti L'.

« Presso a poco come questi ultimi si comportano i tre fili di nichel.

« Il platino per forze contenute entro limiti ristretti accusa una legge di deformazione alquanto diversa da quella da noi ammessa, ma per valori di P_1 piuttosto grandi, analogamente a quanto si ha per il ferro, diminuiscono le divergenze fra i valori di L e di L', ed al tempo stesso le L ed L'' si avvicinano fra loro.

« I fili di alluminio, rame ed argento presentano nell'attuale studio un comportamento quasi del tutto normale, solo è da notare che i valori di L'' relativi ai cicli di maggiore estensione risultano per i fili di rame e per Al_1 un poco superiori a quelli che si hanno per le corrispondenti L ed L'.

« Il complesso dei fatti esposti tende a mostrare che, se non si va a deformazioni assai grandi, la (4) resta verificata per i metalli la cui plasticità è apprezzabile, e ciò porta implicitamente ad ammettere come in tal caso il sistema delle (1) e (2) possa servire a rappresentare la legge di deformazione del corpo al variare della forza nei processi ciclici senza bisogno di ricorrere ad uno sviluppo in serie per la espressione di ω, giacchè solo quando ci si arresti al primo termine di questo sviluppo risulta $A_1 \operatorname{sen} \lambda = \omega_0$.

« Una deduzione si può trarre dalla (4) riportandoci allo studio delle proprietà elastiche col metodo dinamico. Si è constatato nel lavoro *sull'attrito interno dei metalli* che in un filo oscillante, la diminuzione di energia potenziale per il decremento di ampiezza $\Delta\omega$ all'intorno della deformazione corrispondente al momento M_1, è presso a poco uguale all'area d'isteresi del ciclo bilaterale fra i momenti estremi M_1 e $-M_1$, onde si può porre:

$$L = M_1 \Delta\omega ;$$

ma per la (4)

$$L = \pi M_1 \omega_0$$

sicchè avremo:

$$\Delta\omega = \pi \omega_0 ;$$

cioè il rapporto fra il decremento di ampiezza del filo oscillante e la deformazione permanente del ciclo statico che gli corrisponde è costante ed uguale a π ».

Fisica. — *Studio della proprietà elastica dei corpi fondato sull uso contemporaneo dei metodi statico e dinamico.* Nota del dott. M. Cantone, presentata dal Socio Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sopra alcune nuove eccezioni alla legge del congelamento* (1). Nota di Felice Garelli, presentata dal Socio G. Ciamician.

« Pubblico in questa Nota i risultati di alcune determinazioni crioscopiche, che costituiscono un nuovo contributo sperimentale portato alla ricerca delle relazioni esistenti fra la costituzione chimica dei corpi e la loro capacità a formare soluzioni solide. Il tempo limitatissimo e le difficoltà incontrate nella preparazione del necessario materiale sperimentale, non mi hanno permesso di dare, come avrei voluto, una maggiore estensione alle mie ricerche. Le poche esperienze, che formano l'argomento di questa Nota hanno tuttavia un certo interesse, perchè servono di conferma alle vedute e previsioni già formulate in un lavoro precedente (2).

« In questo ho dimostrato che gli acidi carbopirrolico e tiofencarbonico nonchè gli acetilpirroli e l'acetotienone, disciolti rispettivamente nell'acido benzoico e nell'acetofenone presentavano lo stesso caratteristico comportamento crioscopico anormale osservato per le soluzioni benzoliche di pirrolo e di tiofene.

« Ciò indusse a formulare, come probabile, la seguente tesi: *il comportamento crioscopico anormale che si osserva fra due corpi ciclici capaci di formare tra di loro soluzioni solide, continua a sussistere per quei derivati di essi, che rispettivamente si corrispondono* (3).

« Paternò e Montemartini con un loro recente lavoro (4) avendo acquistato alla crioscopia un nuovo ed assai utile solvente, il paraxilene, mi hanno dato occasione di verificare, se la legge sovraenunciata trovava una nuova con-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Gazz. chim. ital. 1894, parte IIa, pag. 229.

(3) Credo necessario far notare a proposito di questa e di altre simili regole, che esse non possono nè devono essere intese come leggi generali, ma semplicemente quale espressione riassuntiva dei fatti finora osservati. La facoltà di due sostanze di formare delle soluzioni solide, che sembra determinare il comportamento crioscopico anormale da me in tali casi osservato, è evidentemente una proprietà costitutiva che dipende probabilmente nello stesso modo dalla costituzione chimica dei corpi organici, come le relazioni di isomorfismo e di morfotropia. Perciò è da prevedersi che ci saranno molte eccezioni a tali regole, come già io stesso ho potuto in alcuni casi constatare.

(4) Gazz. chimica ital. 1894, parte IIa, pag. 197.

ferma relativamente agli omologhi corrispondentisi del benzolo, del pirrolo e del tiofene. Già questi autori hanno trovato, che il pirrolo ed il tiofene sciolti nel paraxilene dànno abbassamenti del punto di congelamento normali, ed essi pure notano che tale fatto è pienamente in accordo con le norme dedotte dalle esperienze mie e di altri.

« Nel medesimo solvente era invece da aspettarsi secondo la regola summentovata, un comportamento crioscopico anormale per l'*αα-dimetilpirrolo* e l'*αα-dimetiltiofene*. Ho preparato sinteticamente questi corpi partendo dall'acetonilacetone e seguendo in tutto le prescrizioni date da Paal (1).

« Il paraxilene della fabbrica Kahlbaum venne distillato dapprima frazionatamente sul sodio metallico e poscia sottoposto ad una cristallizzazione frazionata. Il prodotto così purificato fondeva a 13°,67.

« Per controllarne ulteriormente la purezza ho eseguite alcune determinazioni crioscopiche sciogliendovi qualcuna delle sostanze già studiate da Paternò e Montemartini. Ho scelto fra esse la naftalina, il pirrolo e la piperidina; e queste due ultime anche nell'intento di confermare con nuove misure il loro comportamento normale e porlo di confronto con quello presentato invece dal dimetilpirrolo e dal dimetiltiofene.

« Per calcolare i pesi molecolari ho adottato come costante del paraxilene il numero 43 proposto dal prof. Paternò, ed il quale assai bene si accorda con la teoria.

concentrazione	abbassamento termometrico	peso molecolare
	Naftatina, $C_{10}H_8 = 128$	
1,8750	0°,68	117
2,551	0 ,91	120
	Pirrolo, $C_4H_5N = 67$	
0,9208	0,590	67,1
1,6246	0,995	70,2
2,775	1,630	73,2
4,601	2,500	79,1
6,957	3,460	86,0
	Piperidina $C_5H_{11}N = 85$	
0,5192	0,255	87,5
1,5306	0,750	87,8
2,5933	1,265	88,1
4,3046	2,070	89,4
0,5633	0,285	88
1,3216	0,650	87

(1) Berichte, XVIII, 2254.

αα-Dimetilpirrolo, $C_6H_9N = 95$

0,7515	0,30	107,7
1,5418	0,65	102,0
2,4470	1,01	104,1
3,3072	1,18	120,5
6,2004	2,20	121,1 (1).

αα-Dimetiltiofene, $C_6H_7S = 112$

0,6296	0,21	129
1,3882	0,48	124
2,4943	0,85	126,2
3,3605	1,13	128
6,0498	1,99	131
8,2609	2,69	132

« Questi risultati confermano in modo soddisfacente la previsione fatta. È ben vero, che l'anomalia del dimetilpirrolo ed anche se si vuole, quella del dimetiltiofene sono poco spiccate. Ma d'altra parte, l'andamento caratteristico del fenomeno alle diverse concentrazioni, quasi sempre osservato in casi simili, non lascia dubbio sulla causa che produce questo comportamento crioscopico anormale.

« L'anomalia risalta maggiormente se si confrontano i pesi molecolari del dimetilpirrolo con quelli forniti dal pirrolo sciolto nello stesso idrocarburo.

« Una ulteriore conferma della regola summentovata l'ho realizzata determinando il punto di congelamento delle soluzioni di *αα-ditienile* in difenile. Nella precedente memoria pubblicata con Montanari avevo già detto, che mentre il comportamento crioscopico perfettamente normale dei due ditienili in soluzione benzolica rilevato da Auwers era naturalissimo, prevedevo invece che essi avrebbero fornito abbassamenti più piccoli dei teorici se disciolti nel difenile. Ora lo stesso Auwers in un successivo lavoro (2) prendendo nota delle mie previsioni, esprimeva il desiderio di vederle confermate con l'esperienza.

« Io ho scelto per le mie esperienze l'*αα-ditienile*, come più facilmente accessibile, preparandolo dal tiofene per trattamento con acido solforico alquanto fumante, secondo le prescrizioni di Töhl (3).

« Questo composto, purificato per cristallizzazione dall'alcool acquoso: fondeva a 33°.

(1) Essendomi mancato il materiale non ho potuto, come sarebbe stato mio desiderio ripetere queste due ultime determinazioni.

(2) Zeitschr. für phys. Chemie, XV, pag. 55.

(3) Berichte, XXVII, 665.

« Disciolto in difenile fornì i seguenti numeri:

αα-Ditienile in difenile

concentrazione	abbassamento termometrico	peso molecolare (costante = 80)
0,928	0°,42	176,7
2,214	1 ,00	177,1
4,010	1 ,76	182,0

« Peso molecolare calcolato per $C_8 H_6 S_2 = 166$.

« L'anomalia benchè lieve anche in questo caso, non può esser dubbia; e risalta maggiormente se si confrontano i sovra notati numeri con quelli ottenuti da Auwers [1] per l'*αα-ditienile* in soluzione benzolica:

concentrazione	peso molecolare
1,38	164
3,025	161
5,64	163
6,835	165
8,15	166

« Si può dire ora, con quasi certezza, non solo che il *ββ-ditienile* sciolto in difenile sarà esso pure anormale, ma altresì, che l'anomalia sarà molto più spiccata attesochè questo composto fonde a temperatura molto più elevata dell'isomero.

« Da alcune esperienze rese note nel precedente lavoro già citato, parrebbe che tanto l'isomeria di struttura, quanto quella geometrica non entrino per nulla ad influire sulla capacità delle sostanze di sciogliersi allo stato solido o di formare mescolanze isomorfe.

« Di fatto l'apiolo è con l'isapiolo identico per funzione chimica e per costituzione: la sola differenza fra queste due sostanze sta nel diverso posto occupato dal doppio legame nel gruppo $C_3 H_5''$: eppure i pesi molecolari forniti dall'apiolo sciolto nell'isapiolo coincidono quasi con i teorici. Parimenti le soluzioni di acido isocrotonico nell'acido crotonico seguono esattamente la legge generale del congelamento.

« Lo stesso fatto si ripete per le soluzioni di pirocatechina e di idrochinone in resorcina.

« La resorcina, scelta come solvente, fu purificata accuratamente prima distillandola, poi cristallizzandola dall'alcool. Fondeva a 110°,1. Di essa il dott. Montanari determinò l'abbassamento molecolare costante, sciogliendovi delle sostanze a comportamento crioscopico presumibilmente normale:

(1) Berichte XXVI, 1746.

Solvente: *Resorcina.*

Benzammide, $C_7 H_7 N = 105$.

concentrazione	abbassamento termometrico	abbassamento molecolare
0,8571	0°,464	65,5

Timolo, $C_{10} H_{14} O = 150$.

concentrazione	abbassamento termometrico	abbassamento molecolare
1,2307	0, 535	65,2
2,3538	0, 94	59,9
4,5529	1, 75	57,6

Apiolo, $C_{12} H_{14} O_4 = 222$.

concentrazione	abbassamento termometrico	abbassamento molecolare
1,1478	0, 34	65,7
2,0044	0, 60	66,4
3,9300	1, 15	64,9

Fenilcumalina, $C_{11} H_8 O_2 = 172$.

concentrazione	abbassamento termometrico	abbassamento molecolare
1,2164	0°,455	64,3
2,7656	1, 055	65,6

« Da queste misure la depressione molecolare costante della resorcina risulta presso a poco uguale a 65. Ora allo stesso numero all'incirca si giunge impiegando come sostanze disciolte la pirocatechina e l'idrochinone.

Pirocatechina, $C_6 H_6 O_2 = 110$.

« Fu purificata accuratamente cristallizzandola dal benzolo. Fondeva a 104-105°.

concentrazione	abbassamento termometrico	abbassamento molecolare
1,1543	0°,70	66,7
2,3213	1, 375	65,1

Idrochinone, $C_6 H_6 O_2 = 110$.

« Lo si purificò cristallizzandolo dall'acqua. Fondeva a 170°. Le sue soluzioni in resorcina col riscaldamento imbruniscono rapidamente. A questa parziale decomposizione sono forse da attribuirsi i valori, alquanto elevati, delle depressioni molecolari, che ho ottenuti:

concentrazione	abbassamento termometrico	abbassamento molecolare
1,176	0°,745	69,6
2,3457	1, 48	69,4

« È senza dubbio notevole e fors'anche strano, che la pirocatechina la quale è anormale in fenolo, fornisca abbassamenti molecolari quasi teorici

se viene disciolta in resorcina. Questo fatto prova la difficoltà di enunciare relativamente a questo fenomeno delle leggi generali: ma in pari tempo dimostra nuovamente che la funzione chimica non influisce sul manifestarsi o meno di quelle speciali anomalie la causa delle quali va ricercata unicamente nella formazione di soluzioni solide ».

Botanica. — *Terzo pugillo di alghe tripolitane.* Nota di G. B. De Toni, presentata a nome del Corrispondente Arcangeli.

« Colla presente Nota completo lo studio dei materiali tripolitani esistenti nel mio Erbario, non senza far cenno, come nei due precedenti pugilli (1), delle pubblicazioni riguardanti la ficologia mediterranea, apparse dopo la seconda mia Nota (1892) pubblicata quasi in pari tempo alla Memoria dell'egregio mio amico prof. A. Piccone, illustrante gli esemplari raccolti a Derna e Bengasi da G. Haimann e comunicatigli da R. Pirotta.

« Quale appendice alla sua Phycologia Mediterranea il prof. Ardissone (2) pubblicò alcune notizie tendenti a raccogliere nuovi dati per la conoscenza della flora marina del Mediterraneo desunti, oltrechè da determinazioni proprie, dai lavori di Bornet (3), Debray (4), Gomont (5), J. Agardh (6) e da quelli già altrove da me (7) citati di Vinassa e Rodriguez. Ai lavori ora menzionati devonsi aggiungere le contribuzioni di Moebius (8) per l'isola di Malta, di Deckenbach (9) per il Mar Nero, di Schmitz (10) per le *Schizymenia* del

(1) Cfr. le due precedenti Note nei Rendiconti della Reale Accad. dei Lincei ser. 4a, vol. IV, fasc. 5 (1888), p. 240-250, e ser. 5a, vol. I, fasc. 4 (1892), p. 140-147.

(2) F. Ardissone, *Note alla Phycologia Mediterranea.* Rendic. del R. Istituto Lombardo ser. 2a, vol. XXVI, fasc. XVII. Milano 1893.

(3) E. Bornet, *Les Algues de P. K. A. Schousboe récoltées au Maroc et dans la Mediterranée.* Mém. Soc. des sc. nat. et mathém. de Cherbourg tom. XXVIII, p. 165-376, pl. I-III. Paris 1892.

(4) F. Debray, *Liste des Algues marines et d'eau douce récoltées jusqu'à ce jour en Algérie.* Bull. scient. de la Fr. et de la Belg. tom. XXV. Paris 1893.

(5) M. Gomont, *Monographie des Oscillariées.* Ann. des sc. nat., Botan., 7me sér., tom. XV-XVI. Paris 1893.

(6) J. Agardh, *Analecta algologica.* Lunds Univ. Arsskr. T. XXVIII. Lundæ 1892.

(7) G. B. de Toni in Rendic. R. Accad. Linc. ser. 5a, vol. I, fasc. 4 (1892), p. 140-141.

(8) M. Moebius, *Enumeratio algarum ad insulam Maltam collectarum.* Notarisia VII, 1892, p. 1436.

(9) C. Deckenbach, *Ueber die Algen der Bucht von Balaclawa.* Sitz. der Botan. Sect. der Naturf. Gesellsch. zu St. Petersburg vom 18 März 1892.

(10) F. Schmitz, *Kleinere Beiträge zur Kenntniss der Florideen.* La Nuova Notarisia (red. G. B. de Toni) ser. 5a, aprile 1894, p. 608-635.

Mediterraneo e di B. Schroeder [1] per le coste dell'Asia Minore; nè posso omettere la mia notizia [2] relativa all'*Aeodes marginata* (Rouss.) F. Schm., specie nuova per la Toscana raccolta dal sig. P. Dattari a Livorno.

« Credo conveniente chiudere il terzo pugillo d'alghe tripolitane col prospetto di tutte le specie finora indicate per quel tratto della costa africana, mettendole a confronto colle flòrule al giorno d'oggi conosciute del Marocco (fino a Tangeri), dell'Algeria, della Tunisia (isole Galita, Piana e dei Cani) e dell'Egitto fino ad Alessandria; per quest'ultima località mi tornò utile l'elenco dato alla luce dall'Areschoug [3], omesso nella bibliografia stampata nell'opera già ricordata dell'Ardissone.

« Galliera Veneta 20 aprile 1895.

FLORIDEAE.

Chaetangiaceae.

« 1. **Scinaia furcellata** (Turn.) Biv. in *Iride* (Palermo) 1822, cum icone; J. Ag. *Sp.* II, p. 422; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 269; Hauck, *Meeresalgen*, p. 61; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 101; *Ulva furcellata* Turn.

« Tripoli, rejetta sulla spiaggia.

Gelidiaceae.

« 2. **Wrangelia penicillata** Ag. *Sp.* II, p. 138; J. Ag. *Sp.* II, p. 708, *Epicr.* p. 623; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 312; Hauck, *Meeresalgen* p. 51; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 114.

« Tripoli, rejetta sulla spiaggia.

Gigartinaceae.

« 3. **Gymnogongrus Griffithsiae** (Turn.) Mart. *Fl. Bras.* I, p. 27; J. Ag. *Sp.* II, p. 316; Ardiss. *Phyc. Medit.* I, p. 176; Hauck, *Meeresalgen* p. 139; De Toni e Levi, *Fl. Alg. Ven.* I, p. 64; *Fucus Griffithsiae* Turn. *Hist. Fuc.* Tab. 37.

« Tripoli, in mezzo ad altre alghe.

Rhodophyllidaceae.

« 4. **Rissoëlla verruculosa** (Bert.) J. Ag. *Sp.* II, p. 241, *Epicr.* p. 289;

[1] B. Schroeder, *Kleinasiatische Algen.* La Nuova Notarisia (red. G. B. de Toni) ser. VI (1895).

[2] G. B. de Toni, *Di una Floridea nuova per la Toscana.* Bull. Soc. botan. ital. (Adun. Firenze del 9 Dic. 1894).

[3] F. E. Areschoug, *Alger samlade vid Alexandria af framl. Dr. Hedenborg.* Oefvers. af k. Vet.-Akad. Förhandl. 1870, n. 10, p. 929-939.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 Gennaio 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 1°

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 gennaio 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

CONCORSI A PREMI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Note che saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-III. (1894). — Fasc. 1°-10°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermnnno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 Gennaio 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 2°

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°, 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-III. (1894). — Fasc. 1°-12°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMNNNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Gennaio 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 gennaio 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Nota che sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

ERRATA-CORRIGE

A	pag.	25	lin.	28	dopo *simmetria*		agg.		*elastica*
»	»	26	»	9	invece di *ordine*		legg.		*grado*
»	»	»	»	31	trasportare (2) alla lin. 34				
»	»	»	»	34	nelle formule invece di		$\frac{4\pi}{n}$	legg.	$\frac{4\pi}{n} i$
»	»	29	»	2	»	»	y_2^2	»	y_z^2
»	»	»	»	32	»	»	$-J$	»	J
»	»	»	»	35	»	»	$(x_z$	»	$(x_x$

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 Febbraio 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 3°

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 1º Sem. Fasc. 1º-3º.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-III. (1894). — Fasc. 1º-12º.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermnnno Loescher & C.º — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Febbraio 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 febbraio 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Note che saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 *Febbraio* 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 4°

SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distint per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* d· 'la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

RENDICONTI — Febbraio 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 febbraio 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Nota che sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 *Marzo* 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 5°

1 Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°-5°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-III. (1894). — Fasc. 1°-12°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMNNNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Marzo 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 marzo 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Note che saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 *Marzo* 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 6°

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°-6°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-III. (1894). — Fasc. 1°-12°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermnnno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI · Marzo 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 marzo 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Note che saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 Aprile 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 7°

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Blaserna (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci *Gegenbaur, von Helmholtz, Kühne, Thomsen, Pincherle;* e dai sigg. *Peano* e *Barone*. ..

CORRISPONDENZA

Blaserna (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti . . . » »

BULLETTINO BIBLIOGRAFICO.

(*) [illegible] che saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*.
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*.
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*. Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*. Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*. Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°-7°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*. Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*. Vol. I.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 aprile 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

(*Segue in terza pagina*)

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 *Aprile* 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 8°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°-8°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMNNNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Aprile 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 aprile 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Nota che sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ERRATA - CORRIGE

A pag. 266 lin. 28 invece di *esterna* legg. *estrema.*
» » 267 » 29 » » *del* » *della.*
» » 268 » 6 » » *telamencefalo* » *talamencefalo.*

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 *maggio* 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 9°

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°-9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze*.
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli*.

RENDICONTI — Maggio 1895.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 maggio 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

(*) Note che saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 *maggio* 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 10°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°-10°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 maggio 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Nota che sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 giugno 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 11°

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°-11°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 giugno 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

CORRISPONDENZA

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 *giugno* 1895.

Volume IV.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-IV. (1895) 1° Sem. Fasc. 1°-12°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-3°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 giugno 1895.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI